Dinamica dei Continui
Vibrazioni flessionali delle travi

Indice

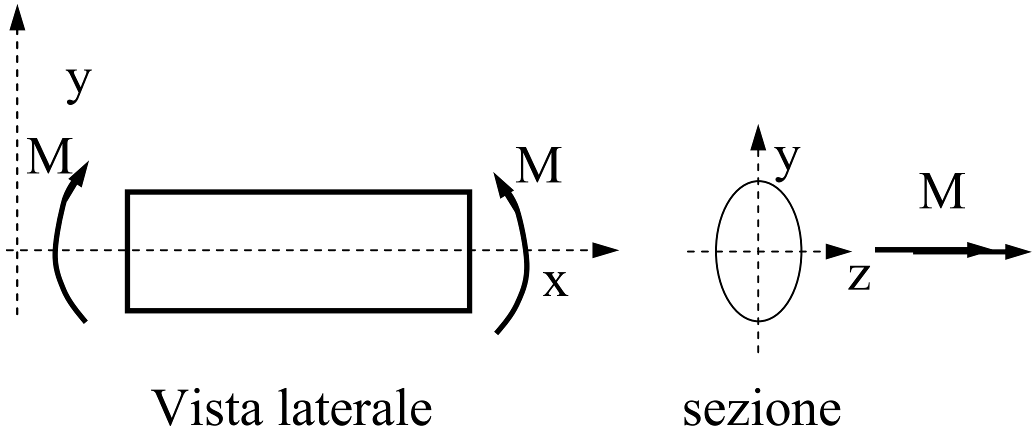
- Condizione di carico di “flessione retta”
- Stato di sforzo e di deformazione in condizione di flessione retta
- Equazione di moto delle vibrazioni flessionali di una trave
- Soluzione stazionaria
- Frequenze proprie e modi di vibrare flessionali della trave

Condizione di carico di “flessione retta” della trave

Consideriamo una condizione di carico della trave in cui sia: $N=0$, $T=0$, $M \neq 0$, $M^t=0$ (“flessione retta”). Indichiamo con x la direzione assiale della trave e limitiamoci al caso in cui:

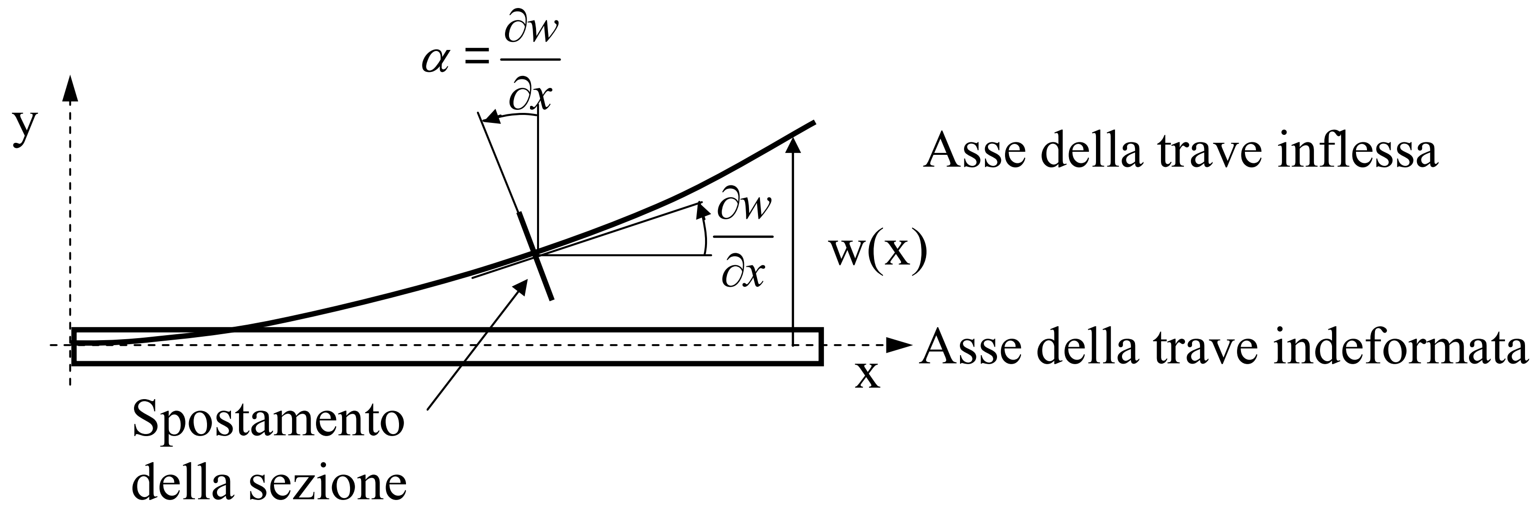
-la sezione della trave abbia 2 assi di simmetria (asse y e asse z)

-Il momento flettente agisca secondo l’asse z (ossia sia prodotto da forze agenti nel piano xy)



Moto della sezione nella condizione di "flessione retta"

Si può dimostrare che, in condizione di flessione retta, ossia trascurando la deformazione aggiuntiva prodotta dall'azione di taglio, l'asse della trave subisce uno spostamento w(x) in direzione ortogonale alla propria giacitura indeformata, mentre le sezioni della trave si mantengano piane e indeformate e compiono una rotazione α(x) che le mantiene ortogonali all'asse della trave.



Stato di deformazione nella condizione di "flessione retta"

In base al moto delle sezioni della trave descritto nel lucido procedente, le funzioni che descrivono gli spostamenti $u_f(x,y)$ e $w_f(x,y)$ dei punti della trave in direzione e ed y sono:

$$u_f(x,y) = -\alpha\, y = -\frac{\partial w}{\partial x}\, y$$

$$w_f(x,y) = w(x)$$

Essendo invece, come indicato nel lucido precedente, w(x) lo spostamento trasversale dell'asse della trave

Stato di deformazione nella condizione di "flessione retta"

Applicando le relazioni ricavate nella lezione 1 per definire la deformazione della trave in funzione degli spostamenti $u_f(x,y)$ e $w_f\,(x,y)$ si ottiene:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_f}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\, y \;;\; \varepsilon_y = \frac{\partial w_f}{\partial y} = 0 \;;\; \gamma_{xy} = \frac{\partial w_f}{\partial x} + \frac{\partial u_f}{\partial y} = 0$$

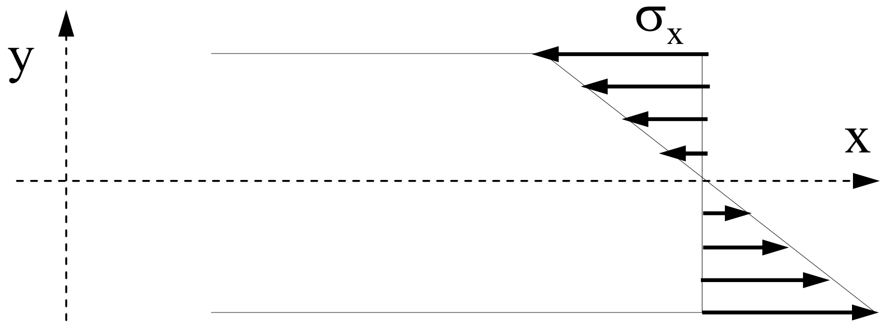
La trave inflessa risulta perciò soggetta ad una dilatazione in direzione x (assiale) che però non è uniforme, come nel caso della trazione (lez. 2), ma risulta (in valore assoluto) linearmente crescente con la distanza dall'asse della trave.

Stato di sforzo nella condizione di "flessione retta"

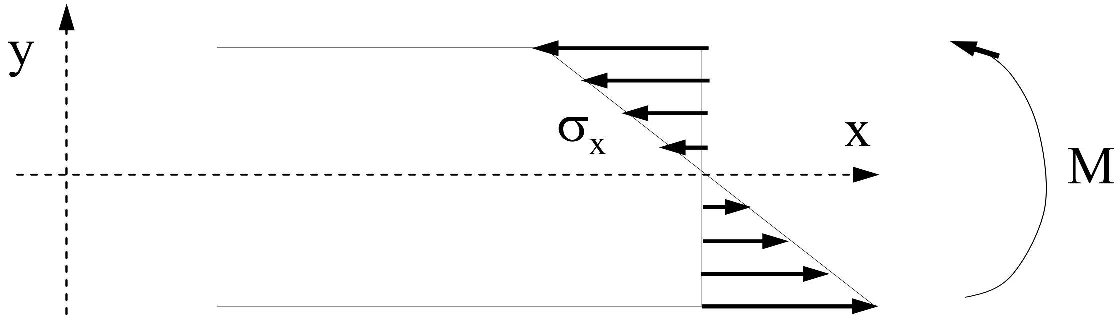
Utilizzando il legame sforzi-deformazioni elastico lineare:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -E\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ ;\ \sigma_y = 0\ ;\ \tau_{xy} = 0$$

Ossia lo stato di sforzo nella trave inflessa è rappresentato da una distribuzione di sforzi normali in direzione x detta "a farfalla":



Stato di sforzo nella condizione di "flessione retta"

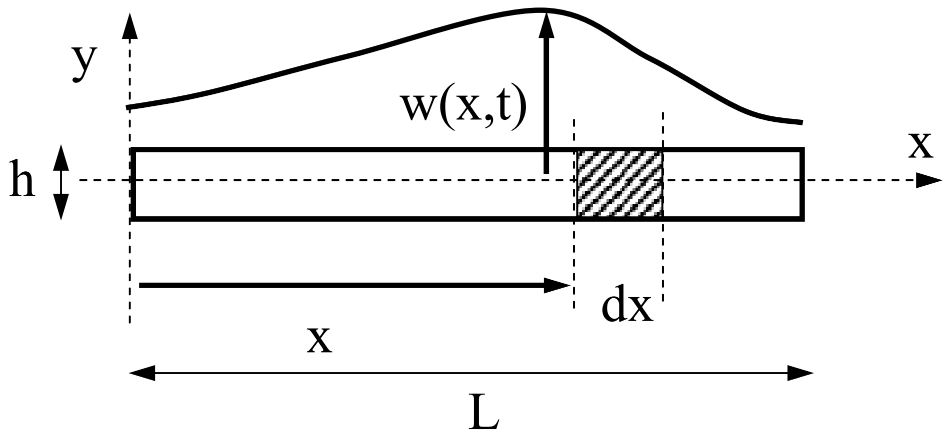


La risultante della distribuzione di sforzi è nulla per simmetria. Di conseguenza si ottiene (come atteso) N=0, T=0. Il momento flettente risultante è fornito dall'integrale:

$$M = -\int_A \sigma_x y dA = \int_A E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} y^2 dA = E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \underbrace{\int_A y^2 dA}_{J_y} = EJ_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

In cui Jy è un parametro caratteristico della sezione, detto *momento di inerzia rispetto all'asse y*

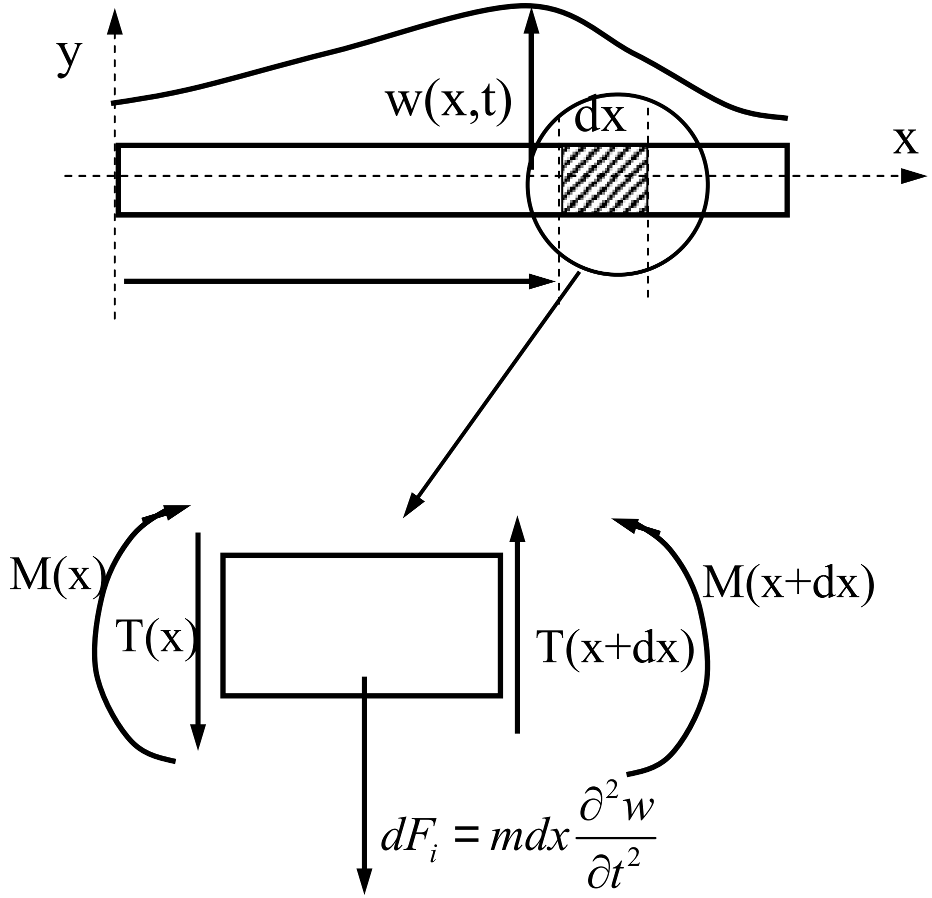
Vibrazioni flessionali della trave - ipotesi



Il moto flessionale è descritto dalla funzione w(x,t) che descrive al variare del tempo il moto dell'asse della trave in direzione trasversale
Per studiare le vibrazioni flessionali della trave, consideriamo le seguenti ipotesi semplificative:

-nessuna forza esterna agente (moto libero)
-Sezione della trave costante
-La flessione avviene secondo uno dei due assi di simmetria della sezione
-Deformazione prodotta dal taglio trascurabile (valido per tavi "snelle", ossia con h<<L
-Legame sforzi-deformazioni elastico lineare

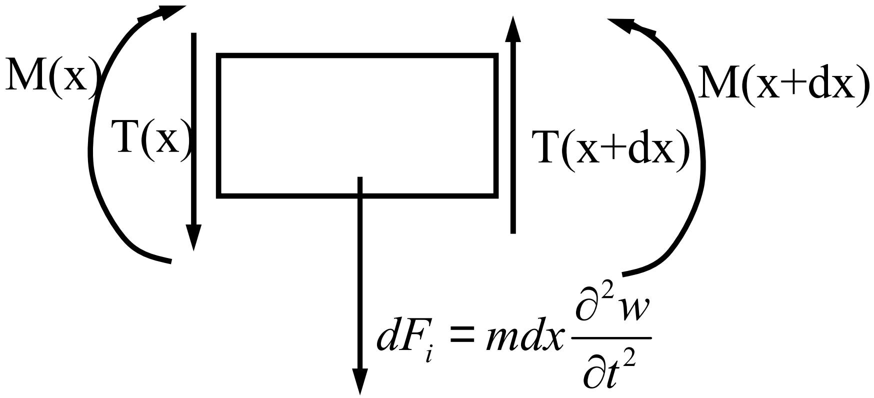
Equazione di moto delle vibrazioni flessionali –equazioni di equilibrio dinamico



Isoliamo dalla trave un tronco di lunghezza infinitesima dx in posizione generica: le forze che agiscono sul tronco sono:

- la forza di inerzia dF_i
- Le azioni di taglio T(x) e T(x+dx) sulle facce di sinistra e di destra dell'elementino
- I momenti flettenti M(x) e M(x+dx) sulle due facce dell'elemento h

Equazione di moto delle vibrazioni flessionali –equazioni di equilibrio dinamico



Imponendo l'*equilibrio dinamico alla rotazione* del tronco di trave:

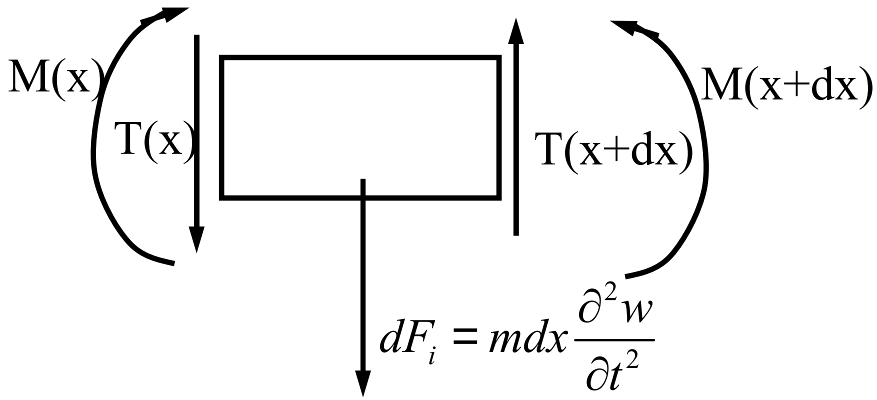
$$M(x+dx) - M(x) - T(x)\tfrac{dx}{2} - T(x+dx)\tfrac{dx}{2} = 0$$

$$M(x) + \frac{\partial M}{\partial x}dx - M(x) - T(x)\tfrac{dx}{2} - T(x)\tfrac{dx}{2} \underbrace{- \frac{\partial T}{\partial x}\tfrac{dx^2}{2}}_{\text{trascurabile}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial x} = T(x)}$$

Equazione di moto delle vibrazioni flessionali –equazioni di equilibrio dinamico



Imponendo l'*equilibrio dinamico alla traslazione* del tronco di trave:

$$-T(x+dx)+T(x)-mdx\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}+m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

e ricordando che:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=EJ_y\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{EJ_y\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0}$$

Soluzione stazionaria dell'equazione dei moti moti flessionali

Come nel caso delle vibrazioni assiali, ricerchiamo una **soluzione stazionaria** dell'equazione di moto nella forma:

$$w(x,t) = \alpha(x)\beta(t)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \alpha^{IV}(x)\beta(t)\ ; \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha(x)\ddot{\beta}(t) \quad con: \alpha^{IV} = \frac{d^4\alpha(x)}{dx^4}; \ddot{\beta} = \frac{d^2\beta(t)}{dt^2}$$

E sostituendo:

$$\frac{\ddot{\beta}(t)}{\beta(t)} = -\frac{EJ_y}{m}\frac{\alpha^{IV}(x)}{\alpha(x)} = -\omega^2$$

In cui, avendo separato la variabile tempo *t* dalla variabile spazio *x,* le due espressioni per uguagliarsi devono assumere valore costante $-\omega^2$ (negativo, per ottenere una soluzione stabile).

Soluzione stazionaria dell'equazione dei moti moti flessionali

Separando la soluzione nel tempo β(t) da quella nello spazio α(x), si ottengono le due equazioni :

$$\ddot{\beta}(t) + \omega^2 \beta(t) = 0 \quad ; \quad \alpha^{IV}(x) - \frac{m\omega^2}{EJ_y}\alpha(x) = 0$$

L'equazione che descrive la componente temporale della soluzione β(t) è l'equazione "dei moti armonici", che ha per soluzione:

$$\beta(t) = K\cos(\omega t + \phi)$$

L'equazione che descrive la componente spaziale della soluzione α(x) può essere risolta ponendo:

$$\gamma^4 = \frac{m\omega^2}{EJ_y} \quad ; \quad \alpha^{IV}(x) - \gamma^4 \alpha(x) = 0$$

Soluzione stazionaria dell'equazione dei moti moti flessionali

L'equazione che descrive la componente spaziale della soluzione α(x) può essere risolta ponendo:

$$\gamma^4 = \frac{m\omega^2}{EJ_y} \quad ; \quad \alpha^{IV}(x) - \gamma^4 \alpha(x) = 0$$

E sostituendo:

$$\alpha(x) = Ae^{\lambda x} \quad ; \quad (\lambda^4 - \gamma^4) Ae^{\lambda x} = 0$$

Che ammette per soluzioni:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\gamma \; ; \; \lambda_{1,2} = \pm \gamma$$

Da cui:

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= A_1 e^{-i\gamma x} + A_2 e^{i\gamma x} + A_3 e^{-\gamma x} + A_4 e^{\gamma x} = \\ &= A\cos(\gamma x) + B\sin(\gamma x) + Ch(\gamma x) + DSh(\gamma x)\end{aligned}$$

Soluzione stazionaria dell'equazione dei moti moti flessionali

Moltiplicando il termine spaziale per quello temporale e conglobando la costante *K* nelle costanti *A, B, C, D* si ottiene:

$$w(x,t) = \left[A\cos(\gamma x) + B\sin(\gamma x) + Ch(\gamma x) + DSh(\gamma x) \right] \cos(\omega t + \phi)$$

che rappresenta la soluzione generale delle vibrazioni flessionali stazionarie della trave

Frequenze proprie e modi di vibrare flessionali della trave

Per ottenere il moto vibratorio effettivo della trave, si devono imporre nella soluzione generale del lucido precedente le particolari condizioni al contorno cui la trave è soggetta agli estremi.
A titolo di esempio, consideriamo il caso di trave vincolata alle estremità mediante doppio vincolo di appoggio (spostamento w bloccato, rotazione dell'estremo libera).
In tale situazione si ha:

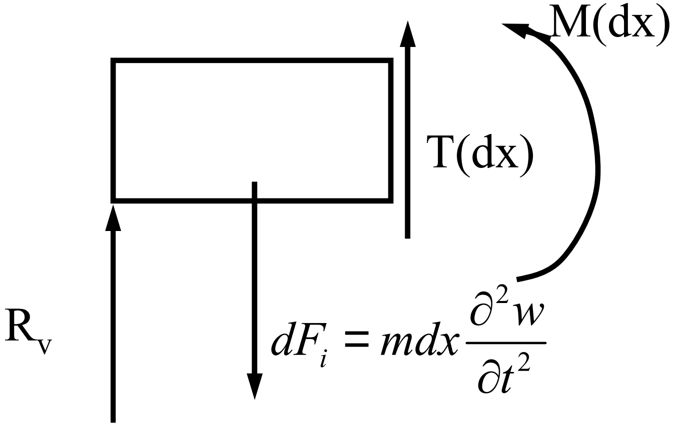
$$w(0,t) = 0 \text{ per ogni tempo } t$$

$$w(L,t) = 0 \text{ per ogni tempo } t$$

Oltre a queste due condizioni, è però necessario imporre anche l'equilibrio delle due estremità della trave. Infatti l'eqauzione di moto ricavata in precedenza garantisce l'equilibrio dinamico all'interno della trave, ma non alle sue estremità

Frequenze proprie e modi di vibrare flessionali della trave

Per l’estremo di sinistra:



Dove R_v è la reazione vincolare introdotta dal vincolo di appoggio ed è pertanto incognita. Per questo tronco di trave si può scrivere una equazione di equilibrio dinamico alla traslazione verticale, che però coinvolge l’incognita R_v. Si può inoltre scrivere l’equilibrio alla rotazione attorno all’estremo di sinistra:

$$-T(dx)dx + M(dx) - mdx\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\frac{dx}{2} = 0$$

$$\underbrace{-T(0)dx - \frac{\partial T}{\partial x}dx^2}_{\text{trascurabili}} + M(0) + \underbrace{\frac{\partial M}{\partial x}dx - m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\frac{dx^2}{2}}_{\text{trascurabili}} = 0 \Rightarrow \boxed{M(0) = 0}$$

Frequenze proprie e modi di vibrare flessionali della trave

Tenendo conto del legame tra momento e derivata seconda dello postamento *w(*x,t)

$$M(0)=0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_0 = 0 \quad \text{per ogni tempo } t$$

Per l'estremo di destra, con analoghi passaggi, si ottiene:

$$M(L)=0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_L = 0 \quad \text{per ogni tempo } t$$

Nel complesso, le quattro condizioni al contorno sono quindi:

$$w(0)=0 \quad ; \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_0 = 0$$

$$\mathrm{w(L)=0} \quad ; \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_L = 0$$

Frequenze proprie e modi di vibrare flessionali della trave

Sostituendo nella soluzione

$$w(x,t) = \left[A\cos(\gamma x) + B\sin(\gamma x) + Ch(\gamma x) + DSh(\gamma x) \right] \cos(\omega t + \phi)$$

le due condizioni per l'estremo di sinistra x=0 si ottiene:

$$\left. \begin{array}{l} A + C = 0 \\ A - C = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ C = 0 \end{array} \right.$$

Sostituendo invece le due condizioni per l'estremo di destra x=L e tenendo conto che A e C sono nulli,

$$\left. \begin{array}{r} B\sin(\gamma L) + DSh(\gamma L) = 0 \\ -B\sin(\gamma L) + DSh(\gamma L) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} D = 0 \\ B\sin(\gamma L) = 0 \end{array} \right.$$

Frequenze proprie e modi di vibrare flessionali della trave

L'ultima delle quattro condizioni:

$$B\sin(\gamma L) = 0$$

Ammette la soluzione "banale" *A*=*B*=*C*=*D*=0, oppure la condizione:

$$\sin(\gamma L) = 0 \;\Rightarrow\; \gamma L = k\pi \;\; ; \;\; \gamma = \frac{k\pi}{L}$$

E ricordando che:

$$\gamma^4 = \frac{m\omega^2}{EJ_y}$$

$$\omega = \omega_k = \sqrt{\gamma^4 \frac{EJ_y}{m}} = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ_y}{m}}$$

ossia le vibrazioni flessionali stazionarie possono avvenire solo a determinate pulsazioni ω_k, dette pulsazioni proprie ed espresse dalla formula sopra riportata, in cui k può assumere qualunque valore intero.

Frequenze proprie e modi di vibrare flessionali della trave

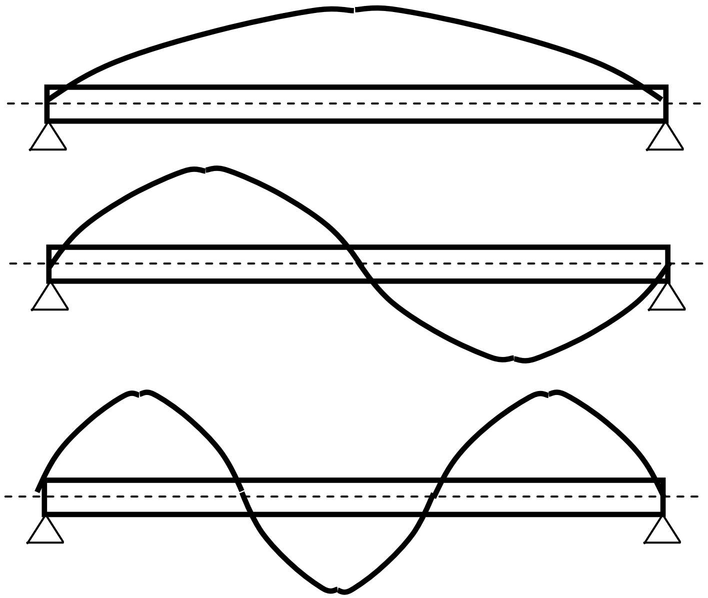
In corrispondenza di ciascuna k-esima pulsazione propria ω_k la vibrazione flessionale della trave è definita dalla funzione:

$$w_k(x,t) = \underbrace{B_k \sin(\tfrac{k\pi}{L} x)}_{\alpha_k(x)} \underbrace{\cos(\omega_k t + \phi_k)}_{\beta_k(t)}$$

La funzione dello spazio α_k, che descrive la forma spaziale del moto, viene detta **modo di vibrare** associato alla pulsazione propria ω_k. Per il caso considerato, tutti i modi di vibrare sono sinusoidi con lunghezza d'onda pari a sottomultipli interi del doppio della luce L della trave:

Modi di vibrare flessionali della trave

$$\alpha_k(x) = B_k \sin\left(\tfrac{\omega_k}{c} x\right)$$



Primo modo di vibrare

Secondo modo di vibrare

Terzo modo di vibrare

N.B.: Al contrario del caso delle vibrazioni assiali, le figure sopra riportate rappresentano effettivamente la deformata dell'asse della trave in senso trasversale, ossia corrispondono a quella che sarebbe una "fotografia" scattata durante la vibrazione della trave

Moto flessionale libero stazionario della trave

Il più generale moto libero stazionario della trave vincolata con doppio appoggio alle estremità è rappresentato dalla combinazione lineare di tutti i moti elementari precedentemente ricavati:

$$w(x,t)=\sum_k w_k(x,t)=\sum_k \underbrace{B_k \sin\left(\tfrac{k\pi}{L}x\right)}_{\alpha_k(x)}\underbrace{\cos(\omega_k t+\phi_k)}_{\beta_k(t)}$$

In cui i coefficienti B_k e ϕ_k possono essere determinati imponendo le condizioni iniziali ossia il valore della posizione e della velocità di tutte le sezioni della trave nell'istante t=0:

$$w(x,0)=w_0(x)\ ;\ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_0=\dot{w}_0(x)$$

Conclusione

1. La vibrazione flessionale di una trave è descritta dall'equazione:

$$EJ_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

2. Nel caso di vincolo di tipo doppio appoggio (spostamenti bloccati, rotazioni libere alle due estremità) le frequenze proprie flessionali della trave sono date dalla formula:

$$\omega_k = \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ_y}{m}}$$

3. I corrispondenti modi di vibrare sono sinusoidi con lunghezza d'onda pari a un sottomultiplo intero della luce della trave