

DISPENSE DI:

**FONDAMENTI DI MECCANICA
APPLICATA ALLE MACCHINE**

Testo di riferimento

E. Funaioli ed altri “Meccanica applicata alle macchine” vol. 1 e 2 - Ed. Patron

Indice

1. INTRODUZIONE ALLA MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE.....	5
1.1. COPPIE CINEMATICHE - MECCANISMI	5
1.2. FORZE DI ATTRITO	10
1.2.1. Attrito di strisciamento fra superfici asciutte	10
1.3. COPPIE CINEMATICHE LUBRIFICATE	12
1.4. LUBRIFICAZIONE LIMITE	14
1.5. CONTATTO FRA SUPERFICI ASCIUTTE SOGGETTE A LOGORAMENTO	15
1.5.1. Coppia rotoidale di spinta (Perno di spinta)	15
1.5.2. Coppia prismatica (Pattino su superficie piana)	17
1.5.3. Ceppo – puleggia (tipico dei freni a ceppo e tamburo)	17
1.6. ATTRITO DI ROTOLAMENTO	20
1.7. LAVORI E RENDIMENTO	21
1.7.1. Meccanismi in serie ed in parallelo	22
1.7.2. Espressioni del rendimento	22
1.7.3. Moto retrogrado	23
1.7.4. Relazione fra η e η'	23
1.8. RENDIMENTO DEL PIANO INCLINATO	23
1.9. RENDIMENTO DELLA COPPIA ROTOIDALE	24
1.10. RENDIMENTO DELLA COPPIA PRISMATICA	25
1.11. RENDIMENTO DELLA COPPIA ELICOIDALE	26
1.12. CENNI ALLA TEORIA DELLA LUBRIFICAZIONE	29
1.12.1. Slitta cilindrica infinitamente lunga su superficie piana	31
2. I PROBLEMI DI STATICA	37
2.1. CORPO RIGIDO SOTTOPOSTO AD UNA FORZA O UN COPPIA	38
2.2. CORPO RIGIDO SOTTOPOSTO A DUE FORZE	39
2.3. CORPO RIGIDO SOTTOPOSTO A DUE FORZE E UN MOMENTO ESTERNO	39
2.4. CORPO RIGIDO SOTTOPOSTO A TRE FORZE	41
2.5. CORPO RIGIDO SOTTOPOSTO A TRE FORZE ED UN MOMENTO	43
2.6. CORPO RIGIDO SOTTOPOSTO QUATTRO FORZE	44
2.7. LA RUOTA NELLA LOCOMOZIONE	46
2.7.1. Ruota trascinata	46
2.7.2. Ruota trascinata	47
2.7.3. Ruota frenata	48
2.7.4. Esempio	49
2.7.5. Esercizio	50
3. CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE.....	53
3.1. CENTRI DI ISTANTANEA ROTAZIONE DI UN MANOVELLISMO DI SPINTA	53
3.2. CENTRI DI ISTANTANEA ROTAZIONE DEL QUADRILATERO ARTICOLATO	54
3.3. CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE DI DUE RUOTE DENTATE	55

4. SISTEMI ARTICOLATI	56
4.1. QUADRILATERO ARTICOLATO	56
4.1.1. Studio cinematico del quadrilatero articolato	57
4.1.2. Applicazioni del quadrilatero articolato	59
4.2. MANOVELLISMO DI SPINTA	60
4.2.1. Analisi cinematica- via grafica	60
4.2.2. Espressione analitica della velocità e dell'accelerazione del pistone	62
4.2.3. Esempi di applicazione del manovellismo di spinta	63
4.3. STATICA DEL QUADRILATERO ARTICOLATO E MANOVELLISMO DI SPINTA	64
5. MECCANISMI CON SAGOME E CAMME.....	66
5.1. SAGOMA E PUNTERIA	66
5.2. CAMMA E PUNTERIA	68
5.3. CAMMA E BILANCIERE	69
5.4. IMPUNTAMENTO DELLE CAMME	70
5.5. ESEMPI DI APPLICAZIONI DEI MECCANISMI CON LE CAMME	70
6. MECCANISMI CON ORGANI FLESSIBILI	72
6.1. GENERALITÀ	72
6.2. MODELLAZIONE DELLA NON PERFETTA FLESSIBILITÀ DELLE CINGHIE	73
6.3. MACCHINE PER SOLLEVAMENTO CARICHI: CARRUCOLA FISSA	74
6.4. MACCHINE PER SOLLEVAMENTO CARICHI: CARRUCOLA MOBILE	75
6.5. MACCHINE PER SOLLEVAMENTO CARICHI: PARANCHI	75
6.5.1. Paranchi a tiro invertito	76
6.5.2. Paranchi a tiro diretto	77
6.5.3. Paranco differenziale	78
6.5.4. Macchine per sollevamento carichi: altre applicazioni	81
6.6. PULEGGE COLLEGATE TRAMITE ORGANI FLESSIBILI	81
6.6.1. Equilibrio Statico	82
6.6.2. Trasmissioni con cinghie piane (archi di aderenza e scorrimento)	83
6.7. CALCOLO DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO EQUIVALENTE DELLE CINGHIE TRAPEZIE	84
6.8. RENDIMENTO DELLA TRASMISSIONE	84
7. RUOTE DENTATE	86
7.1. TRASMISSIONE DEL MOTO FRA ASSI PARALLELI	86
7.2. RUOTE DI FRIZIONE	87
7.3. PROFILI CONIUGATI	89
7.4. RUOTE DENTATE CILINDRICHE AD EVOLVENTE	92
7.5. CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DI UNA RUOTA DENTATA	93
7.6. CONTINUITÀ' DEL MOTO	96
7.7. CONDIZIONE DI NON INTERFERENZA TRA I PROFILI	98
7.8. DENTATURE CORRETTE	101
7.9. RUOTE DENTATE CILINDRICHE A DENTI ELICOIDALI	102
7.10. TRASMISSIONE DEL MOTO TRA ASSI INCIDENTI	106
7.11. RUOTE DENTATE: COSTRUZIONE E MATERIALI IMPIEGATI	108
7.12. SCELTA E VERIFICA DEI RUOTE DENATTE	109

8. ROTISMI	113
8.1. ROTISMI ORDINARI	113
8.2. ROTISMI EPICICLOIDALI	114
8.3. MOMENTI AGENTI SU UN ROTISMO.....	118
9. DINAMICA DELLE MACCHINE ALTERNATIVE	119
9.1. MASSE RIDOTTE DELLA BIELLA IN UN MANOVELLISMO	119
9.2. ENERGIA CINETICA DEL MANOVELLISMO	121
9.3. BILANCIAMENTO DELLE MACCHINE ALTERNATIVE MONOCILINDRICHE	124
9.4. FORZA ROTANTE	126
9.5. FORZE ALTERNE.....	127
9.6. BILANCIAMENTO DELLE MACCHINE ALTERNATIVE PLURICILINDRICHE	128
9.6.1. <i>Motore con 2 cilindri a 2 tempi</i>	131
9.6.2. <i>Motore con 2 cilindri a 4 tempi</i>	133
9.6.3. <i>Motore con 3 cilindri a 2 tempi</i>	135
9.6.4. <i>Motore con 4 cilindri a 2 tempi</i>	137
9.6.5. <i>Motore con 4 cilindri a 4 tempi</i>	139
10. DINAMICA DI SISTEMI LINEARI CON 1 GRADO DI LIBERTÀ.....	140
10.1. POSIZIONE DI EQUILIBRIO	141
10.2. EQUAZIONI DI MOTO NEI SISTEMI LINEARI	141
10.3. FORZE ELASTICHE	142
10.4. FORZE SMORZANTI: SMORZAMENTO VISCOSO.....	144
10.5. EQUAZIONI DI MOTO	145
10.5.1. <i>Comportamento libero di un sistema con 1 GdL con smorzamento viscoso</i>	145
10.6. MOTO LIBERO	147
10.6.1. <i>Parametri adimensionali</i>	149
10.6.2. <i>Decremento logaritmico</i>	151
10.7. MOTO FORZATO	153
10.7.1. <i>Moto forzato del sistema senza l'utilizzo dei numeri complessi</i>	154
10.7.2. <i>Moto forzato del sistema con i numeri complessi</i>	156
10.8. RICETTANZA	157
10.8.1. <i>Rappresentazione della ricettanza</i>	158
10.9. STRUMENTI SISMICI	160
10.10. ISOLAMENTO DALLE VIBRAZIONI E EFFICIENZA DELLE SOSPENSIONI	166

1. Introduzione alla Meccanica Applicata alle Macchine

Macchina: sistema di organi disposti in modo da compiere sotto l'azione di forze convenientemente applicate, lavoro di interesse industriale.

Macchine: (idrauliche, termiche, elettriche,...) utilizzano energie naturali trasformandole in lavoro meccanico.

Macchine operatrici: utilizzano il lavoro meccanico prodotto da una motrice per trasformarlo in lavoro industrialmente utile (macchine utensili, per lavorazioni varie, compressori,...).

La meccanica applicata alle macchine studia ciò che è comune alle varie categorie di macchine a prescindere dai caratteri specifici di ciascuna di esse.

Lo studio può essere fatto da un punto di vista puramente cinematico astruendo dalle forze che producono il movimento o da un punto di vista dinamico considerando il moto come effetto delle forze agenti sulla macchina. In molti casi il problema del moto è risolto con le equazioni della statica poiché sono nulle o trascurabili le forze di inerzia (studio statico di una macchina).

1.1. Coppie cinematiche - Meccanismi

Membri di una macchina: sono i vari corpi che la compongono; in generale sono costituiti da corpi solidi che spesso possono essere considerati rigidi, ma si usano anche membri elastici (molle,...) e flessibili (cinghie, funi,...). I vari membri sono collegati fra loro in modo che il movimento di ciascuno di essi dipende dal movimento degli altri. Questa dipendenza è dovuta alla forma geometrica delle superfici con le quali vengono a contatto i singoli membri.

Elemento cinematico porzione di una superficie con la quale un membro viene a contatto con un altro.

Coppia cinematica insieme di due elementi cinematici, appartenenti a membri diversi, fra loro in contatto.

Coppie indipendenti coppie che permettono un movimento relativo ad un solo grado di libertà.

Coppie combacianti coppie in contatto attraverso porzioni di superfici di area finita.

Sono possibili 3 soli tipi di coppie indipendenti e combacianti (dette coppie elementari):

- 1) Coppia prismatica: moto di traslazione (es: cilindro + pistone)
- 2) Coppia rotoidale: moto di rotazione (es: cerniera)
- 3) Coppia elicoidale: moto elicoidale (es: vite + madrevite)

Uno dei due elementi della coppia può essere costituito anche da un corpo che non può essere considerato rigido (ad es. una cinghia); la coppia cinematica si dice in questo caso non rigida. In alcune coppie cinematiche il moto permesso è assicurato soltanto dalla forma geometrica degli elementi che costituiscono la coppia (accoppiamento di forma); in altre il moto voluto ha soltanto le forze che gli elementi cinematici si trasmettono e che hanno forza tale da mantenere in contatto gli elementi stessi (accoppiamento di forza). Le ruote dentate costituiscono un esempio tipico di coppia cinematica rigida non combaciante con accoppiamento di forza.

Una recente classificazione le distingue in coppie inferiori¹, ossia rigide e combacianti, e coppie superiori. Si veda la Tabella 1 a riguardo.

¹ Alcuni autori chiamano coppie elementari quelle che qui sono chiamate inferiori (vd. *Lezioni di Meccanica Applicata alle macchine*, Funaioli et al.)

<u>Gradi di libertà</u>	<u>Denominazione coppia</u>	<u>Movimenti permessi</u>			<u>Descrizione della coppia</u>
		<u>Rotazioni</u>	<u>traslazioni</u>	<u>elicoidali</u>	
1	R (inf.) P (inf.) E (inf.)	1	1	1	Coppia rotoidale Coppia prismatica Coppia elicoidale
2	R _r C (inf.) C _s R _e	2 1 1 1	1 1	1	Corpo di rivoluzione in guida torica Coppia cilindrica Cilindro entro scanalatura Corpo di rivoluzione in guida elicoidale
3	S (inf.) S _A S _L P _r (inf)	3 2 2 1	1 2	1	Sfera entro sede sferica Sfera con perno in sede cilindrica con scanalatura C.s. con scanalatura elicoidale Piano su piano
4	S _c S _e C _c	3 3 2	1 2	1	Sfera in guida cilindrica Sfera in guida elicoidale Cilindro su piano
5	S _s	3	2		Sfera su piano

Tabella 1: *Principali tipi di coppie cinematiche*

Fra le coppie superiori si comprendono in generale anche quelle rigide e non rigide non combacianti con accoppiamento di forza.

Un sistema di membri collegati fra loro da coppie cinematiche costituisce una catena cinematica.

La catena si dice semplice se tutti i membri hanno una o due coppie cinematiche; si dice composta se almeno un membro possiede tre o più coppie cinematiche.

La catena è chiusa se ogni membro ha più di una coppia cinematica; è aperta in caso contrario.

Una catena cinematica in cui un membro è considerato fisso costituisce un meccanismo; il membro fisso si dice telaio.

Un meccanismo costituisce una macchina o una parte di essa che scambia lavoro meccanico con l'esterno; in altri termini sul meccanismo agiscono delle forze esterne che cedono lavoro al sistema oppure assorbono lavoro da esso. I membri sui quali agiscono le forze che cedono lavoro al sistema si dicono moventi ed il corrispondente lavoro si dice motore, mentre i membri ai quali sono applicate forze che assorbono lavoro dal sistema, si dicono cedenti ed il relativo lavoro si dice resistente. Le corrispondenti forze si denominano motrici e resistenti.

I membri di una macchina possono spesso essere considerati corpi rigidi e quindi il loro moto può essere studiato con le equazioni cardinali della dinamica del corpo rigido:

$$\begin{cases} \vec{R}^e = \dot{\vec{Q}} = M\vec{a}_G \\ \vec{M}_C^e = \dot{\vec{K}}_C = \Gamma_C(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \wedge \Gamma_C(\vec{\omega}) \end{cases} \quad (C \triangleq \begin{cases} \text{centro di massa} \\ \text{oppure} \\ \text{punto solidale fisso} \end{cases})$$

L'applicazione lineare $\Gamma_O: V \rightarrow V$ è detta **omografia di inerzia rispetto al polo O** , e la matrice associata a tale applicazione, rispetto ad una base ortonormale $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ dello spazio dei vettori liberi V , è il noto **tensore di inerzia (relativo al polo O ed espresso in base B)**, e si indica con I_O^B .

Sia $\{O, x, y, z\}$ il riferimento cartesiano, ottenuto applicando la base $\mathbf{B}$ in $\mathbf{O}$:

$$\mathbf{I}_O^B = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} I_{xx} &= \int_{Volume} (y^2 + z^2) \rho dV; & I_{xy} &= \int_{Volume} (xy) \rho dV; \\ I_{yy} &= \int_{Volume} (x^2 + z^2) \rho dV; & I_{xz} &= \int_{Volume} (xz) \rho dV; \\ I_{zz} &= \int_{Volume} (x^2 + y^2) \rho dV; & I_{yz} &= \int_{Volume} (yz) \rho dV; \end{aligned}$$

Occorre però conoscere tutte le forze applicate al rigido e quindi anche le forze che un membro trasmette ad un altro attraverso gli elementi della coppia cinematica che li collega; tra queste, particolare importanza ai fini del funzionamento della macchina, hanno le forze di attrito, che sono difficilmente valutabili con esattezza. Si ricordi che due sistemi di forze S_1 ed S_2 si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso risultante e lo stesso momento risultante (ovviamente fissato un unico polo per il calcolo del momento). Guardando le equazioni cardinali della dinamica del corpo rigido, si vede che se due sistemi di forze agenti su un rigido sono equivalenti, sono anche **dinamicamente equivalenti** (ossia sostituibili ai fini del moto). Ciò non è vero in generale per un corpo deformabile.

Se invece del passaggio: date le forze $\Rightarrow$ si trovi il moto, si vuole il passaggio: imposto il moto $\Rightarrow$ trovare le forze, si possono utilizzare i procedimenti grafici e/o analitici della statica, con l'artificio di aggiungere alle forze "vere" (o più correttamente "d'interazione"), delle forze fittizie, dette **forze d'inerzia**, che sono note poiché immediatamente calcolabili una volta imposto il moto!. Per ogni punto materiale di massa m che viaggia con accelerazione $\vec{a}$ si definisce forza d'inerzia $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$.

Per un corpo rigido si trova:

$$\begin{cases} \vec{R}^{in} = -\dot{\vec{Q}} = -M\vec{a}_G \\ \vec{M}_C^{in} = -\dot{\vec{K}}_C = -\{\Gamma_C(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \wedge \Gamma_C(\vec{\omega})\} \end{cases}$$

E dunque le equazioni cardinali della dinamica si possono scrivere nella forma:

$$\begin{cases} \vec{R}^{in} + \vec{R}^e = \vec{0} \\ \vec{M}_C^{in} + \vec{M}_C^e = \vec{0} \end{cases}$$

formalmente analoga alle equazioni della statica! (Si parla di *equilibrio dinamico*).

ATTENZIONE: l'equilibrio dinamico vale per ogni sistema meccanico (non solo rigido), ossia **in ogni sistema meccanico l'insieme di forze costituito dalle forze d'interazione esterne e le forze d'inerzia che si sviluppano per effetto del moto deve risultare un insieme equilibrato.**

*Se in un meccanismo, ad un certo istante, sono assegnate le accelerazioni, è dunque possibile condurre un'analisi di equilibrio, come se la configurazione attuale fosse di equilibrio statico, avendo cura di applicare su di ogni membro **rigido** una forza fittizia $-M\vec{a}_G$ (applicata nel suo centro di massa G) ed una coppia di momento $-\{\Gamma_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \wedge \Gamma_G(\vec{\omega})\}$. Queste forze fittizie si potranno considerare "normali" forze esterne (al membro, così come alla macchina) a prescindere dalla loro origine dinamica. Nel caso di rigidi piani che si muovono di moto piano, le forze di inerzia equivalgono a $-M\vec{a}_G$ applicato in G ed una coppia $-I_g \dot{\vec{\omega}}$, dove I_g è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse baricentrico parallelo ad $\vec{\omega}$.*

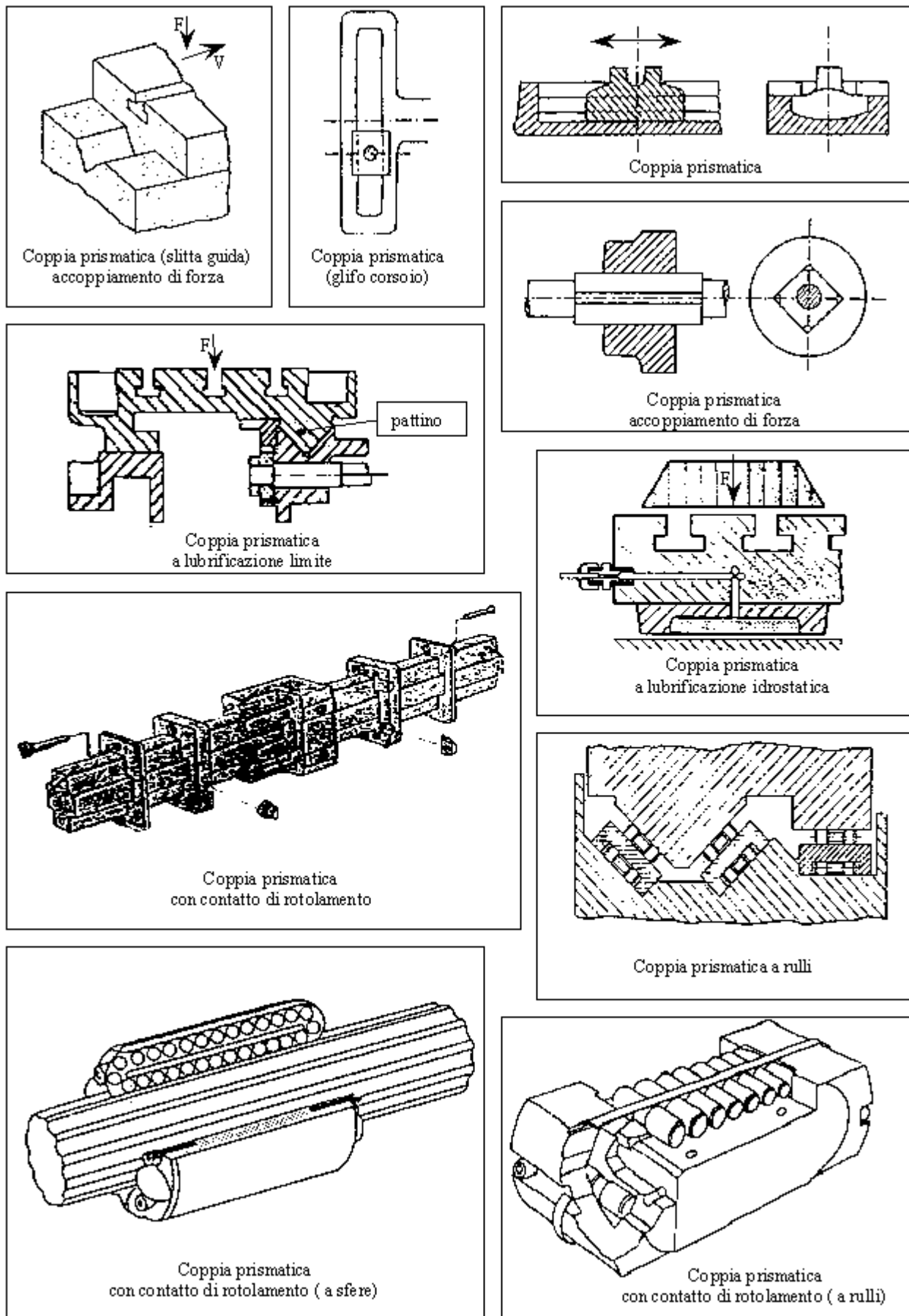


Figura 1: Coppie prismatiche

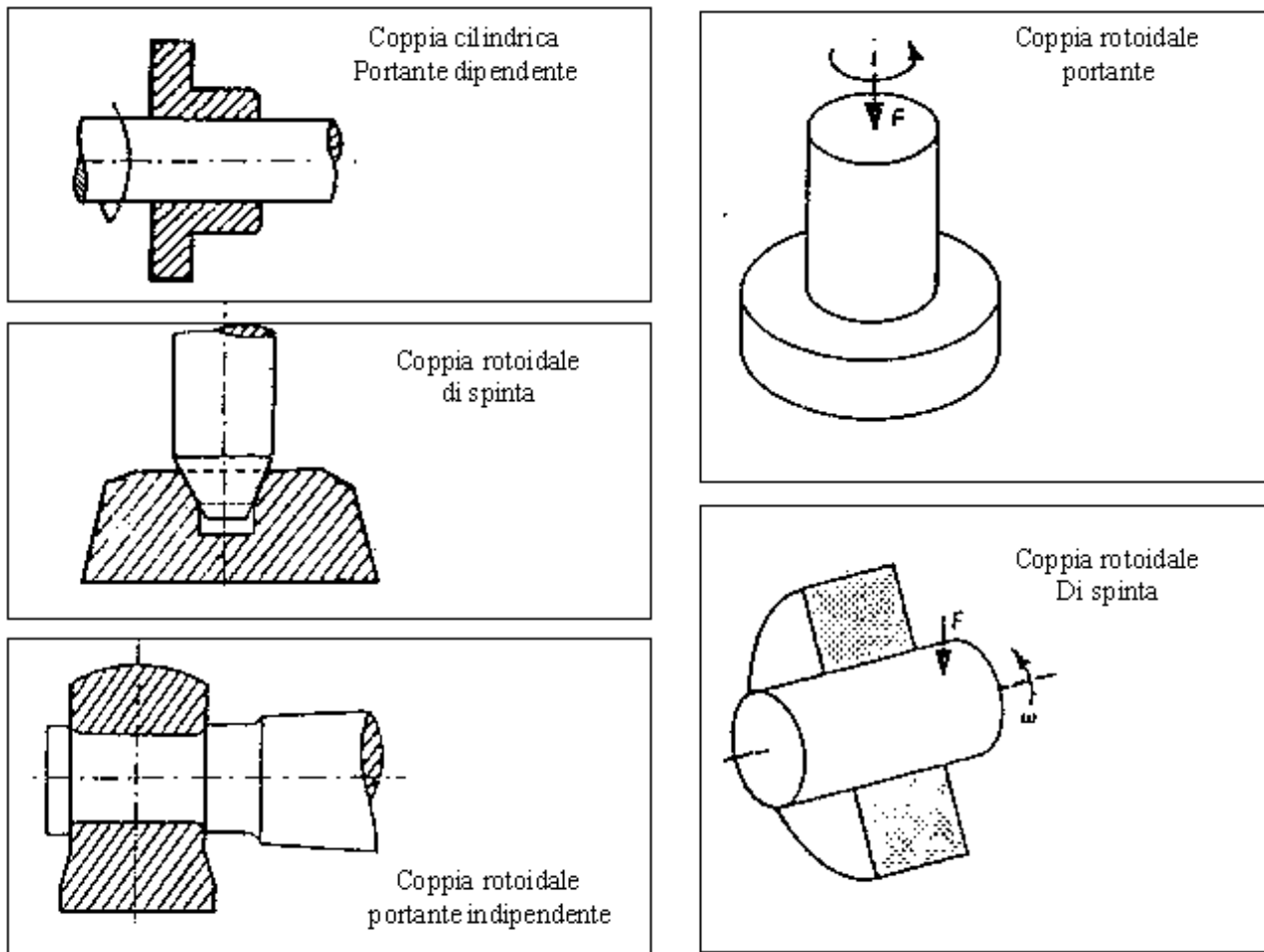


Figura 2: Coppie rotoidali

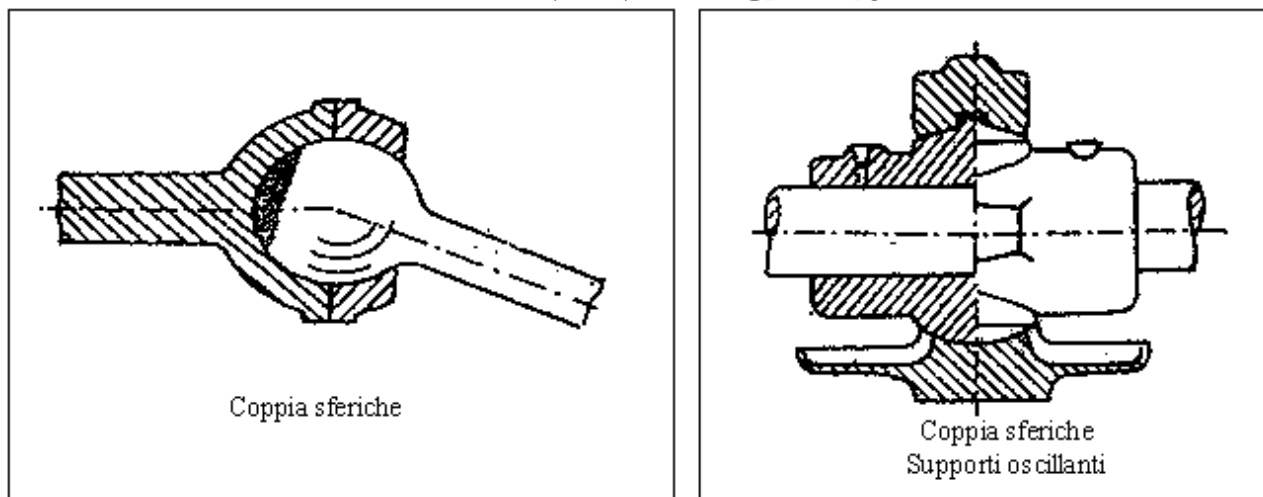


Figura 3: Coppie sferiche

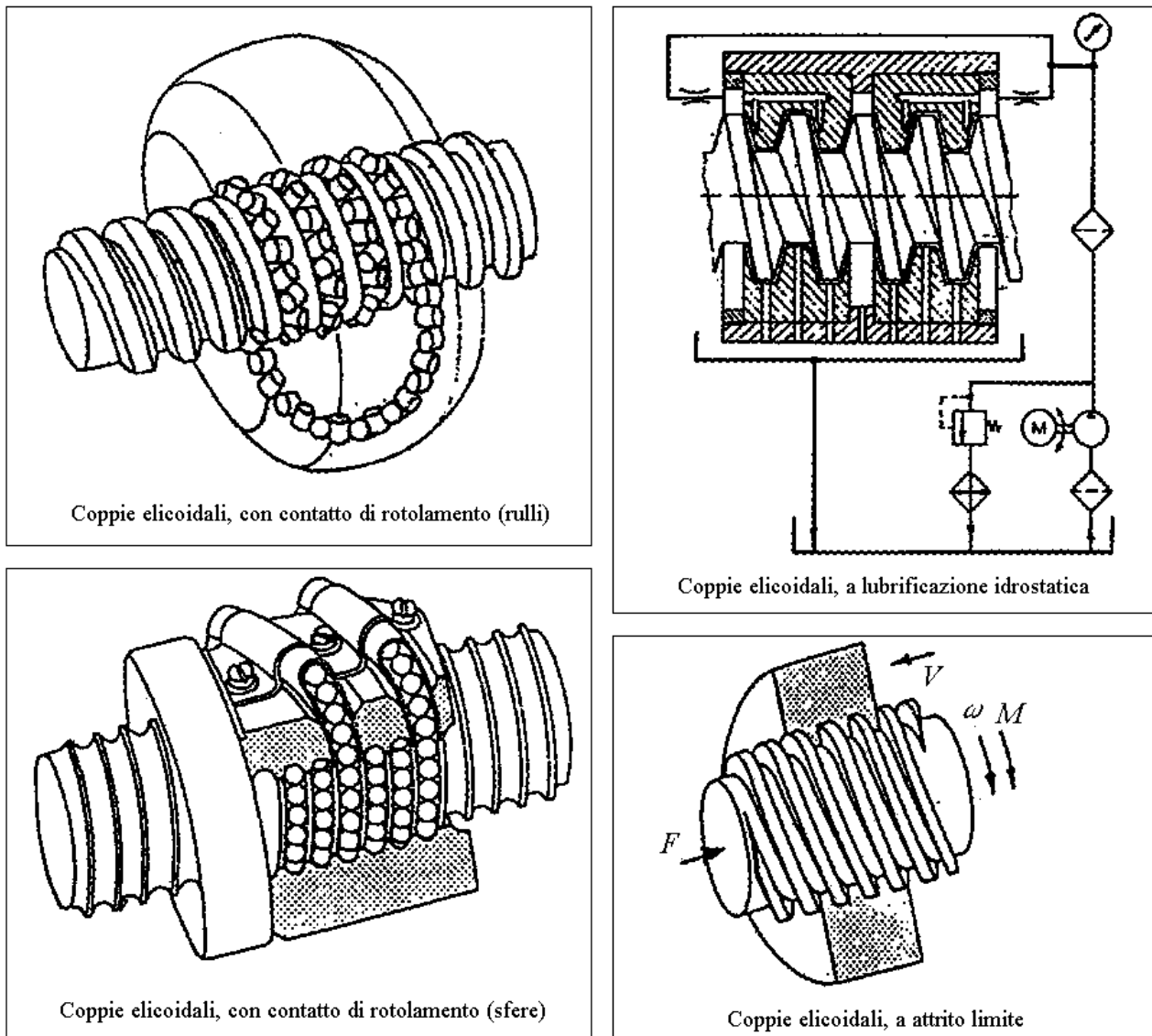


Figura 4: Coppie elicoidali

1.2. Forze di attrito

- 1) Attrito di strisciamento fra superfici asciutte
- 2) Coppie cinematiche lubrificate
- 3) Lubrificazione limite
- 4) Contatto fra superfici asciutte soggette a logoramento
 - a) Perno di spinta
 - b) Pattino su superficie piatta
 - c) Ceppo – puleggia
- 5) Attrito di rotolamento
- 6) Lavori e rendimenti

1.2.1. Attrito di strisciamento fra superfici asciutte

A stretto rigore due superfici si dicono asciutte quando tra gli atomi e le molecole appartenenti alle superfici in contatto non sono interposte molecole o atomi di altre sostanze; tali condizioni non sono mai verificate in pratica nelle macchine.

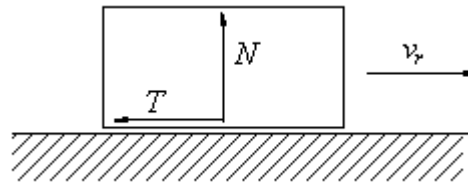


Figura 5: Attrito di strisciamento di un grave su un piano

Consideriamo un corpo traslante a velocità relativa v_r su un supporto: sia N la componente normale della reazione vincolare, mentre T sia la componente tangenziale, dovuta all'attrito.

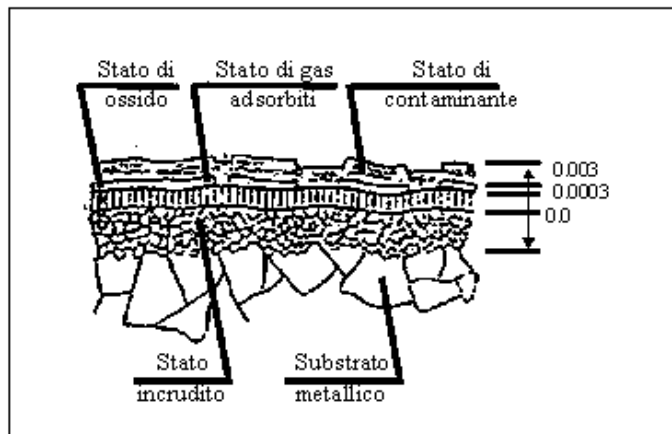
Definiamo **coefficiente d'attrito (radente)**: $f = T/N$.

Legge di Coulomb: f dipende dalla natura dei materiali a contatto, dalle loro condizioni superficiali ed, al più, dalla velocità relativa di strisciamento.

Se $v_r \neq 0$ si parla di attrito cinetico ed f è noto a priori di considerazioni di equilibrio, tramite tabelle facilmente reperibili.

Se $v_r = 0$, si parla di attrito statico o aderenza, f può assumere qualsiasi valore compreso tra 0 ed f_a (coefficiente d'attrito statico o di aderenza), ed il suo valore non può che essere conosciuto a posteriori di considerazioni di equilibrio (ovviamente condotte con l'ipotesi di assenza di strisciamento).

Posto $\varphi = \arctan f$, è immediato constatare che questo è l'angolo del quale ruota la reazione vincolare reale, rispetto alla direzione ideale (ossia normale alla superficie di contatto).



-1° strato facilmente asportabile.

-2° e 3° strato difficilmente asportabile

Figura 6: Esempio di analisi cristallografica di una materiale

- Per 3 strati f dell'ordine di $0.1 \div 0.3$
- Per 2 strati f dell'ordine di $0.3 \div 0.6$ (metalli diversi)
- Per 2 strati f dell'ordine di $0.8 \div 2.0$ (metalli uguali o che formano facilmente soluzioni solide)

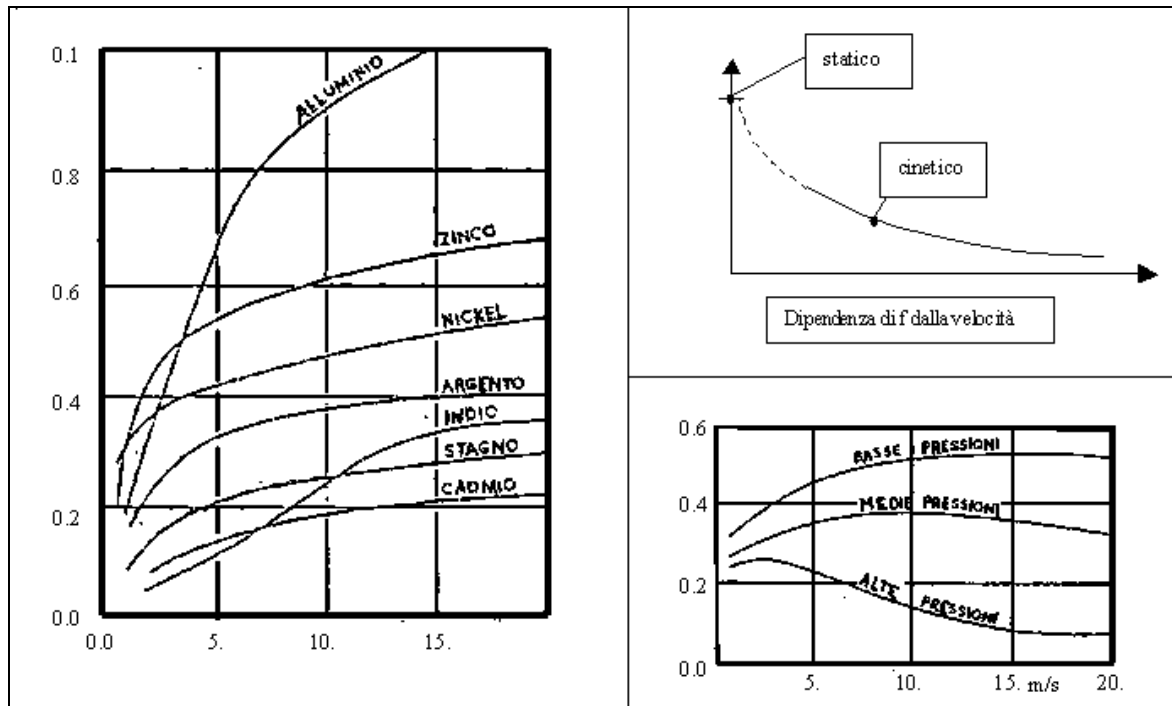


Figura 7: Dipendenza di f dalla pressione e velocità

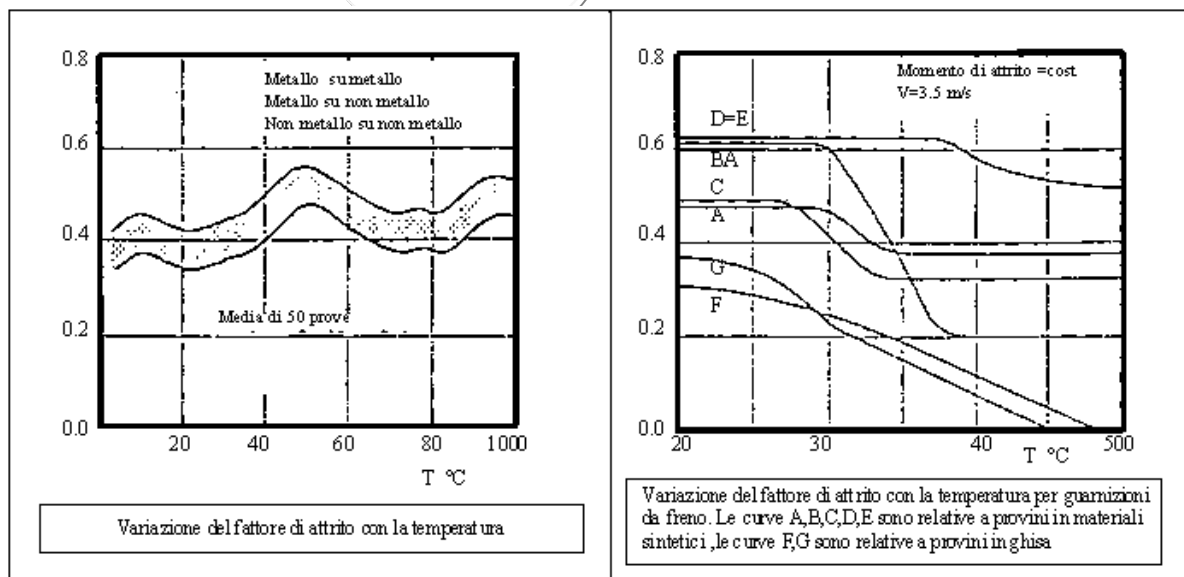


Figura 8: Dipendenza di f dalla temperatura

1.3. Coppie cinematiche lubrificate

Quando fra gli elementi cinematici di una coppia viene di proposito interposto un fluido di adeguate caratteristiche, la coppia si dice lubrificata e con il termine lubrificazione si indica la disciplina che studia i fenomeni che avvengono nelle coppie lubrificate.

Se gli elementi della coppia sono separati da uno strato continuo di lubrificante il cui spessore, pur piccolo in senso assoluto, è notevolmente maggiore della rugosità superficiale degli elementi stessi la lubrificazione si dice idrodinamica. Il carico che la coppia può sopportare è dovuto al campo di pressione che si instaura all'interno del lubrificante; la pressione tuttavia non è così grande (in genere minore di 5MPa) da provocare sensibili deformazioni delle superfici che delimitano il lubrificante.

Le perdite sono in questo caso in diretta dipendenza con le proprietà del fluido e in particolare con la sua viscosità. Quando il campo di sovrappressione nasce in conseguenza del moto relativo degli elementi cinematici della coppia, si parla di lubrificazione naturale, se invece esso è ottenuto alimentando il volume ripieno di lubrificante (meato) con un fluido messo in pressione con mezzi esterni (pompa di alimentazione) si parla di lubrificazione idrostatica o forzata. In questo secondo caso il moto relativo degli elementi cinematici può anche essere nullo o avvenire con velocità molto bassa. Nelle coppie cinematiche correttamente lubrificate, l'usura degli elementi cinematici è pressoché nulla.

La lubrificazione si dice elastoidrodinamica quando le deformazioni degli elementi cinematici, rispetto alle dimensioni del meato, sono sensibili. Essa interessa principalmente le coppie superiori (ruote dentate, camme, etc.) e si può a sua volta distinguere in elastoidrodinamica rigida (hard) e soffice (soft) rispettivamente quando gli elementi cinematici sono costituiti da materiale con modulo di elasticità molto elevato o viceversa.

La prima eventualità si manifesta ad esempio negli ingranaggi e nelle camme: lo spessore minimo del metallo è dell'ordine di $0,1 \mu m$ e la pressione varia da 0,5 a 3 GPa, in queste condizioni la variazione di viscosità con la pressione non può essere trascurata.

Il secondo caso si presenta essenzialmente nelle tenute quando sono presenti guarnizioni in elastomero e nelle coppie per protesi artificiali; lo spessore minimo del meato è di circa $1 \mu m$ ed i valori massimi di pressione dell'ordine di 1 MPa. Le variazioni del coefficiente di viscosità con la posizione sono di nuovo trascurabili.

Sostanzialmente il problema elastoidrodinamico differisce da quello idrodinamico perché la forma del meato non è nota a priori, ma dipende dal campo di pressione. Per qualche cenno alla teoria della lubrificazione, si veda l'appendice a questa sezione.

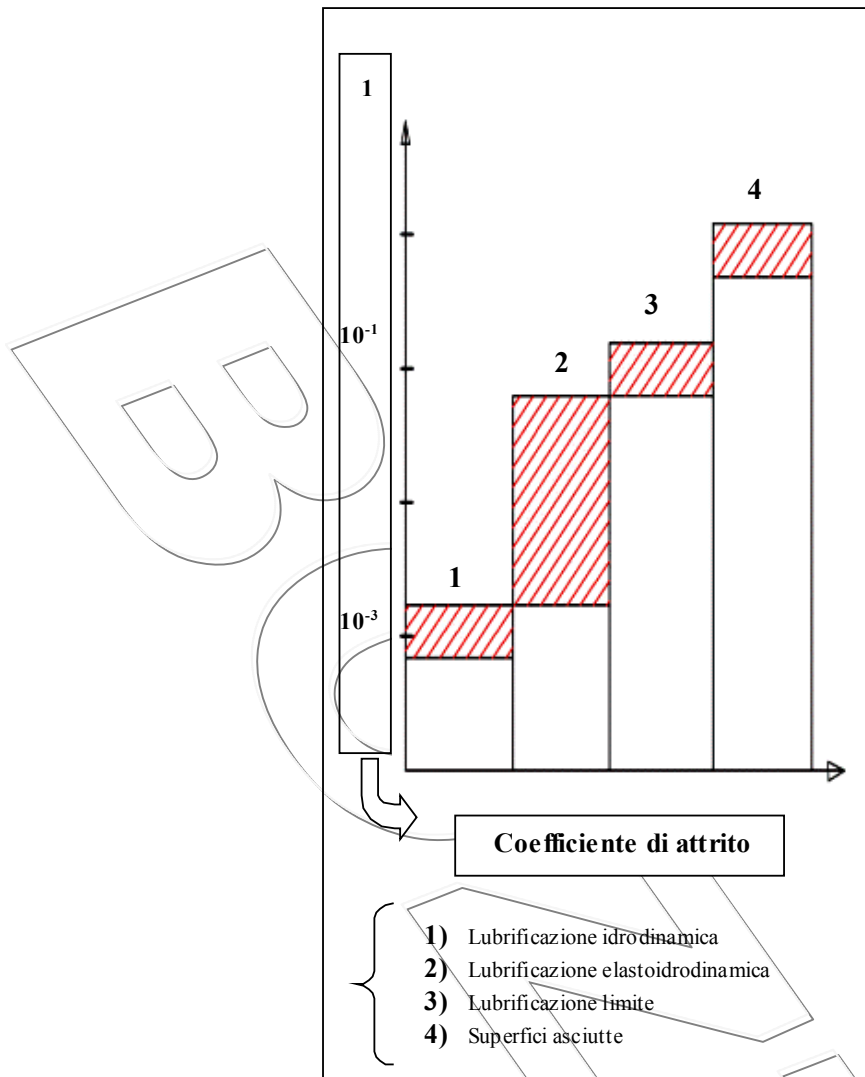


Figura 9: Valori medi del coefficiente di attrito in scala logaritmica per varie condizioni di lubrificazione

1.4. Lubrificazione limite

Il lubrificante se di spessore molto sottile (centesimi di μm) non impedisce il contatto fra le asperità, ma riduce la microgiunzione, provocando quindi una riduzione di f . Questa azione è tanto più sensibile quanto più il lubrificante tende ad aderire alla superficie. L'aderenza è molto aumentata se le molecole sono polarizzate; si formano così strati molecolari (epilamine) con grandissime resistenze allo schiacciamento e minime allo scorrimento. Le sostanze che formano epilamine hanno tuttavia spesso la caratteristica di ossidarsi alle alte temperature. Non possono quindi sostituire gli olii normali ma devono essere miscelate con esse (olii additivati).

Fra queste sostanze si ricordano:

- acidi grassi che hanno molecole polari ma si dissociano alle alte temperature;
- composti di P, S, Cl che formano epilamine per reazione chimica con la superficie metallica (composti E.P.) efficaci solo ad alte temperature

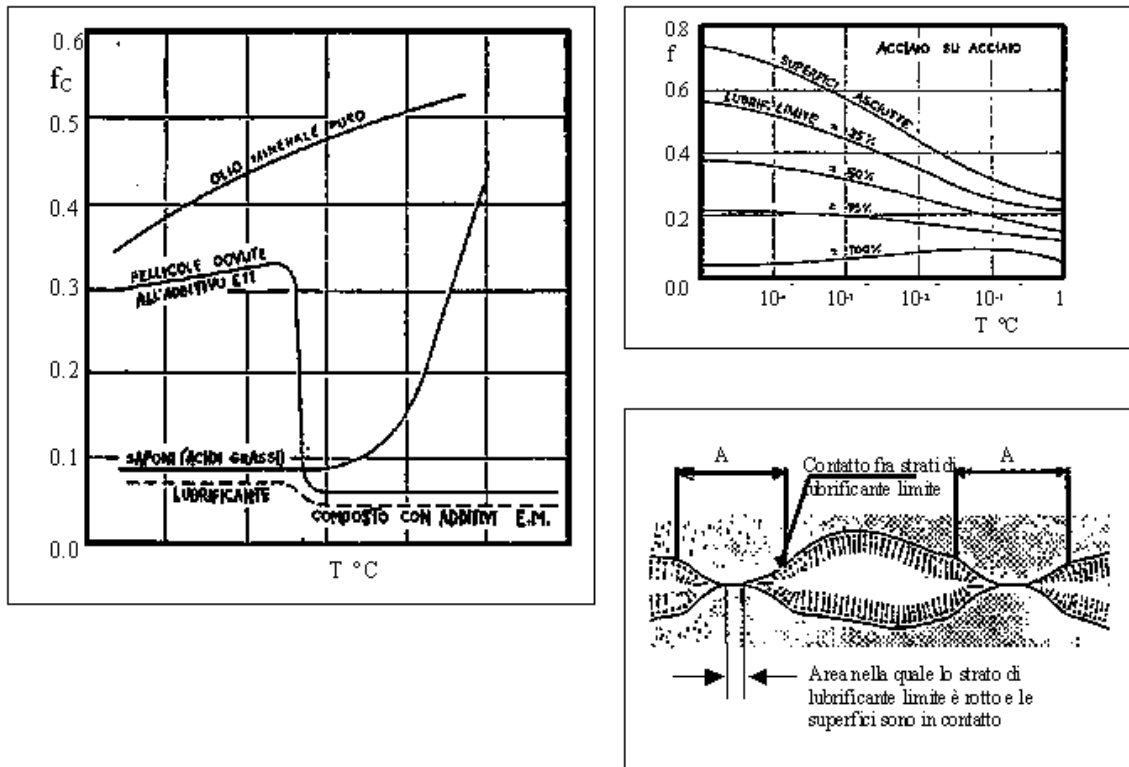


Figura 10: Schema di lubrificazione limite

1.5. Contatto fra superfici asciutte soggette a logoramento

Conseguenza dell'attrito fra superfici asciutte è il logoramento, che produce in genere una maggiore levigatezza delle superfici e quindi una riduzione di f (rodaggio).

Quando interessa che uno dei due elementi mantenga invariata la propria forma si costruisce l'altro elemento di un materiale assai meno duro del primo (freni).

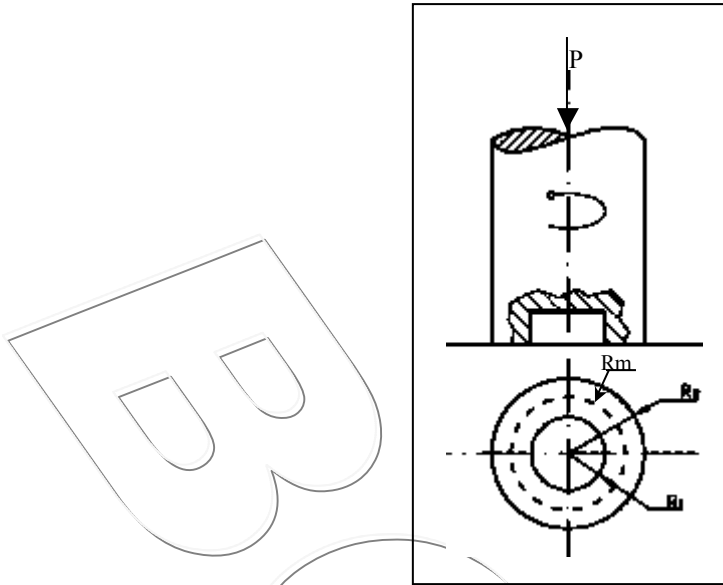
Ipotesi di Reye : “Il volume di materiale asportato sull'elemento cinematico è proporzionale al lavoro compiuto dalle forze d'attrito agenti sulle stesso elemento cinematico”.

Questa ipotesi è utilizzata per determinare la distribuzione della pressione nella superficie di contatto, una volta prevista l'usura².

1.5.1. Coppia rotoidale di spinta (Perno di spinta)

Si assume il solo perno usurato. Coerentemente a quanto affermato nella nota 2, l'elemento cinematico del membro logorato sarà sempre piano, e dunque il materiale asportato avrà sempre altezza uniforme.

² Lo strato usurato viene assunto tale che, anche durante il logoramento, la coppia mantenga un contatto della stessa natura!!



f = coefficiente di attrito (il contatto è a secco)

r = raggio

p = pressione di contatto, assunta per simmetria dipendente da r solamente

α = rotazione

h = spessore parte usurata in una rotazione relativa α

$2\pi r dr h$ = volume di materiale asportato sulla corona circolare di raggio r

Dall'ipotesi del Reye applicata sulla corona : $fp 2\pi r^2 dr \alpha \equiv 2\pi r dr h$

$p \equiv \frac{1}{r} = \frac{c}{r}$ = pressione (inversamente proporzionale al raggio, andamento iperbolico)

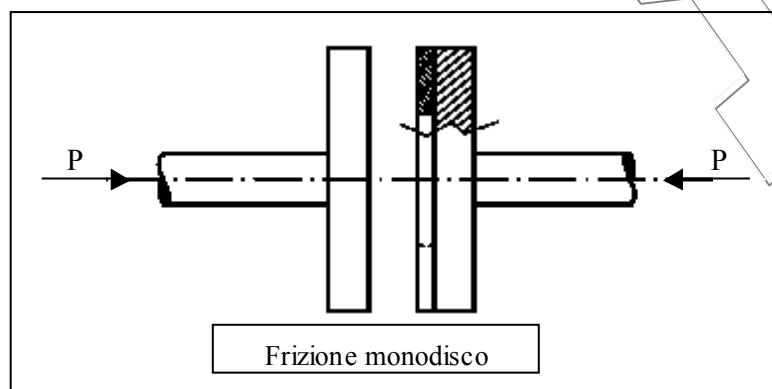
c = costante da calcolare

Dall'equilibrio alla traslazione verticale è possibile calcolare il valore di questa costante. Ciò fatto, applicando l'eq. di equilibrio alla rotazione, si calcola il valore della coppia necessaria a mantenere in rotazione in moto uniforme il perno.

$$\text{eq. traslazione verticale : } P = \int_{R_1}^{R_2} p 2\pi r dr = 2\pi c \int_{R_1}^{R_2} dr \Rightarrow c = \frac{P}{2\pi(R_2 - R_1)} \Rightarrow p(r) = \frac{P}{2\pi(R_2 - R_1)} \frac{1}{r}$$

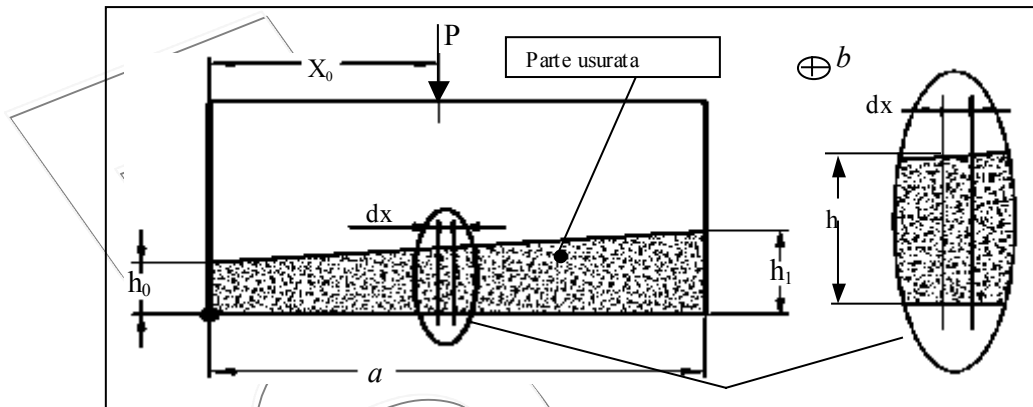
$$\text{eq. rotazione : } M_a = \int_{R_1}^{R_2} f p 2\pi r^2 dr = 2\pi f c \int_{R_1}^{R_2} r dr = \pi f c (R_2^2 - R_1^2) \Rightarrow M_a = f P \frac{R_1 + R_2}{2} = f P R_{\text{medio}}$$

Gli stessi risultati valgono pure nel caso di un innesto a frizione monodisco.



1.5.2. Coppia prismatica (Pattino su superficie piana)

Il pattino trasla sul piano ed ha dimensione a nella direzione di traslazione (lunghezza) e dimensione b (profondità) nella direzione ortogonale. Sia x la coordinata longitudinale fissata sul pattino.



Coerentemente alla nota 2 il profilo d'usura ha andamento lineare:

$$h = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{a} x = h_0 \left(1 + m \frac{x}{a} \right) \quad \text{con } m = \frac{h_1 - h_0}{h_0} \quad \text{ed } x \in [0, a]$$

Assunta la p funzione della sola coordinata x , utilizziamo l'ipotesi di Reye su di una porzione rettangolare di contatto, a coordinata x , e di area infinitesima $b \cdot dx$, avendo supposto una traslazione relativa X .

$$(b dx f p(x) X \equiv h(x) dx b) \Rightarrow p(x) \equiv h(x) \Rightarrow p(x) = \underbrace{c_1}_{c_1} h_0 \left(1 + m \frac{x}{a} \right)$$

come al solito la costante c_1 viene determinata imponendo alla distribuzione di pressione di equilibrare la forza P che preme i due corpi.

Eq. in dir. normale al piano d'appoggio:

$$\left[\begin{aligned} P &= \int_0^a b p(x) dx = c_1 b \int_0^a \left(1 + m \frac{x}{a} \right) dx = c_1 b \left(a + m \frac{a}{2} \right) \\ c_1 &= \frac{P}{ab \left(1 + \frac{m}{2} \right)} \Rightarrow p(x) = \frac{P}{ab \left(1 + \frac{m}{2} \right)} \left(1 + m \frac{x}{a} \right) \end{aligned} \right]$$

Eq. dei momenti:

$$P x_0 = \int_0^a b p(x) x dx = b c_1 \int_0^a \left(x + m \frac{x^2}{a} \right) dx = b c_1 \left(\frac{a^2}{2} + m \frac{a^2}{3} \right) \Rightarrow x_0 = a \frac{1 + \frac{2}{3} m}{2 + m}$$

Dunque fissata la forza P , è fissata la distribuzione di pressione; fissata la distanza x_0 , è fissato m e dunque il rapporto h_1 / h_0 .

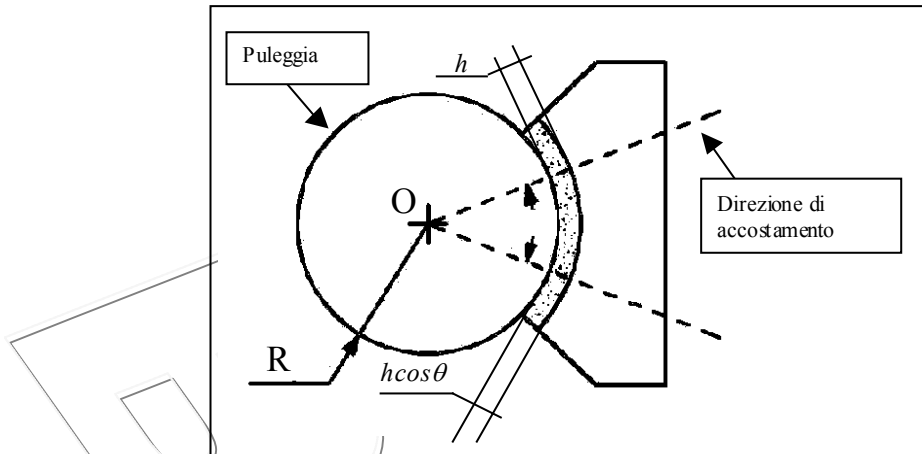
N.B.: x_0 deve essere in $[a/3, 2a/3]$, altrimenti la pressione si mantiene positiva soltanto su una porzione della superficie (si ha, cioè, una riduzione della superficie di contatto).

È infine possibile calcolare la forza necessaria a mantenere in moto uniforme il pattino:

Eq. traslazione in direzione x : $T = \int_0^a f p dx = f P$

1.5.3. Ceppo – puleggia (tipico dei freni a ceppo e tamburo)

Il ceppo si accosta al tamburo, traslando in una direzione detta **direzione di accostamento** di una quantità h permessa dall'usura del ceppo stesso.

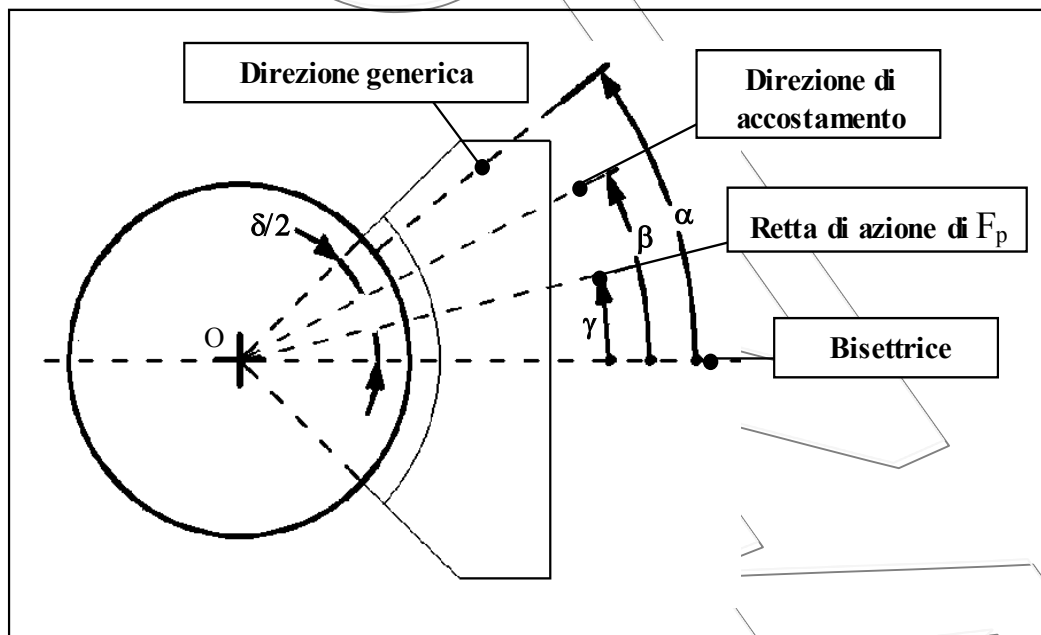


L'altezza dello strato usurato in posizione angolare ϑ , (riferita alla direzione di accostamento), vale $h \cos \vartheta$. Si assume una profondità unitaria.

Il volume del materiale asportato in corrispondenza di un elemento $Rd\theta$, individuato dalla posizione ϑ , dopo una rotazione relativa Ω , è $Rd\vartheta h \cos \vartheta$; per l'ipotesi di Reye si ha :

$$\underbrace{Rd\vartheta h \cos \vartheta}_{\text{volume di materiale asportato in rotazione relativa } \Omega} \equiv \underbrace{fp(\vartheta)Rd\vartheta R\Omega}_{\text{lavoro delle forze di attrito}} \Rightarrow p(\vartheta) \equiv \cos \vartheta \Rightarrow \mathbf{p(\vartheta) = c \cos \vartheta}$$

La direzione di accostamento non coincide in generale con la direzione della risultante F_p delle azioni radiali p , né con l'asse di simmetria del ceppo.



Quest'ultimo è preso come origine della coordinata angolare α .

Si vuole calcolare γ , ossia l'angolo che individua la direzione della risultante delle azioni di pressione. Per farlo basta osservare che γ individua tale direzione se e solo se proiettando tutte le azioni di pressione in direzione ortogonale a quest'ultima, si ottiene un valore nullo. In formule:

$$\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} p \sin(\alpha - \gamma) R d\alpha = cR \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \cos(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \gamma) d\alpha = 0 \Rightarrow \mathbf{tg \gamma = tg \beta \frac{\delta - \sin \delta}{\delta + \sin \delta}} \quad (A)$$

(dunque la direzione delle azioni di pressione è fissata una volta fissato l'angolo d'abbracciamento e la direzione di accostamento).

D'altra parte, proiettando tutte le azioni di pressione sulla retta di angolo γ , si deve trovare il valore della risultante F_p :

$$F_p = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} p \cos(\alpha - \gamma) R d\alpha = \dots = \frac{1}{2} c R [\delta \cos(\beta - \gamma) + \sin \delta \cos(\beta + \gamma)] \quad (B).$$

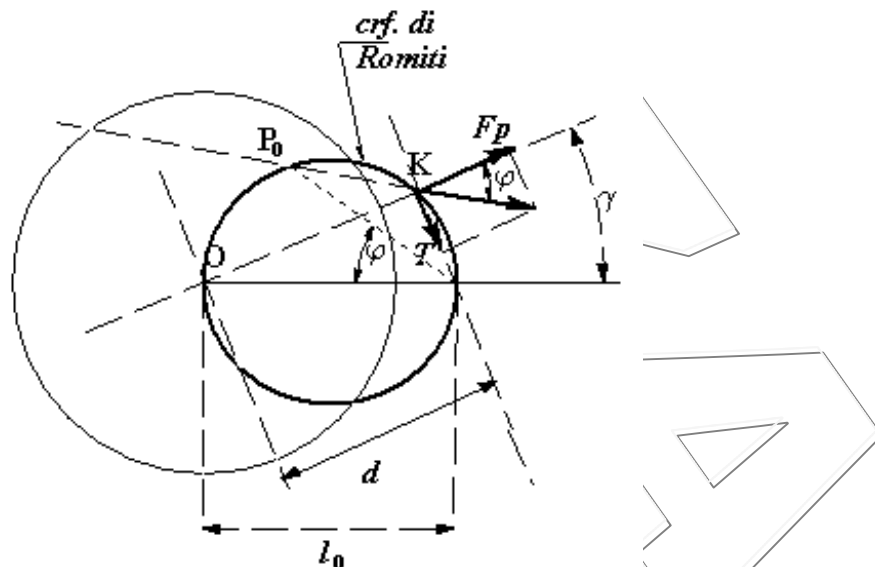
Dunque le azioni di pressione $p(\vartheta) = c \cos \vartheta$ equivalgono ad una forza diretta secondo l'angolo γ individuato tramite la relazione (A), e di modulo determinato dalla relazione (B).

Analogamente a quanto succedeva negli esempi precedenti, da considerazioni di equilibrio si può ricavare questa forza ed utilizzare la relazione (B) per trovare la costante c , e dunque la distribuzione di pressione.

Calcoliamo la forza equivalente alle azioni d'attrito: è evidente che la loro risultante varrà $T = f F_p$ e sarà diretta ortogonalmente alla direzione individuata dall'angolo γ ; inoltre sarà applicata ad una distanza d da O tale che:

$$\underbrace{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} f p(\vartheta) R^2 d\vartheta}_{\text{momento frenante } M_f} = T d = f F_p d \Rightarrow d = R \frac{4 \sin(\frac{\delta}{2})}{\delta + \sin \delta} \cos \gamma$$

Si indichi con K la intersezione delle rette d'azione di T ed F_p : è immediato notare che al variare di γ , tale punto descrive una crf. di diametro $l_0 = 4R \sin(\delta/2)/(\delta + \sin \delta)$ giacente sull'asse di simmetria del ceppo, passante per O. Tale crf. è detta "del Romiti" o "ausiliaria" ed è tracciabile non appena si conoscano le caratteristiche geometriche della coppia. Si noti che al variare di γ (ossia al variare della posizione di K sulla crf.), la risultante delle azioni normali e tangenziali di scambio passa sempre per un punto P_0 appartenente alla crf. ausiliaria: infatti l'angolo alla circonferenza OKP_0 è invariante, valendo $\varphi = \arctan f$, dunque non varia la lunghezza dell'arco sotteso OP_0 , ossia la posizione di P_0 .



Noto φ , possiamo localizzare P_0 (evidentemente rimane la indeterminazione su quale semipiano contenga P_0 , ma il problema è facilmente aggirabile sfruttando la conoscenza del senso di rotazione della puleggia).

Infine preme sottolineare che la direzione di accostamento è determinata dalla coppia con cui il ceppo è vincolato al telaio.

- A) coppia prismatica: la direzione d'accostamento è determinata dalla direzione della traslazione permessa.

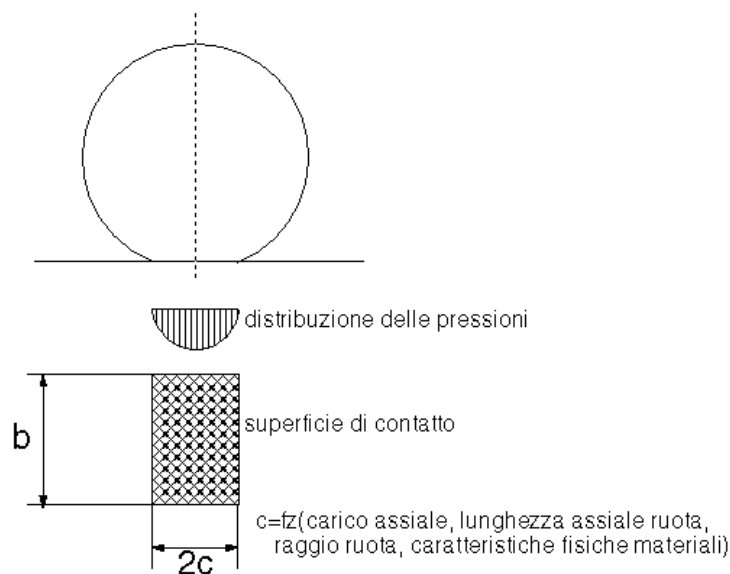
B) coppia rotoidale: ogni atto di moto del ceppo si può considerare la composizione di una rotazione intorno al centro O della puleggia, inessenziale all'accostamento, ed una traslazione (che determina la direzione d'accostamento) in direzione ortogonale ad $(O - O_1)$, dove O_1 simboleggia il centro di rotazione del ceppo, difatti:

$$\forall P \text{ solidale al ceppo} : dP = \vec{\omega}_{ceppo} dt \wedge (P - O_1) = \vec{\omega}_{ceppo} dt \wedge (P - O) + \vec{\omega}_{ceppo} dt \wedge (O - O_1)$$

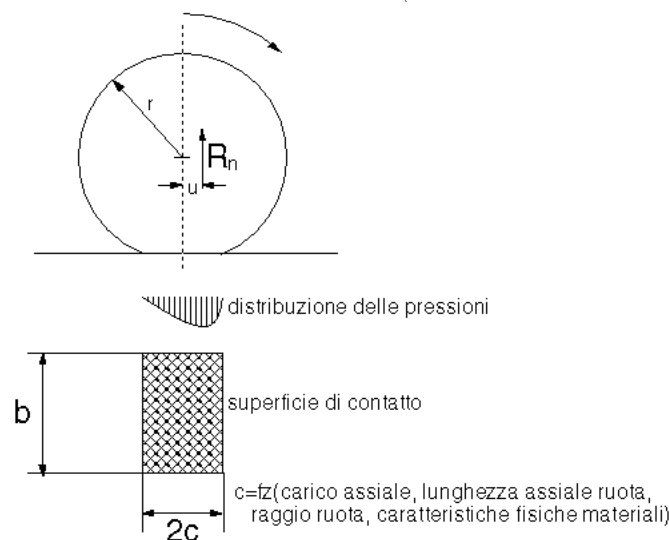
C) ceppo flottante (ceppo incernierato ad una leva, a sua volta incernierata al telaio): si lascia al lettore per esercizio (si utilizzi l'equilibrio al ceppo, il punto P_0 , e la relazione tra γ e β).

1.6. Attrito di rotolamento

In caso di corpi perfettamente rigidi in rotolamento relativo, il contatto dovrebbe localizzato su un punto (o lungo una linea), per cui passa il componente normale della reazione vincolare ed il componente tangenziale dovuto all'aderenza (attrito statico!) che impedisce lo strisciamento. In realtà ogni solido è elastico, ed il contatto avviene su una superficie di area finita.



Nel caso di corpo perfettamente elastico il diagramma delle pressioni è comunque simmetrico e dunque le azioni di pressione equivalgono comunque ad una azione normale passante per il centro della ruota.



In realtà, imposto il rotolamento, esistono diversi fattori (il principale è la non perfetta elasticità) che fanno spostare in avanti nel senso del moto il centro delle pressioni, di una lunghezza u detto *parametro d'attrito volvente* ($0 < u < c$).

Dunque le azioni di pressione equivalgono ad R_n passante per il centro della ruota e coppia che si oppone al rotolamento $M_a = R_n u$.

Il lavoro dissipato per unità di percorso è :

$$\frac{dL_a}{ds} = \frac{M_a d\varphi}{ds} = \frac{M_a}{ds} \frac{ds}{r} = \frac{M_a}{r} = \frac{R_n u}{r}.$$

Definiamo *coeff. d'attrito volvente* o di rotolamento: $f_v \triangleq \frac{dL/ds}{R_n} = \frac{u}{r}$.

Nota: il coefficiente d'attrito volvente è praticamente lo stesso in condizioni statiche e cinetiche.

1.7. Lavori e rendimento

Facciamo alcune distinzioni in merito alle forze applicate ai membri di una macchina. Dalla meccanica razionale distinguiamo in *ATTIVE* e *VINCOLARI*. Tra le prime, alcune compiono lavoro positivo e si dicono motrici, altre lavoro negativo e si dicono resistenze utili (vincere le quali è, in ultima analisi, lo scopo della macchina), per distinguerle dalle resistenze passive che invece sono le componenti non ideali delle reazioni vincolari e dissipano lavoro (ossia compiono lavoro negativo “inutile”). Le componenti ideali delle reazioni vincolari invece non compiono lavoro (assumendo di trattare sistemi a vincoli fissi)³.

Il membro al quale è applicata la forza motrice si dice movente e cedente quello al quale è applicata la resistenza utile.

In un determinato intervallo di tempo la forza motrice compirà un lavoro L_m , la resistenza utile assorbirà un lavoro L_r e le resistenze passive un lavoro L_p . Essi soddisfano alla seguente equazione:

$$L_{m[t_0, t_1]} - L_{r[t_0, t_1]} - L_{p[t_0, t_1]} = E_c(t_1) - E_c(t_0)$$

che esprime il **Teorema delle Forze Vive** (i lavori sono presi in modulo).

Se nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$: $E_c = \text{costante}$, si parla di funzionamento a **regime assoluto**.

Se invece il secondo membro di cui sopra è nullo, poiché $E_c(t)$ è una funzione T-periodica e l'intervallo di tempo considerato corrisponde ad un periodo, si parla di **regime periodico**.

Data una macchina a regime, si definisce **rendimento meccanico**:

$$\eta = \frac{L_r}{L_m}$$

poiché $L_p \neq 0$ sarà sempre $\eta < 1$.

Alla differenza $1 - \eta = \frac{L_p}{L_m}$ si dà in nome di fattore di perdita (sempre maggiore di 0)

Quando il rendimento di regime assoluto non è invariante rispetto all'intervallo di tempo in cui i lavori vengono calcolati, ha senso definire il **rendimento istantaneo**:

$$\eta_i(t) = \frac{L_{r[t, t+dt]}}{L_{m[t, t+dt]}} = \frac{W_r(t)}{W_m(t)} = \frac{\text{potenza assorbita da resistenza utile all'istante } t}{\text{potenza erogata da forza motrice all'istante } t}$$

ed il **rendimento medio**:

$$\eta_{medio} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} W_r(t) dt}{\int_{t_0}^{t_1} W_m(t) dt} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} \eta_i(t) W_m(t) dt}{\int_{t_0}^{t_1} W_m(t) dt}$$

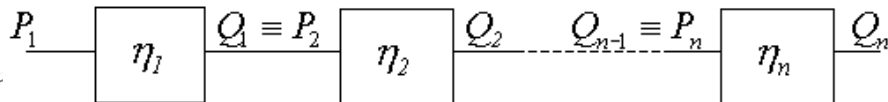
³ Per la precisione, i vincoli ideali sviluppano reazioni che compiono lavoro virtuale nullo, quale che sia il sistema di spostamenti virtuali applicati al sistema: è noto che se il sistema è a vincoli fissi, ogni spostamento reale può essere assunto come un particolare spostamento virtuale.

N.B.: *in pratica*, a parte moti artificiali di nessun interesse applicativo, un meccanismo è a regime assoluto, solamente quando lo è ogni suo membro.

1.7.1. Meccanismi in serie ed in parallelo

Meccanismi in serie

Più meccanismi si dicono in serie quando il cedente di ognuno è il movente del successivo

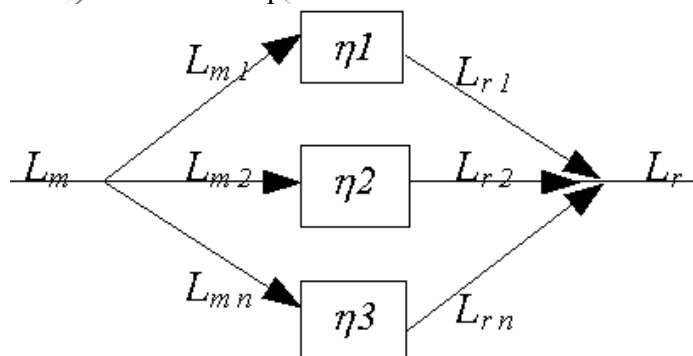


Il rendimento dell'intera serie è

$$\eta = \frac{L_m}{L_{m1}} = \frac{L_{r1}}{L_{m2}} \times \frac{L_{r2}}{L_{m3}} \times \dots \times \frac{L_{r,n-1}}{L_{mn}} \times \frac{L_{rn}}{L_{m,n+1}} = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n$$

Meccanismi in parallelo

Più meccanismi si dicono disposti in parallelo quando il moto è trasmesso da un movente a più meccanismi diversi o viene comunicato da più meccanismi ad un solo cedente



$$\begin{aligned} \eta &= \frac{L_r}{L_m} = \frac{L_{r1} + L_{r2} + \dots + L_{rn}}{L_{m1} + L_{m2} + \dots + L_{mn}} = \\ &= \frac{\eta_1 \cdot L_{m1} + \eta_2 \cdot L_{m2} + \dots + \eta_n \cdot L_{mn}}{L_{m1} + L_{m2} + \dots + L_{mn}} \end{aligned}$$

(media ponderata dei rendimenti, con pesi i lavori motore)

1.7.2. Espressioni del rendimento

Cerchiamo una espressione alternativa per il calcolo del rendimento istantaneo dei meccanismi ad 1 g.d.l., che tornerà molto utile in fase applicativa: ammettiamo sia nota la forza resistente utile all'istante t : Q , mentre della forza motrice P , sia nota la sola retta d'azione: è ovvio che il suo modulo (e verso) è determinato da considerazioni di equilibrio (dinamico !!). Nella configurazione attuale del meccanismo vale:

$$\eta_i(t) = \frac{W_r(t)}{W_m(t)} = \frac{Q v_Q \cos \vartheta_Q}{P v_P \cos \vartheta_P}$$

Se lo stesso atto di moto fosse compiuto senza perdite, determineremmo un valore P_0 che soddisfa: $P_0 v_P \cos \vartheta_P = Q v_Q \cos \vartheta_Q$,

ma allora utilizzando quest'ultima relazione, la espressione precedente diviene:

$$\eta_i(t) = \frac{P_0}{P}.$$

1.7.3. Moto retrogrado

Consideriamo una macchina funzionante a regime, in cui è assegnata la forza resistente Q , mentre della forza motrice sia assegnata la sola retta d'azione: come noto il suo modulo P deriva da considerazioni di equilibrio. Supponiamo invece che in quella stessa configurazione il moto stia avvenendo in senso inverso, ossia Q è motrice, e si determini ancora tramite considerazioni di equilibrio il valore P' .

Il rendimento del meccanismo nel caso di moto invertito si chiama rendimento di **moto retrogrado**:

$$\eta' = \frac{W'_r(t)}{W'_m(t)} = \frac{P' v_p \cos \vartheta_p}{Q v_Q \cos \vartheta_Q} = \frac{P' v_p \cos \vartheta_p}{P_0 v_p \cos \vartheta_p} = \frac{P'}{P_0}$$

Qualora risulti $\eta' < 0$ la macchina non ammette moto retrogrado o, come si dice, la macchina è ad arresto spontaneo, ossia nel caso la forza motrice cali di intensità la macchina non può funzionare in senso invertito.

N.B.: a ben guardarla, la formula precedente suggerisce una maniera rapida per trovare il rendimento di moto retrogrado... quale? Si vedano gli esempi.

1.7.4. Relazione fra η e η'

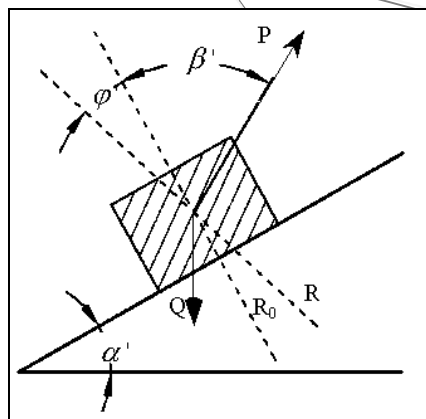
$$1 - \eta = \frac{W_p}{W_m} \quad 1 - \eta' = \frac{W'_p}{W'_m}$$

$$\frac{1 - \eta}{1 - \eta'} = \frac{W_p}{W_m} \frac{W'_m}{W'_p} = \frac{W_p}{W_m} \frac{W_r}{W'_p} = \frac{W_p}{W_m} \frac{W_r}{W'_p}; \text{ posto } k = \frac{L'_p}{L_p} \text{ si ha } \frac{1 - \eta}{1 - \eta'} = \frac{\eta}{k} \text{ e dunque:}$$

$$\eta' = \frac{\eta(k+1) - k}{\eta}$$

Si noti che $\eta' < 0 \Leftrightarrow \eta < \frac{k}{1+k}$: poiché usualmente $k \cong 1$, ciò implica approssimativamente $\eta < 0.5$, ossia le macchine ad arresto spontaneo hanno basso rendimento.

1.8. Rendimento del piano inclinato



Facendo l'equilibrio in direzione ortogonale a quella della reazione R , si ha (si ponga $\varphi = \arctg f$):

$$P \sin(\beta + \varphi) = Q \sin(\alpha + \varphi) \Rightarrow P = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)}$$

e, nel caso ideale:

$$P_0 = Q \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

$$\eta = \frac{P_0}{P}$$

$$\eta = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi)} \frac{\sin(\beta + \varphi)}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha (\sin \beta \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \beta)}{\sin \beta (\sin \alpha \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \alpha)} = \frac{1 + f \operatorname{ctg} \beta}{1 + f \operatorname{ctg} \alpha}$$

Il rendimento di moto retrogrado può essere calcolato, dopo aver determinato P' . Si troverà che allo stesso risultato si poteva pervenire invertendo il rendimento di moto diretto e “cambiando segno all’attrito”, (ossia scambiando f con $-f$).

$$\eta' = \frac{1 - f \operatorname{ctg} \alpha}{1 - f \operatorname{ctg} \beta}$$

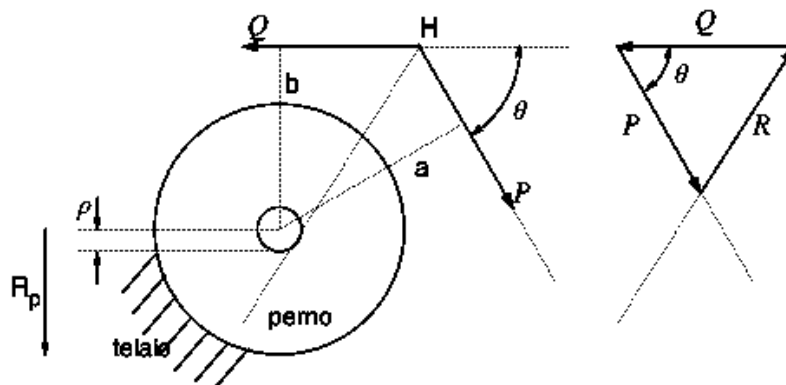
Si noti che, essendo $\beta > \alpha$ si ha che $\eta' < 0 \Leftrightarrow \alpha < \varphi$. Il moto retrogrado è possibile se $\alpha \geq \varphi$, anche se per innescarlo dovrà essere $\alpha > \varphi_a$.

1.9. Rendimento della coppia rotoidale

L’attrito radente fa sì che la reazione del vincolo realizzato dalla coppia rotoidale passi tangente al cosiddetto **circolo d’attrito**, ossia una circonferenza concentrica al perno, di raggio:

$$\rho = R_p \sin \varphi; \text{ se } \varphi \ll 1 \Rightarrow \rho \approx R_p \tan \varphi = R_p f$$

raggio
perno



Si consideri il rendimento del perno che ruota internamente alla sua sede, sottoposto alle forze d’interazione con la sede stessa (che, per quanto detto sopra, equivalgono ad una forza tangente al circolo d’attrito), alla forza resistente Q assegnata ed alla forza motrice P , di cui è nota solamente la retta d’azione.

Applicando l’equilibrio dei momenti intorno ad H , si conclude che la reazione vincolare R deve passare per H . Dovendo essere anche tangente al circolo d’attrito, si hanno due possibili rette d’applicazione per questa forza; come al solito l’indeterminazione è superata guardando al caso ideale ed osservando il senso di rotazione. La retta è quella tratteggiata nella figura su riportata.

Con queste informazioni è possibile chiudere il triangolo dei vettori e trovare la soluzione graficamente.

Analiticamente, si ha:

$$\begin{cases} \text{eq. delle forze (utilizzando tr. Carnot)} : R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ \cos \theta} \\ \text{eq. dei momenti} : R\rho + Qb = Pa \end{cases}$$

Si hanno due equazioni nelle due incognite R e P , e dunque con un po’ di manipolazioni algebriche il sistema è risolubile. Qui siamo interessati ad una soluzione semplificata:

Dall’equilibrio dei momenti è possibile calcolare P in funzione di Q e R : $P = (Qb + R\rho)/a$. Non commetteremo un grosso errore se valuteremo P sostituendo R_0 (modulo della reazione vincolare nel caso ideale) ad R .

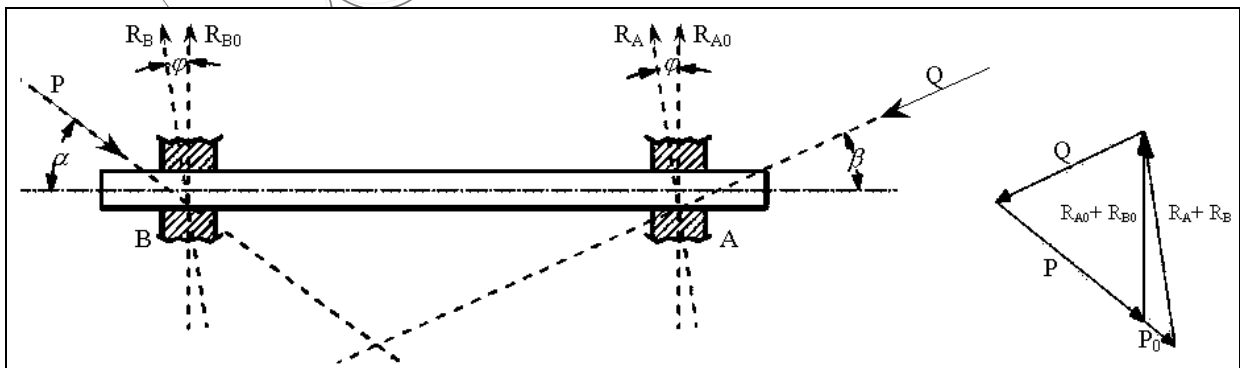
$$R_0 = \sqrt{P_0^2 + Q^2 - 2P_0Q \cos \theta} = \sqrt{\left(\frac{Qb}{a}\right)^2 + Q^2 - 2\left(\frac{Qb}{a}\right)Q \cos \theta} = Q \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1 - 2\frac{b}{a} \cos \theta}$$

$$\text{dunque: } P = \frac{Qb + R\rho}{a} = \frac{Qb}{a} + \frac{\rho}{a}Q \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1 - 2\frac{b}{a} \cos \theta}$$

$$\text{da cui } \eta = \frac{P_0}{P} = \frac{1}{1 + \rho \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2}{ab} \cos \theta}}$$

$$\text{mentre } \eta' = 1 - \rho \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2}{ab} \cos \theta}$$

1.10. Rendimento della coppia prismatica



Le rette d'azione delle reazioni dei collari come al solito si trovano osservando il verso dei componenti ideali dal caso ideale e che il verso delle componenti d'attrito è tale da opporsi al moto.

La soluzione grafica si riduce al banale problema statico delle *quattro forze*.

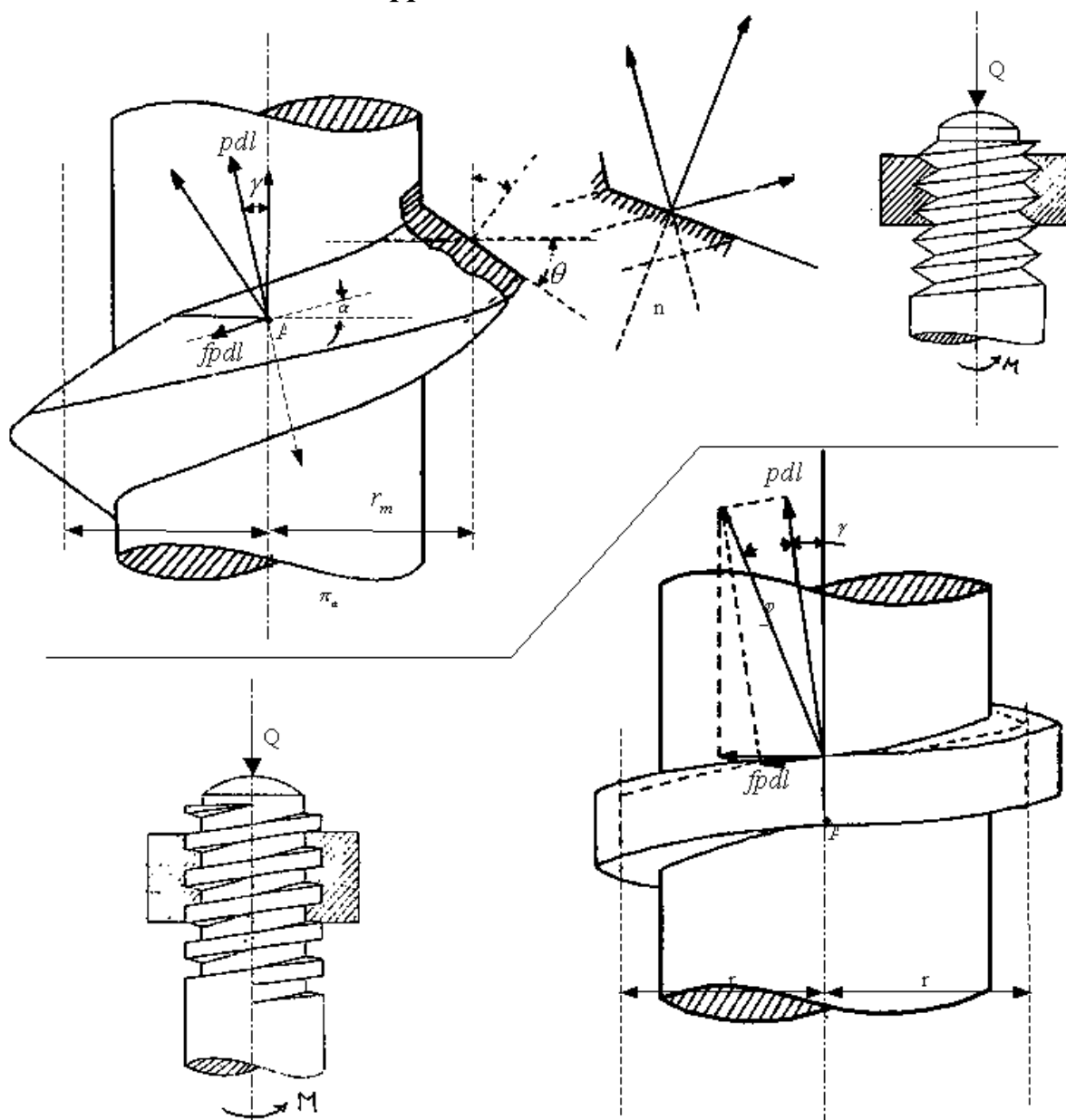
Risolviamolo in maniera analitica. Imponendo l'equilibrio in direzione ortogonale a quella delle due reazioni vincolari:

$$P \cos(\alpha + \beta) = Q \cos(\beta - \varphi) \Rightarrow P_0 \cos \alpha = Q \cos \beta$$

$$\eta = \frac{\cos \beta}{\cos(\beta - \varphi)} \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\cos \alpha} = \frac{\cos \beta (\cos \alpha \cdot \cos \varphi - \sin \alpha \cdot \sin \varphi)}{\cos \alpha (\cos \beta \cdot \cos \varphi + \sin \beta \cdot \sin \varphi)} = \frac{1 - f \operatorname{tg} \alpha}{1 + f \operatorname{tg} \beta}$$

Queste espressioni non sono valide quando le reazioni sono discordi.

1.11. Rendimento della coppia elicoidale



Sia α l'inclinazione dell'elica⁴ media (l'intersezione tra il filetto ed il cilindro coassiale con la vite e raggio r_m), sia ϑ l'angolo che le generatrici dell'elicoide formano con un piano normale all'asse della vite e h sia il passo della vite.

Ipotesi fondamentale:

- Il carico Q è assiale.
- Le dimensioni assiali del filetto sono piccole, così da poter supporre una distribuzione di pressione uniforme lungo una generatrice. Pertanto è lecito considerare, anziché forze per unità di superficie, forze per unità di linea (elica media): $p = dF/dl$.

Riferiamoci a rotazione della vite di un angolo 2π , in condizioni di regime.

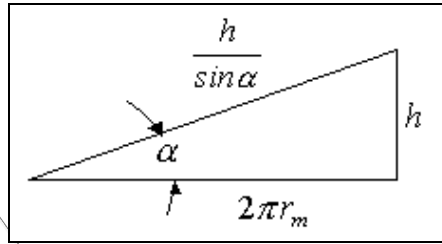
Dal teorema delle forze vive:

$$L_m = L_r + L_p \Leftrightarrow M_m 2\pi = Qh + L_p$$

⁴ Per definizione l'elica è una linea che si sviluppa su una superficie cilindrica e che taglia le sue generatrici con angolo costante. Ogni punto del filetto, nel moto relativo vite-madrevite, descrive un elica. L'intersezione tra il filetto ed un cilindro coassiale alla vite è un elica.

da cui $M_m = \frac{Qh + L_p}{2\pi}$.

Per valutare L_p , facciamo alcune considerazioni.



Sviluppiamo su un piano il tratto percorso durante una rotazione un punto appartenente all'elica media. Notiamo che $\tan \alpha = h/2\pi r_m$, mentre la lunghezza di tale tratto è $h/\sin \alpha$. Dunque il lavoro

perduto è: $L_p = \int_0^L \frac{h f p}{\sin \alpha} dl = \frac{h f}{\sin \alpha} \int_0^L p dl$, dove L è la lunghezza della porzione di elica media interessata al contatto vite-madrevite.

L'integrale che appare in questa formula, è facilmente ricavabile dalla imposizione dell'equilibrio in direzione assiale:

$$Q = \int_0^L p \cos \gamma dl - \int_0^L f p \sin \alpha dl \Rightarrow \int_0^L p dl = \frac{Q}{\cos \gamma - f \sin \alpha}$$

e dunque: $M_m = \frac{1}{2\pi} \left(Qh + \frac{fh}{\sin \alpha} \int_0^L p dl \right) = \frac{Qh}{2\pi} \left(1 + \frac{f}{\sin \alpha (\cos \gamma - f \sin \alpha)} \right) \Rightarrow M_{mo} = \frac{Qh}{2\pi}$.

Calcoliamo il rendimento:

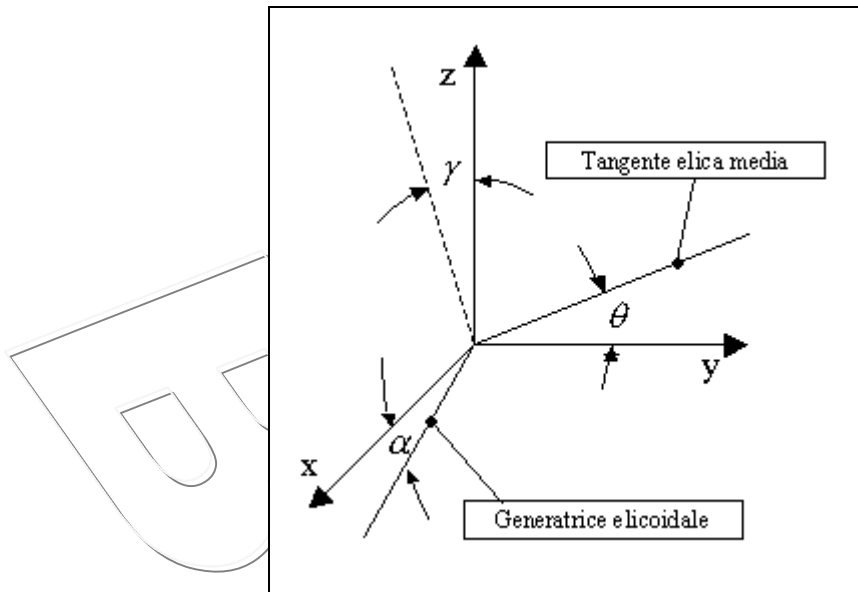
$$\eta = \frac{M_{mo}}{M_m} = \frac{1}{1 + \frac{f}{\sin \alpha (\cos \gamma - f \sin \alpha)}} = \frac{\sin \alpha \cos \gamma - f \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \gamma + f \cos^2 \alpha} = \frac{1 - f \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \gamma \cos \alpha}}{1 + f \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \operatorname{ctg} \alpha} =$$

$$\eta = \frac{1 - f' \operatorname{tg} \alpha}{1 + f' \operatorname{ctg} \alpha} \quad \left(\text{con } f' = f \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \right) \quad \text{si noti } \vartheta = 0 \Rightarrow f = f'$$

Ponendo $\varphi' = \arctan f'$

$$\eta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1 - f' \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + f'} = \operatorname{tg} \alpha \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi' \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varphi')}.$$

Con il noto procedimento è immediato ricavare: $\eta' = \frac{\operatorname{tg} (\alpha - \varphi')}{\operatorname{tg} \alpha}$



Si noti che γ è determinato una volta fissati α e ϑ , difatti: si consideri un punto P sull'elica media, la generatrice dell'elicoide, la tangente all'elica media e la azione di pressione passanti di lì individuano direzioni a due a due ortogonali.

Poniamo un riferimento con origine in P, asse z parallelo all'asse della vite, asse x radiale ed y di conseguenza. Scomponiamo in questa terna i versori che individuano tali direzioni:

$$\begin{cases} \underline{n}_1 = [\cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta]^T \text{ (generatrice)} \\ \underline{n}_2 = [0 & \cos \alpha & \sin \alpha]^T \text{ (tangente)} \\ \underline{n}_3 = [\cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \gamma]^T \text{ (azione di p.)} \end{cases}$$

$$\text{imponendo: } \begin{cases} \underline{n}_1 \cdot \underline{n}_3 = 0 \\ \underline{n}_2 \cdot \underline{n}_3 = 0 \\ \underline{n}_3 \cdot \underline{n}_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \vartheta \cos \beta_1 - \sin \vartheta \cos \gamma = 0 \\ \cos \alpha \cos \beta_2 + \sin \alpha \cos \gamma = 0 \\ \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma = 1 \end{cases}$$

Dalla prima vale $\cos \beta_1 = \cos \gamma \tan \vartheta$, dalla seconda $\cos \beta_2 = -\cos \gamma \tan \alpha$; introducendo nella terza si ha

$$\cos \gamma = (1 + \tan^2 \vartheta + \tan^2 \alpha)^{-1/2}.$$

Se $\vartheta = 0$ (viti a filetto rettangolare) $\Rightarrow \alpha = \gamma$

Se $\vartheta > 0 \Rightarrow \gamma > \alpha$.

Assegnati $f, \vartheta \Rightarrow \eta = \eta(\alpha)$, il cui grafico non è, in teoria, facilmente tracciabile poiché

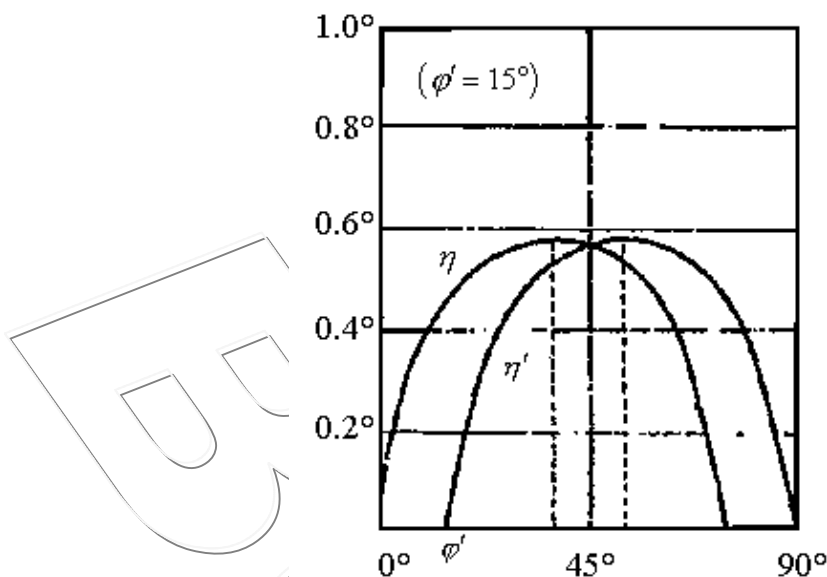
$\eta = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \varphi')}$ dipende da α , anche tramite la dipendenza di φ' da α ... ma se α è piccolo:

$\tan \varphi' = f \cos \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \vartheta + \tan^2 \alpha} = \frac{f}{\cos \vartheta} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \vartheta} \approx \frac{f}{\cos \vartheta}$, e dunque si può assumere costante su α e immediatamente calcolabili poiché f, ϑ sono assegnati.

A questo punto è facile tracciare il diagramma di $\eta(\alpha) = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \varphi')}$ e vedere che ha un massimo

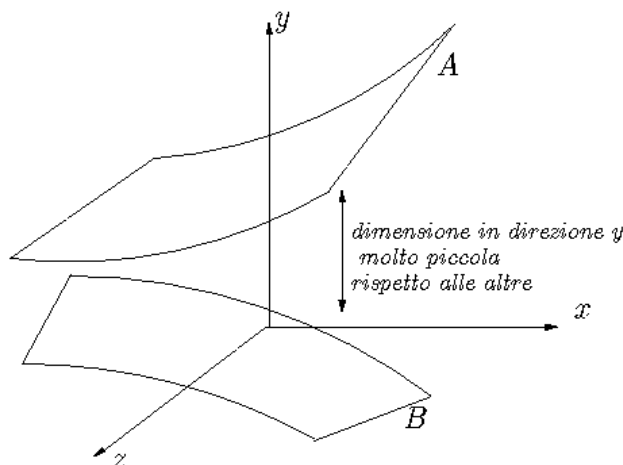
$$\text{per } \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}.$$

Con la stessa ipotesi semplificativa è immediato constatare che il diagramma di $\eta'(\alpha)$ si ottiene da quello di $\eta(\alpha)$, "ritardandolo" di un angolo φ' . Dal diagramma si nota che $\eta' < 0$ per $\alpha < \varphi'$ (vite irreversibile), così come era immediato desumere dalla espressione generale di η' .



1.12. Cenni alla teoria della lubrificazione

Le coppie cinematiche lubrificate sono coppie in cui viene di proposito interposto del fluido opportuno tra gli elementi cinematici.



Consideriamo il moto di un fluido viscoso entro un volume (*meato*) in cui una dimensione è molto minore delle altre due. Il volume è dunque definito, istante per istante, (*visione Euleriana*) da due funzioni:

$$y_B = y_B(x, z) \text{ e } y_A = y_A(x, z).$$

Le due superfici sono in moto rispetto al riferimento, e sono dunque definite su ogni punto delle due superfici le velocità:

$$\vec{c}_B = u_B(x, z)\vec{i} + v_B(x, z)\vec{j} + w_B(x, z)\vec{k}$$

$$\vec{c}_A = u_A(x, z)\vec{i} + v_A(x, z)\vec{j} + w_A(x, z)\vec{k}$$

che sono assegnate. Si ipotizza:

- il fluido è di Newton-Stokes⁵, omogeneo, incompressibile e con viscosità costante.

⁵ Un fluido si dice di Newton-Stokes se è caratterizzato dalla seguente relazione tra sforzi τ_{ij} e gradiente della velocità $\vec{c}$ (τ_{ij} è la componente sull'asse di riferimento generico x_j della tensione applicata alla faccetta fluida ortogonale all'asse

x_i): $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu(\vec{\nabla} \cdot \vec{c})\delta_{ij}$. Si ricordi la definizione $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$!

- il moto è supposto laminare (ipotesi generalmente accettata data la sottigliezza dello spessore del meato e l'elevata viscosità cinematica $\nu = \mu/\rho$ - dove μ è la viscosità *dinamica* o *assoluta* e ρ è la densità -, che riducono il numero di Reynolds⁶).

Sono note dalla fluidodinamica le equazioni di governo del moto di un fluido di Newton-Stokes a densità e viscosità costanti:

$$\text{eq. continuità: } \vec{\nabla} \cdot (\vec{c}) = 0 \quad (1)$$

$$\text{eq. quantità di moto: } \rho \frac{d\vec{c}}{dt} = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{c} \quad (2)$$

dove $\vec{c} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ è la velocità, p la pressione, $\vec{F}$ è il campo di forze di massa e $\vec{\nabla}$ l'operatore $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$.

Scriviamo le equazioni per componenti:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

e semplificando dalla seconda, per le ipotesi fatte, le forze di inerzia e – trascurando le forze gravitazionali - quelle di massa:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases}$$

Da considerazioni sugli ordini di grandezza (si veda ad esempio la teoria dello strato limite) è possibile mostrare che è lecito trascurare la derivata parziale della pressione rispetto a y e le derivate seconde delle componenti di velocità rispetto a x e z .

In definitiva le equazioni di governo del moto del fluido si possono scrivere:

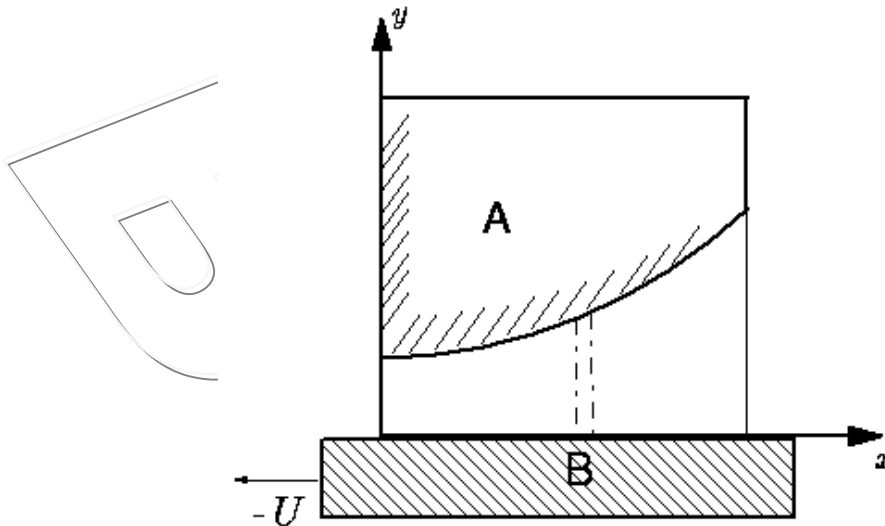
$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Queste equazioni, opportunamente combinate, conducono ad una unica equazione alle derivate parziali, detta *equazione generalizzata di Reynolds*, la cui risoluzione permette di conoscere il comportamento di un gran numero di coppie cinematiche lubrificate. Per la sua effettiva determinazione si rimanda a testi specializzati. Vediamo, invece, di applicare la (1) e la (2), nella loro ultima forma, per studiare alcuni casi particolari.

⁶ Per l'espressione si rimanda a testi specializzati, si sappia che fisicamente è un numero che esprime il rapporto tra il "peso" delle forze di inerzia ed il "peso" delle forze d'attrito viscoso. La sua transizione verso elevati valori comporta il passaggio da regime laminare a regime turbolento.

1.12.1. Slitta cilindrica infinitamente lunga su superficie piana

Il membro A è solidale al riferimento $oxyz$ e delimitato da una superficie cilindrica con le generatrici ortogonali al foglio; per semplicità supponiamo A fisso, mentre il membro B, delimitato da una superficie piana, trasla con velocità $-U\vec{i}$.



Supponiamo gli elementi cinematici infinitamente lunghi in direzione z . È evidente che con questa posizione il problema diviene bidimensionale, ossia tutte le grandezze non dipendono dalla coordinata z . In particolare si ha $p=p(x)$ e dalla prima di (2) abbiamo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \Rightarrow u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + c_1 y + c_2$$

ma vale che, detta h l'altezza del meato:

$u=-U$ per $y=0$ e $u=0$ per $y=h$. Imponendo queste due condizioni, si trova che:

$$\begin{cases} c_2 = -U \\ c_1 = \left(\frac{U}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h \right) \end{cases} \Rightarrow u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h) + U \left(\frac{y}{h} - 1 \right)$$

Dobbiamo ancora utilizzare l'equazione della continuità, $\text{div } \vec{c} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Dal teorema della divergenza⁷ consegue che questa equazione impone che la portata volumetrica in direzione x per unità di profondità $q_x(x)$ non dipenda dalla sezione x alla quale la misuro:

$$\frac{dq_x}{dx}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\int_0^{h(x)} u(x, y) dy \right) = 0. \text{ Dai calcoli emerge che:}$$

$$\begin{aligned} q_x(x) &= \int_0^{h(x)} u(x, y) dy = \int_0^{h(x)} \left(\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - yh) + U \left(\frac{y}{h} - 1 \right) \right) dy = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left[\frac{y^3}{3} - h \frac{y^2}{2} \right]_0^h + U \left[\frac{y^2}{2h} - y \right]_0^h \\ &\Rightarrow q_x(x) = -\frac{1}{12} h^3 \frac{dp}{dx} - U \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{dq_x}{dx}(x) = -\frac{1}{12} \frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) - \frac{U}{2} \frac{dh}{dx} \end{aligned}$$

Imponendo l'ultima espressione uguale a zero si trova:

$$^7 \int_V \text{div } \vec{c} dV = \int_{\partial V} \vec{c} \cdot \vec{n} dA$$

$$\frac{1}{6\mu} \frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) = -U \frac{dh}{dx} \quad (\text{è una forma particolare della equazione di Reynolds}).$$

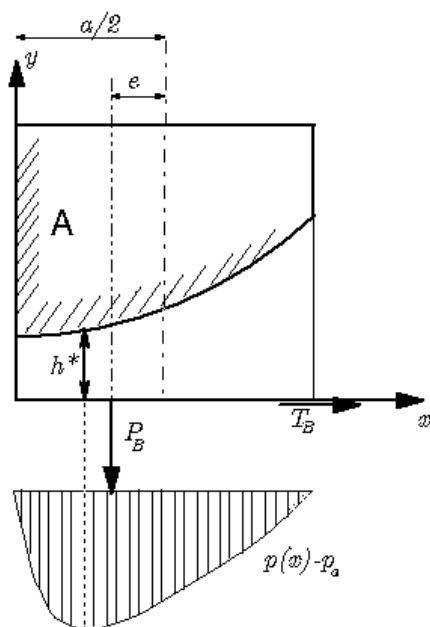
Dunque si ha: $\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) = -6\mu U \frac{dh}{dx} \Rightarrow h^3 \frac{dp}{dx} = -6\mu U \int \frac{dh}{dx} dx + c_1 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{6\mu U}{h^2} + \frac{c_1}{h^3};$

integrando⁸ tra 0 e x: $p(x) - p(0) = -6\mu U \int_0^x \frac{1}{h^2} dx + c_1 \int_0^x \frac{1}{h^3} dx$ e sfruttando le condizioni al contorno

($p(0)=p_a$ e $p(a)=p_a$), si trova: $p(a) - p(0) = p_a - p_a = -6\mu U \int_0^a \frac{1}{h^2} dx + c_1 \int_0^a \frac{1}{h^3} dx = 0 \Rightarrow c_1 = 6\mu U \frac{\int_0^a \frac{1}{h^2} dx}{\int_0^a \frac{1}{h^3} dx}.$

Si ottiene il **campo di sovrappressione** (rispetto alla p. atmosferica):

$$p(x) - p_a = -6\mu U \int_0^x \frac{1}{h^2} dx + 6\mu U h^* \int_0^x \frac{1}{h^3} dx$$



h^* rappresenta fisicamente l'altezza del meato corrispondente ad un punto di stazionarietà (in particolare un punto di massimo) delle pressioni: difatti $\frac{dp}{dx} = 6\mu U \left(\frac{h^* - h}{h^3} \right)$ si annulla per $x = x^*$,

tale che $h(x^*) = h^*$.

Si può dimostrare che il campo di sovrappressioni è ovunque positivo se $h(x)$ è una funzione crescente.

Calcoliamo la risultante – per unità di profondità – delle sovrappressioni che agiscono su B:

$$P_B = \int_0^a (p(x) - p_a) dx$$

Ovviamente la forza risultante per unità di lunghezza che verrà applicata – in direzione verticale – al membro A sarà vettorialmente opposta alla P_B e con la stessa retta d'azione.

Determiniamo proprio la retta d'azione della P_B , individuando la sua eccentricità e rispetto alla mezzzeria:

⁸Da un punto di vista di formalismo matematico, l'integrale andrebbe scritto utilizzando una variabile muta diversa da x , visto che questo è anche un estremo di integrazione...l'importante è capirsi!!

$$P_B \left(\frac{a}{2} - e \right) = \int_0^a x (p(x) - p_a) dx;$$

le azioni tangenziali agenti su B valgono:

$$\tau_{yz}|_{y=0} = 0; \quad \tau_{yx}|_{y=0} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{y=0} \right);$$

Ricordando che la componente v è ovunque nulla per $y=0$ ($\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{y=0}$) e sostituendo l'espressione di

u :

$$\tau_{yx}|_{y=0} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h) + \frac{U}{h} y \right) \Big|_{y=0} = \mu \left(-\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h + \frac{U}{h} \right) = \mu \left(-\frac{1}{2\mu} h 6\mu U \frac{h^* - h}{h^3} + \frac{U}{h} \right) = \mu U \left(\frac{4h - 3h^*}{h^2} \right)$$

e dunque le azioni tangenziali danno risultante (per unità di profondità):

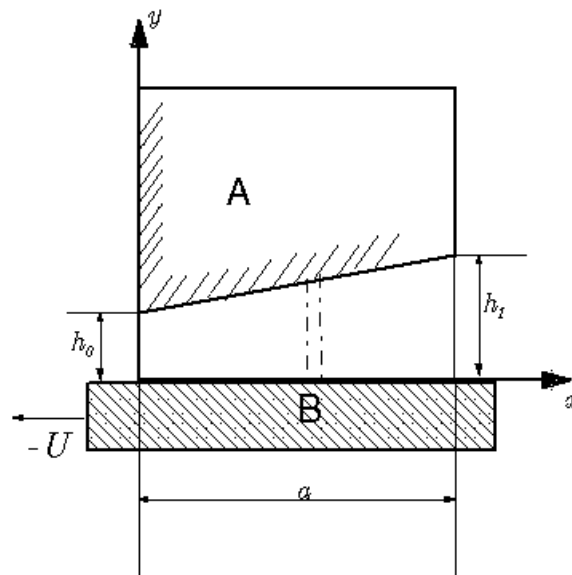
$$T_B = \mu U \int_0^a \left(\frac{4h - 3h^*}{h^2} \right) dx.$$

Si hanno casi particolari a seconda della forma di $h(x)$.

Consideriamo il caso in cui anche il pattino è delimitato da una superficie piana (ma non parallela all'altro elemento!...vedremo dopo che questa condizione è improponibile):

$h(x) = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{a} x = h_0 \left(1 + \frac{m}{a} x \right)$ ponendo $m = \frac{h_1 - h_0}{h_0}$ Con tale posizione, si ha:

$$h^* = h_0 \frac{\int_0^a \frac{dx}{\left(1 + \frac{m}{a} x \right)^2}}{\int_0^a \frac{dx}{\left(1 + \frac{m}{a} x \right)^3}} = 2h_0 \frac{1+m}{2+m}$$



Calcoli altrettanto semplici permettono di trovare il valore della sovrappressione in ciascun punto del meato. Successivamente possiamo determinare l'intensità della portanza, la sua retta d'azione, la resistenza dovuta agli attriti viscosi.

I risultati cui si perviene sono i seguenti:

$$p(x) - p_a = \frac{6\mu U a}{h_0^2} k(m, \frac{x}{a}) \quad \text{dove } k(m, \frac{x}{a}) \triangleq \frac{x}{a} m \left(1 - \frac{x}{a}\right) (2+m)^{-1} \left(1 + m \frac{x}{a}\right)^{-2}$$

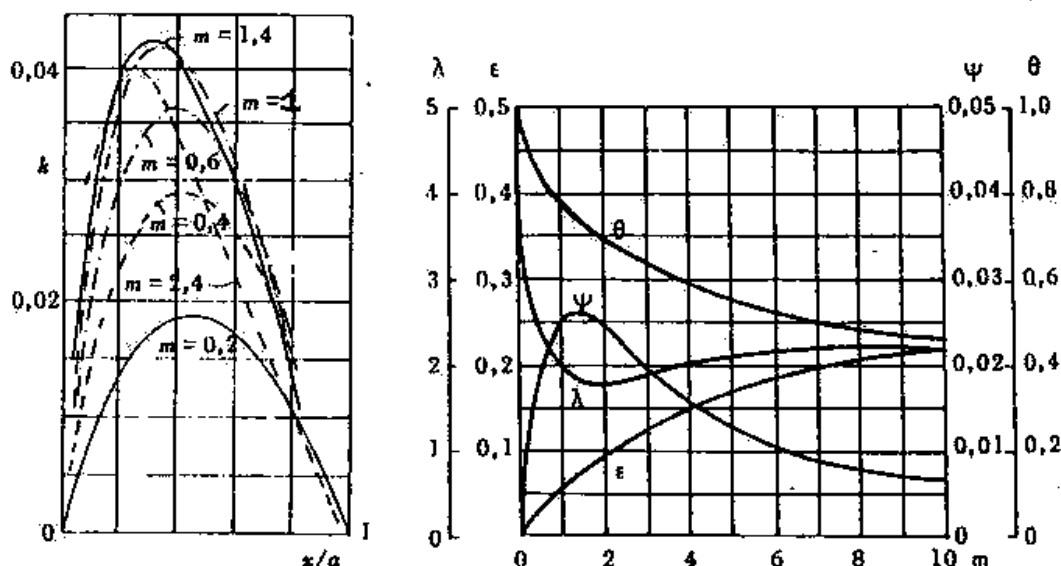
$$P_B = 6\mu U \left(\frac{a}{h_0}\right)^2 \psi(m) \quad \text{dove } \psi(m) \triangleq \frac{1}{m^2} \ln(1+m) - \frac{2}{m(2+m)}$$

$$T_B = \mu U \frac{a}{h_0} \vartheta(m) \quad \text{dove } \vartheta(m) \triangleq \frac{4}{m} \ln(1+m) - \frac{6}{(2+m)}$$

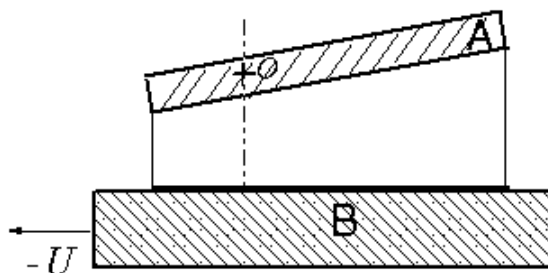
$$e = a\varepsilon(m) \quad \text{dove } \varepsilon(m) \triangleq \frac{[m^2 + 6(m+1)]\ln(1+m) - 3m(m+2)}{2m[(m+2)\ln(m+1) - 2m]}$$

Si definisce coefficiente d'attrito $f = T_B/P_B$ e si trova che vale $\sqrt{\frac{\mu U}{P_B}} \lambda(m)$ dove $\lambda(m) \triangleq \frac{\vartheta(m)}{\sqrt{6\psi(m)}}$.

Nella figura successiva, a sinistra è riportato l'andamento del fattore dimensionale $k(m, x/a)$ in funzione di x/a , per diversi valori del parametro m , mentre a destra sono tracciate le funzioni λ , ε , ψ , ϑ rispetto ad m . È evidente l'opportunità che m sia prossimo ad 1, infatti per m nell'intorno di 1 è elevata la capacità portante e basso il coefficiente d'attrito. Si noti che in caso di facce piane parallele, m è nullo, così come nulla è la portanza che ne segue!



In alcuni casi applicativi lo schema sopra riportato deve essere modificato imponendo al pattino non più la possibilità di traslare in direzione ortogonale al piano (*pattino ad inclinazione fissa*), bensì la possibilità di potersi orientare, ruotando attorno ad un punto fisso O , così come evidenziato in nella figura sottostante (*pattino oscillante*).



Per l'equilibrio dell'insieme meato-slitta, è evidente che la linea d'azione della portanza dovrà passare per O . Fissare la retta d'azione vuol dire fissare l'eccentricità e dunque fissare ε : in definitiva è fissato m , e dunque sono fissati, per costruzione, anche tutti i parametri adimensionali

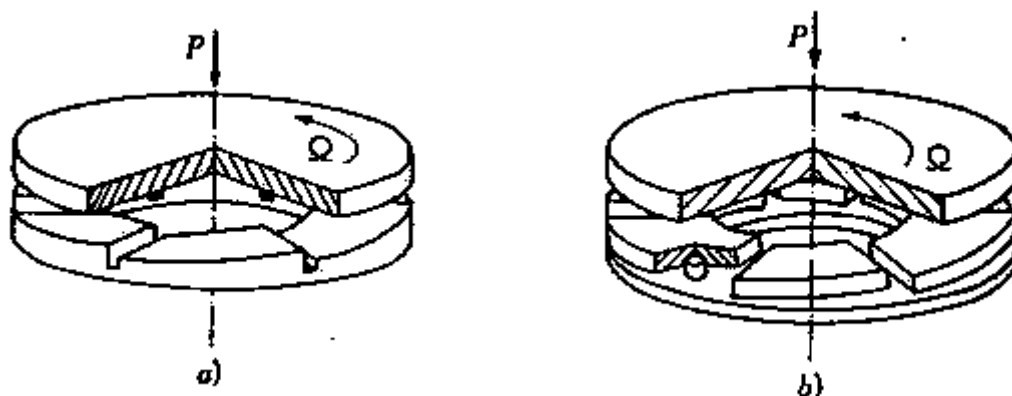
sopra esposti, ed è facile dedurre il comportamento della coppia lubrificata al variare delle condizioni di impiego; ad esempio fissata ψ si ha una relazione tra h_0 , a , P_B, μ ed U . Tramite questa relazione si può verificare che l'altezza h_0 sia sempre maggiore di una data soglia (dipendente da errori di planarità delle superfici delimitanti il meato e la loro rugosità), tale che sia evitato il contatto diretto tra le asperità delle superfici stesse.

Si noti infine che il punto O non può essere messo in mezzeria, poiché i diagrammi ci mostrano che in tal caso la portanza è zero.

È da rilevare, infine, che né il pattino ad inclinazione fissa né il pattino ad inclinazione mobile possono essere utilizzati contemporaneamente nei due sensi di moto del membro B. Difatti se il pattino è ad inclinazione fissa, mentre in un senso di moto esso è caratterizzato da profilo crescente, nell'altro è caratterizzato da profilo decrescente (ne seguirebbe un campo di sovrappressioni negative!); se il pattino è orientabile, mentre in un senso è ad eccentricità positiva, nell'altro è ad eccentricità negativa (ne seguirebbe una portanza "negativa"!).

Il caso "pattino su superficie" schematizza casi applicativi frequenti, come quelli rappresentati da *cuscinetti reggispinta* (ad inclinazione fissa o variabile) riportati nella seguente figura.

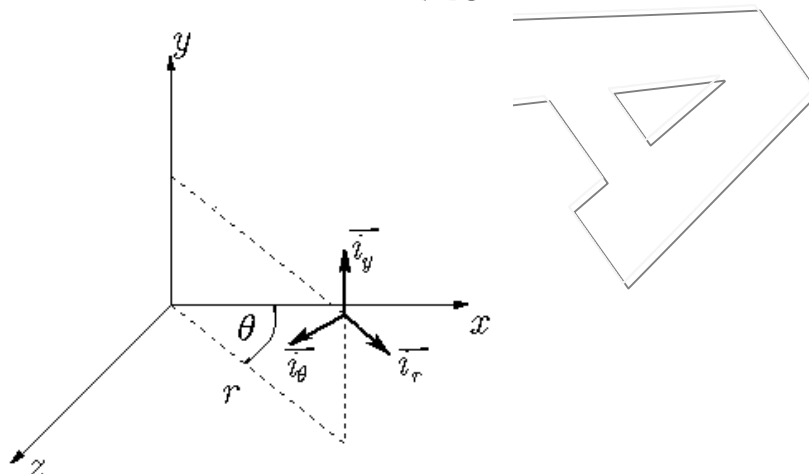
Ovviamente ad essi non si può applicare brutalmente la teoria sopra esposta, per l'evidente insoddisfazione di ipotesi fondamentali, prima tra tutte la infinita profondità della coppia cinematica. Esistono in letteratura tecnica dei coefficienti "correttivi" che permettono di estendere la validità dei risultati ottenuti in precedenza alle coppie di larghezza finita.



Fino adesso abbiamo studiato il caso in cui una *portanza* nasce in conseguenza del moto relativo tra i due membri (sostentazione *fluidodinamica*). Studiamo adesso un caso di coppia lubrificata a sostentazione *fluidostatica* (o *forzata*), in cui la capacità portante è conseguenza dell'alimentazione esterna di lubrificante in pressione nel meato.

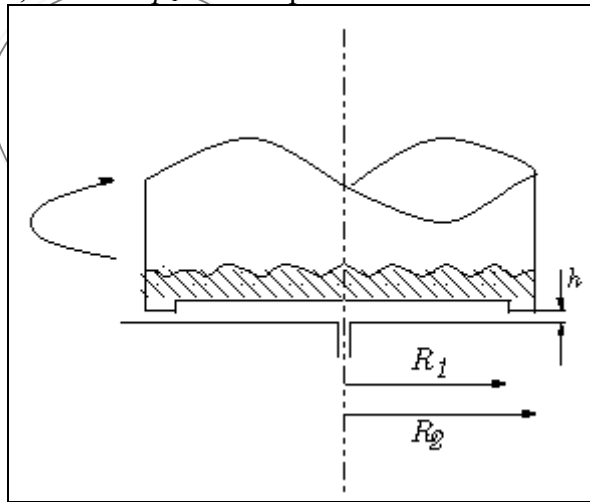
Cuscinetto reggispinta a lubrificazione forzata

Innanzitutto riscriviamo le equazioni (2) a pagina 28 in coordinate cilindriche (r, θ, y):



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad \text{dove } \vec{c} = \underbrace{v_r}_{\text{velocità radiale}} \vec{i}_r + \underbrace{v_\theta}_{\text{velocità tangenziale}} \vec{i}_\theta + \underbrace{v_y}_{\text{velocità assiale}} \vec{i}_y$$

Torniamo al caso del perno di spinta che ruota con velocità angolare ω , e, come si vede dalla sezione riportata nella seguente figura, porta all'estremità una parete piana, ortogonale all'asse dell'albero, limitata da due raggi R_1 ed R_2 . Attraverso un foro, viene inviato lubrificante sotto pressione entro un pozzetto di raggio R_1 ricavato nell'estremità dell'albero. Il lubrificante viene alimentato con pressione p_0 costante a mezzo di un circuito idraulico non visibile in figura. Attraverso il foro di alimentazione di piccolo diametro, la pressione del lubrificante cade dal valore p_0 , all'ingresso del forellino, al valore p_1 entro il pozzetto.



Considerazioni di simmetria assiale ($p=p(r)$) permettono di scrivere: $\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial y^2}$; $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$; $\mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} = 0$

Dalla terza abbiamo che $v_\theta = c_1(r, \theta)y + c_2(r, \theta)$, ma imponendo le condizioni al bordo:

$$v_\theta|_{y=0} = 0 \text{ e } v_\theta|_{y=h} = \omega r, \text{ si ha: } v_\theta = \frac{\omega r}{h} y.$$

Dalla prima equazione abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_r}{\partial y^2} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \Rightarrow \frac{\partial v_r}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} y + c_1(r, \theta) \\ \Rightarrow v_r &= \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dr} y^2 + c_1(r, \theta)y + c_2(r, \theta) \end{aligned}$$

Imponendo le condizioni al bordo (velocità radiale nulla per $y=0$ e $y=h$), si determinano facilmente c_1 e c_2 .

Si ottiene:

$$v_r = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dr} y(y-h).$$

Dobbiamo utilizzare ancora l'equazione di continuità, che, come già visto, esprime la conservazione della massa. Per un fluido incompressibile essa implica che la portata volumetrica entrante in un certo volume di controllo deve eguagliare la portata uscente. Se prendiamo come volume di controllo un cilindro coassiale al perno, dobbiamo imporre che la portata volumetrica uscente dalla superficie laterale eguagli la portata Q entrante dal foro di adduzione.

$$Q = \int_{\text{Sup.lat.}} \vec{c} \cdot \vec{n} dA = \int_{\text{Sup.lat.}} (v_r \vec{i}_r + v_\theta \vec{i}_\theta) \cdot \vec{n} dA = \int_{\text{Sup.lat.}} v_r \vec{i}_r \cdot \vec{n} dA = \int_0^h v_r 2\pi r dy = \int_0^h \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dr} y(y-h) 2\pi r dy = -\frac{\pi r}{6\mu} \frac{dp}{dr} h^3$$

Da cui:

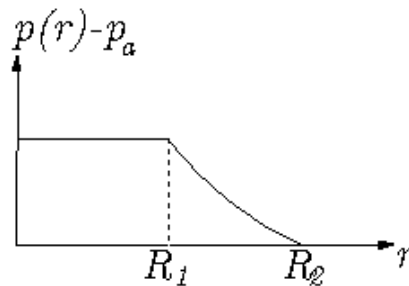
$$\frac{dp}{dr} = -\frac{6\mu Q}{\pi r h^3} \Rightarrow p(r) = -\frac{6\mu Q}{\pi h^3} \ln r + C, \text{ ma } p(r) = p_a \text{ per } r = R_2 \text{ da cui } C = p_a + \frac{6\mu Q}{\pi h^3} \ln R_2, \text{ per cui il}$$

campo di sovrappressioni ha il seguente andamento:

$$p(r) - p_a = \frac{6\mu Q}{\pi h^3} \ln \left(\frac{R_2}{r} \right).$$

Si noti che questa relazione è valida solo per $r \in [R_1, R_2]$, ma non per $r \in [0, R_1]$, perché dentro il pozzetto non valgono più alcune ipotesi fondamentali. Dentro il pozzetto la pressione p_1 si può ritenere approssimativamente costante e, per continuità, uguale a $p(R_1)$ che ricavo dalla relazione di cui sopra. In definitiva vale che:

$$p(r) - p_a = \begin{cases} \frac{6\mu Q}{\pi h^3} \ln \left(\frac{R_2}{r} \right) & \text{per } r \in [R_1, R_2] \\ \frac{6\mu Q}{\pi h^3} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) & \text{per } r \in [0, R_1] \end{cases}$$



Il carico P sopportabile dal perno, per effetto del campo di sovrappressioni, è:

$$\int_0^{R_2} (p(r) - p_a) 2\pi r dr = (p_1 - p_a) \pi R_1^2 + \int_{R_1}^{R_2} (p(r) - p_a) 2\pi r dr = (p_1 - p_a) \frac{\pi}{2} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}.$$

Per il calcolo del momento necessario a mantenere in moto uniforme il perno, si possono trascurare le azioni tangenziali all'interno del pozzetto (dove è piccola la velocità del fluido):

$$\tau_\theta = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial y} = \mu \frac{r\omega}{h} \Rightarrow M = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r \tau_\theta r dr = \mu \frac{\pi \omega}{h} \frac{R_2^4 - R_1^4}{2}.$$

2. I problemi di statica

Con 'problemi di statica' si intende una serie di problemi legati alla individuazione delle forze che mantengono un determinato corpo o sistema di corpi rigidi nella loro posizione di equilibrio. Alcuni problemi possono consistere nella determinazione delle reazioni vincolari in un corpo con 0 (zero) gradi di libertà sottoposto a forze note (ma tali problemi saranno affrontati più approfonditamente nel corso di Scienza delle Costruzioni). La maggior parte dei problemi di meccanica applicata consisterà invece nel determinare l'ampiezza di una forza (o di un momento), di cui è nota la retta di applicazione, in maniera che l'intero meccanismo, teoricamente labile (con almeno un grado di libertà), possa trovarsi in condizioni di equilibrio.

Con 'problemi di cinetostatica' si intende invece indicare quella serie di problemi che richiedono l'individuazione delle forze o momenti in grado di mantenere un determinato corpo o sistema di corpi rigidi in moto con velocità costante. Se infatti la velocità rimane costante, l'accelerazione è

nulla come le forze di inerzia, e le equazioni cardinali della statica e della dinamica vanno a coincidere.

Per la risoluzione di tali problemi adotteremo esclusivamente la via grafica tenendo conto che una forza può essere considerata un vettore.

Dire l'intero meccanismo è in equilibrio comporta che ogni singolo membro deve essere in

equilibrio, per ciascun corpo devono valere le equazioni cardinali della statica
$$\begin{cases} \overrightarrow{R}^e = 0 \\ \overrightarrow{M}^e = 0 \end{cases}$$

Poiché verranno affrontati esclusivamente sistemi piani, le equazioni cardinali, una volta scelto un adeguato sistema di riferimento con assi x e y sul piano del moto (e asse z normale ad esso), si riducono alle sole equazioni scalari:

- equilibrio alla traslazione nella direzione x ;
- equilibrio alla traslazione nella direzione y ;
- equilibrio alla rotazione (attorno alla direzione z) rispetto ad un polo generico.

Queste tre equazioni devono essere contemporaneamente verificate affinché un corpo possa dirsi in equilibrio.

Vale la pena di ricordare che nel caso dei corpi rigidi le forze possono essere traslate lungo la propria direzione senza determinare variazioni nella soluzione del problema. La traslazione in direzione parallela (alla direzione della forza stessa) dovrebbe essere compensata dall'introduzione di un momento con le seguenti caratteristiche:

- modulo pari al prodotto del modulo della forza e della distanza tra le due rette di azione (tra quella 'originale' e quella successiva alla traslazione);
- verso opposto a quello del momento generato dalla forza traslata calcolato rispetto ad un qualsiasi punto appartenente alla retta della direzione originale.

Poiché l'introduzione di tale "coppia di compensazione" risulta spesso di difficile comprensione, nei problemi che verranno affrontati in seguito le forze saranno unicamente traslate lungo la loro direzione.

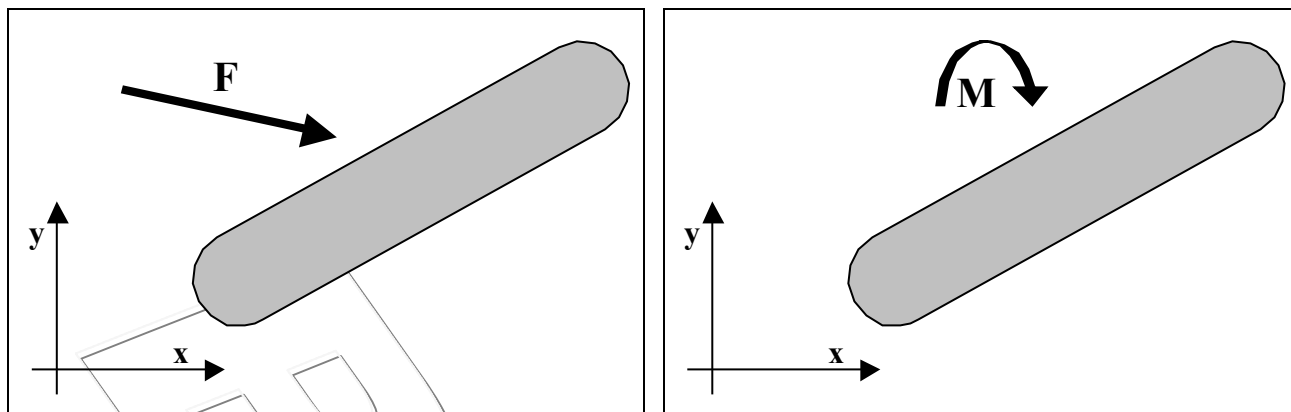
Nei seguenti problemi considereremo solo corpi o sistemi di corpi rigidi collegati tra loro tramite coppie ideali (prive di attrito).

Si ricorda infine che nei problemi di statica **la forma dei corpi rigidi non influenza in alcun modo la soluzione**. Se le forze applicate al corpo e il tipo e le posizioni dei vincoli sono le medesime, il fatto che un corpo rigido sia un'asta, una patata, una sfera o assuma una qualsiasi altra forma geometrica (regolare oppure no) non ha la minima importanza.

2.1. Corpo rigido sottoposto ad una forza o un coppia

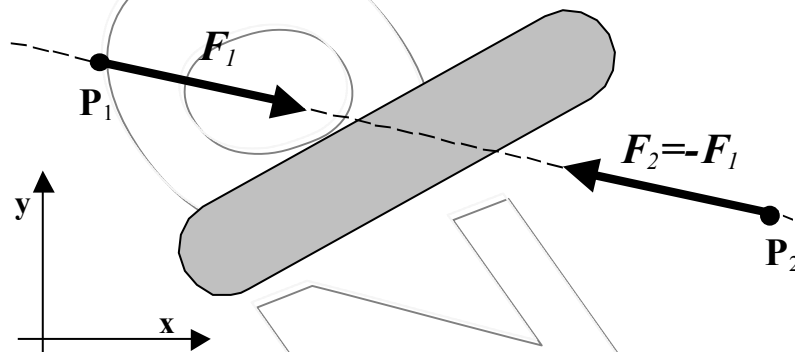
! Un corpo sottoposto ad una sola forza o coppia non nulle non può mai essere in equilibrio :

- se fosse sottoposto ad una unica forza diversa da zero, la prima equazione cardinale (equilibrio alla traslazione) non potrebbe essere verificata. Neanche la seconda equazione cardinale (equilibrio alla rotazione) sarebbe soddisfatta se come polo per il calcolo dei momenti si scegliesse un qualsiasi punto non appartenente alla retta di azione della forza;
- se fosse sottoposto ad un momento diverso da zero, la prima equazione cardinale (equilibrio alla traslazione) sarebbe verificata, ma la seconda (equilibrio alla rotazione) non sarebbe ovviamente soddisfatta.



2.2. Corpo rigido sottoposto a due forze

Se un corpo rigido è sottoposto SOLO a due forze, condizione necessaria e sufficiente perché esso sia in equilibrio è che le due forze costituiscano una **coppia di braccio nullo**, le due forze devono cioè avere lo stesso modulo, la stessa direzione e verso opposto.



Ovviamente è verificata la prima equazione cardinale della statica:

$$\vec{R}^e = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_1) = 0.$$

Anche la seconda equazione cardinale della statica è verificata

$$\vec{M}_o^e = 0 \Rightarrow \vec{M}_o^{(1)} + \vec{M}_o^{(2)} = \vec{F}_1 \wedge (P_1 - O) + \vec{F}_2 \wedge (P_2 - O) = 0$$

infatti se come polo O si sceglie un punto appartenente alla retta di azione delle due forze, entrambe le forze hanno rispetto ad esso momento nullo, essendo nullo il braccio b delle due forze; se come polo O si sceglie un punto non appartenente alla retta di azione delle due forze, entrambe le forze hanno rispetto tale polo il medesimo braccio b , forniscono momenti opposti.

Quindi se un corpo è sottoposto a due sole forze:

- se si conosce completamente una delle due forze (modulo, direzione, verso e retta di applicazione), si può automaticamente conoscere anche l'altra (uguale in modulo, direzione e retta di applicazione ma con verso opposto);
- se non si conosce nessuna delle due forze ma si conoscono i due punti di applicazione (siano P_1 e P_2) (situazione che accade spesso in corrispondenza delle coppie rotoidali), è chiaro che la direzione e la retta di applicazione saranno facilmente identificabili nella retta che contiene il segmento $\overline{P_1 P_2}$.

2.3. Corpo rigido sottoposto a due forze e un momento esterno

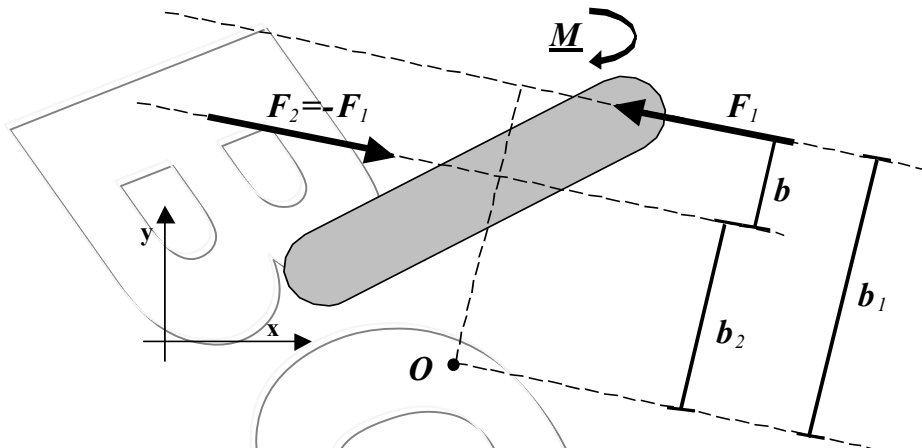
Se un corpo rigido è sottoposto a due forze ed un momento esterno, condizione necessaria perché sia soddisfatta la prima equazione cardinale della statica è che le due forze costituiscano una **coppia**:

$$\vec{R}^e = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_1) = 0$$

Affinché sia soddisfatta la prima equazione cardinale della statica, il momento generato dalla coppia (il cui di modulo sarà pari al prodotto del modulo di una qualsiasi delle due forze per il braccio indipendente dal polo O), dovrà equilibrare il momento esterno $\underline{M}$.

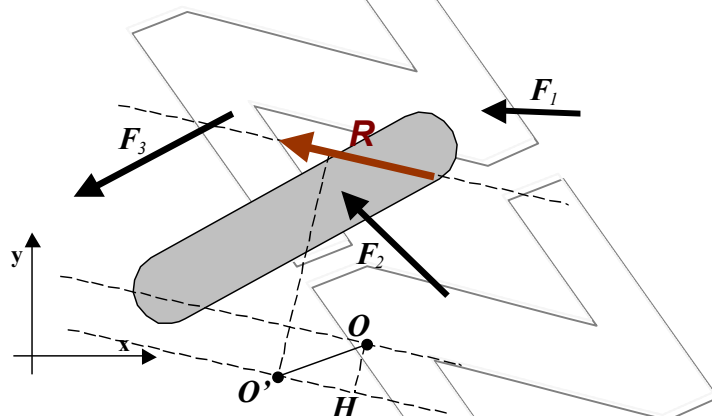
$$\vec{M}_o^e = 0 \Rightarrow \vec{M}_o^{(1)} + \vec{M}_o^{(2)} + \vec{M} = \vec{F}_1 \wedge (P_1 - O) + \vec{F}_2 \wedge (P_2 - O) + \vec{M} = 0$$

e anche $\vec{F}_1 \wedge \vec{b} + \underline{M} = 0$ con $b = b_1 - b_2$, in modulo $F_1 = F_2 = M/b$



Anche cambiando la posizione del polo O il valore della coppia delle due forze non cambia poiché la loro risultante è nulla. Se viceversa la risultante delle forze esterne non fosse stata nulla, al variare del polo (se da O si spostasse O') il valore del loro momento varierebbe come il prodotto tra la risultante delle forze e la distanza tra i due poli calcolata in direzione normale alla risultante R ($\overline{OH}$). L'equazione vettoriale dei momenti diventa, facendo riferimento alla figura seguente:

$$M_{o'}^{(e)} = M_o^{(e)} + R \cdot \overline{OH}.$$



In pratica si ha che **se la prima equazione cardinale della statica è verificata e se si verifica la seconda per un particolare polo O , allora la seconda equazione cardinale della statica sarà verificata anche rispetto ad ogni polo $O' \neq O$.**

Quindi, per un sistema così sollecitato:

- Se si conosce completamente una forza (sia F_1) e il momento esterno $\underline{M}$, si ricavano subito modulo direzione e verso dell'altra forza (sia F_2 , che avrà stesso modulo e direzione ma verso opposto). La retta di applicazione della seconda sarà parallela a quella della prima e a distanza b pari al rapporto dei moduli del momento esterno e delle forze ($b = \underline{M}/F_1$). Tra le due rette di azione che soddisfano tale condizione si sceglie quella che consente di realizzare l'equilibrio alla rotazione del corpo.
- Se si conosce completamente momento esterno $\underline{M}$, e siano noti i punti di applicazione delle due forze unitamente alla direzione di una di loro il problema è comunque facilmente risolvibile. Dovendo le due forze essere equilibrate, allora dovranno costituire una coppia (e quindi le due direzioni saranno le medesime). Conoscendo i due punti di applicazione, si individuano quindi anche le rette di azione. Dalla conoscenza del momento $\underline{M}$ e del braccio

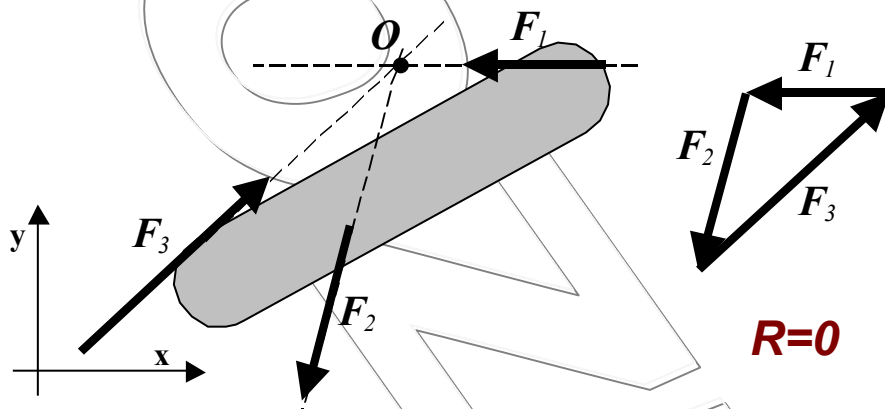
b delle due rette di azione appena identificate si trova subito il modulo comune delle due forze pari al rapporto tra momento applicato e braccio ($F_1=F_2=M/b$). Rimane da individuare i versi delle due forze, ma questa è una operazione molto semplice in quanto basta fare in modo che la coppia generata dalle due forze sia opposta al momento applicato.

2.4. Corpo rigido sottoposto a tre forze

Se un corpo rigido è sottoposto a tre forze, **condizione necessaria perché la risultante delle forze sia nulla è che si chiuda il cosiddetto triangolo delle forze**. In pratica deve verificarsi anche graficamente la seguente relazione:

$$\vec{R}^e = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0.$$

Per verificare tale relazione basta prendere una qualsiasi delle tre forze (sia F_1), traslare una seconda forza (sia F_2) fino a portare la sua origine sul vertice della prima; si trasla poi anche la terza forza (sia F_3) fino a portare la sua origine sul vertice della seconda precedentemente traslata. Se l'origine del vettore rappresentante la prima forza (F_1) e il vertice del terzo (F_3) coincidono, le tre forze hanno costruito un triangolo (e più in generale una figura geometrica chiusa). In questo caso il sistema di forze ha risultante nulla, e quindi è soddisfatta la prima equazione cardinale della statica.

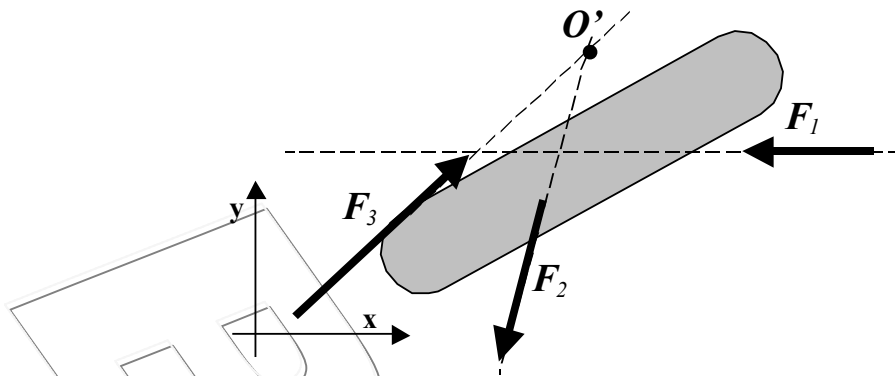


Si dimostra inoltre che **condizione necessaria perché il momento risultante sia nullo** (che diventa anche condizione sufficiente se si è già verificata la costruzione del triangolo delle forze) **è che le forze devono essere incidenti in un unico punto⁹ O**.

Infatti se tutte e tre le forze passano per lo stesso punto O , è evidente che rispetto ad esso hanno tutte momento nullo per cui la seconda equazione cardinale della statica sarebbe banalmente verificata.

Al contrario, se per assurdo le tre le forze non passassero per lo stesso punto, basterebbe osservare che rispetto al polo O' , punto di incontro tra le rette di applicazione di due forze (siano F_1 e F_2), il momento della terza forza (F_3) è non nullo. Anche il momento risultante delle tre forze rispetto ad O' , sarebbe dunque non nullo; quindi rispetto a O' la seconda equazione cardinale della statica non sarebbe verificata ed il corpo non potrebbe quindi essere in equilibrio.

⁹ Il punto O può essere anche improprio, nel qual caso si avrebbe che le tre forze sarebbero parallele, e il triangolo delle forze degenererebbe in tre segmenti allineati sulla stessa retta.

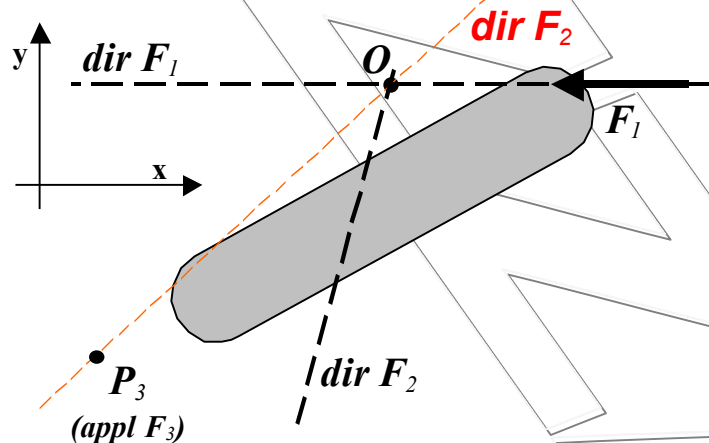


Sono molti i casi applicativi in cui si avrà a che fare con un corpo sottoposto a tre forze, e molte le considerazioni che potrebbero essere tratte dalle regole pratiche su indicate (triangolo delle forze e incidenza delle rette di azione). Non si ritiene né utile né facile trattare estensivamente e in via teorica tutti i casi applicativi connessi a tale schema (di cui peraltro si farà largo uso negli esercizi, svolti e proposti anche durante le lezioni). Tuttavia il caso più ricorrente sarà quello in cui delle tre forze:

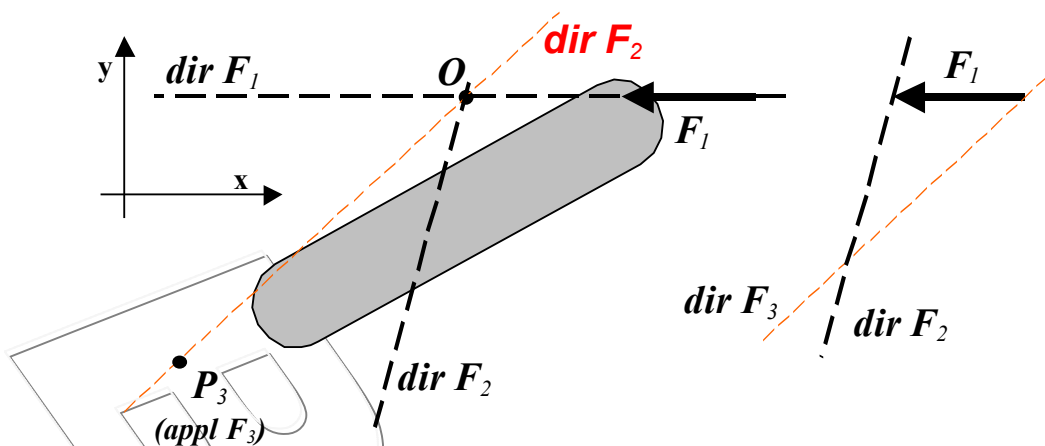
- una (sia F_1) è completamente nota;
- di un'altra (sia F_2) è nota la retta di azione;
- dell'ultima (sia F_3) è noto il punto di applicazione.

In questo caso si prosegue come segue:

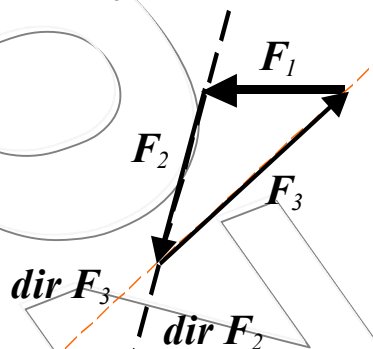
1. deve dapprima essere individuata la retta di azione della terza forza F_3 . Per fare ciò si prolungano le rette di azione delle forze F_1 e F_2 fino a che si incontrano in un punto O . Per l'equilibrio ai momenti anche la forza F_3 dovrà passare per O e, essendo già era noto il punto di applicazione P_3 , la retta di applicazione passa per i punti P_3 e O .



2. trovate le tre rette di azione è necessario chiudere il triangolo delle forze. Si parte dalla forza nota F_1 e si trasla sul vertice la retta di azione di una forza (sia F_2) e sull'origine la retta di azione dell'altra (sia F_3).

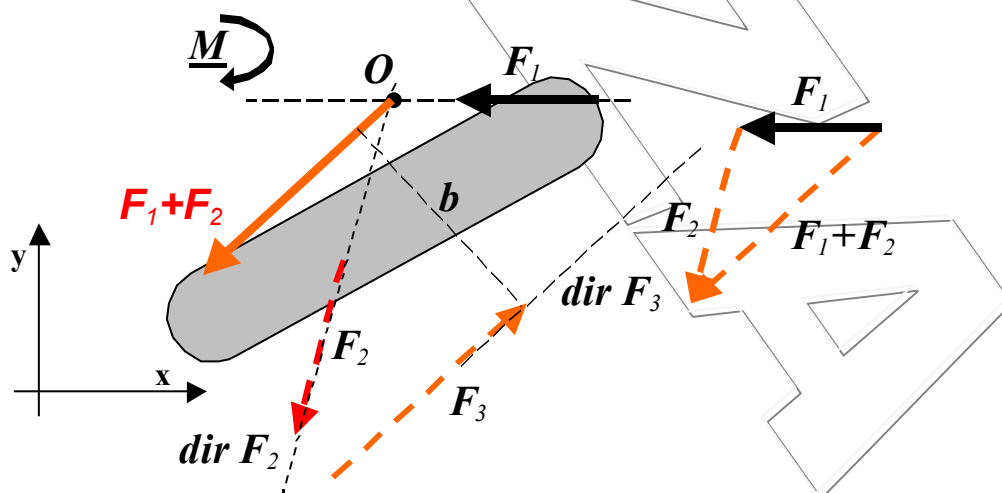


3. Per “chiudere il triangolo” bisogna fare in modo che la somma vettoriale $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ sia pari a zero quindi bisognerà fare in modo che il vertice di ciascun vettore coincida con l’origine di un altro (i vettori devono “mordersi la coda”) ed inoltre il vertice della forza F_3 deve coincidere con l’origine di F_1 .



2.5. Corpo rigido sottoposto a tre forze ed un momento

Se un corpo rigido è sottoposto a tre forze ed un momento, è chiaro che NON potrà essere in equilibrio se le tre forze sono incidenti. La tecnica che si usa è di solito quella di sommare due delle tre forze e ridursi ad un caso più semplice e già noto (Caso 3).



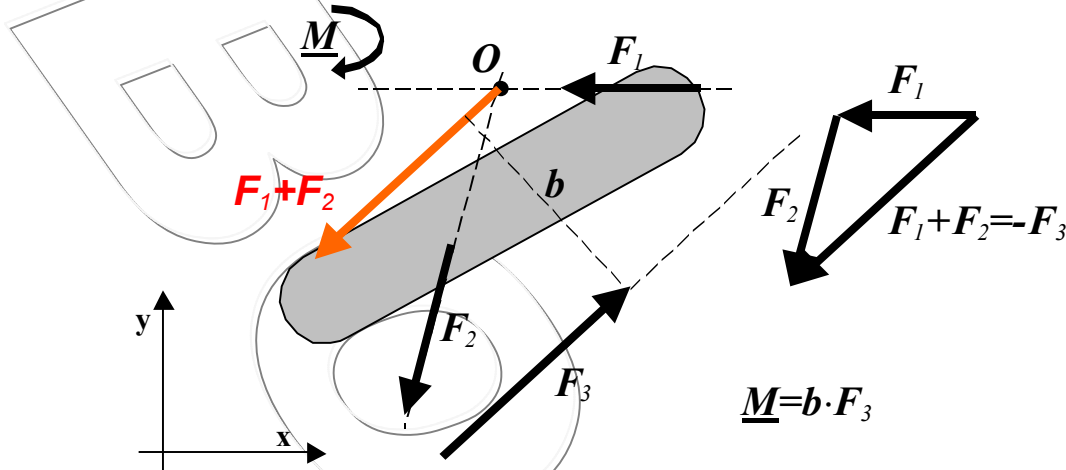
Anche in questo caso sono molti i casi applicativi in cui si potrebbe avere a che fare, e quindi non verranno trattati tutti gli aspetti ad esso connessi, tuttavia un caso abbastanza ricorrente è quello che segue:

- Il momento $\underline{M}$ è completamente noto;
- una forza (sia F_1) è completamente nota;

- di una forza (sia F_2) sia nota la retta di azione;
- dell'altra forza (sia F_3) sia nota la direzione.

In questo caso si prosegue come segue:

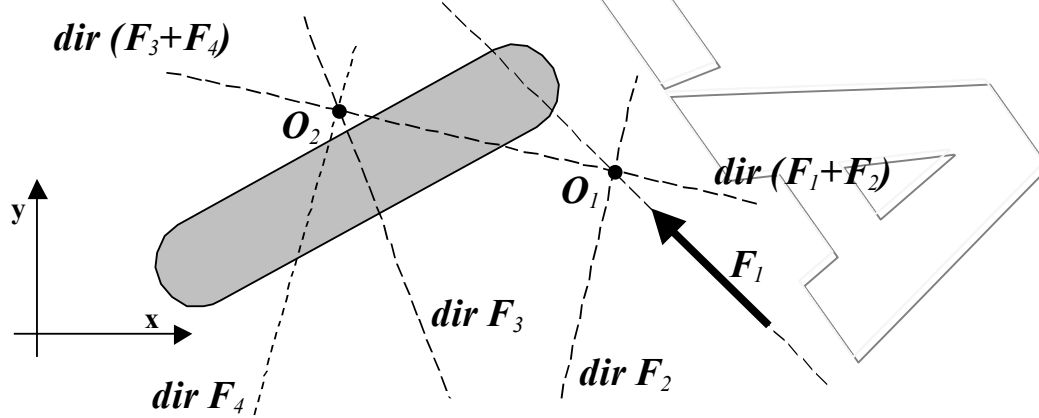
1. Poiché le direzioni sono già note è sufficiente trovare i moduli, i versi e la retta di azione della F_3 . Se la forza F_1 è nota, allora per l'equilibrio alla traslazione la somma (F_1+F_2) dovrà fornire un vettore opposto alla F_3 (ovvero anche $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0$). Calcolando questo triangolo delle forze (si può fare visto che si conoscono tutte le direzioni, e modulo e verso di una delle forze) si possono calcolare moduli e versi di tutte le forze



2. Rispetto al punto O , dove si può pensare applicata la somma (F_1+F_2), le due forze hanno momento nullo quindi sarà il momento della forza F_3 a dover equilibrare il momento applicato $\underline{M}$. Da questa osservazione si ricava il braccio b della forza F_3 e quindi la sua retta di azione.

2.6. Corpo rigido sottoposto quattro forze

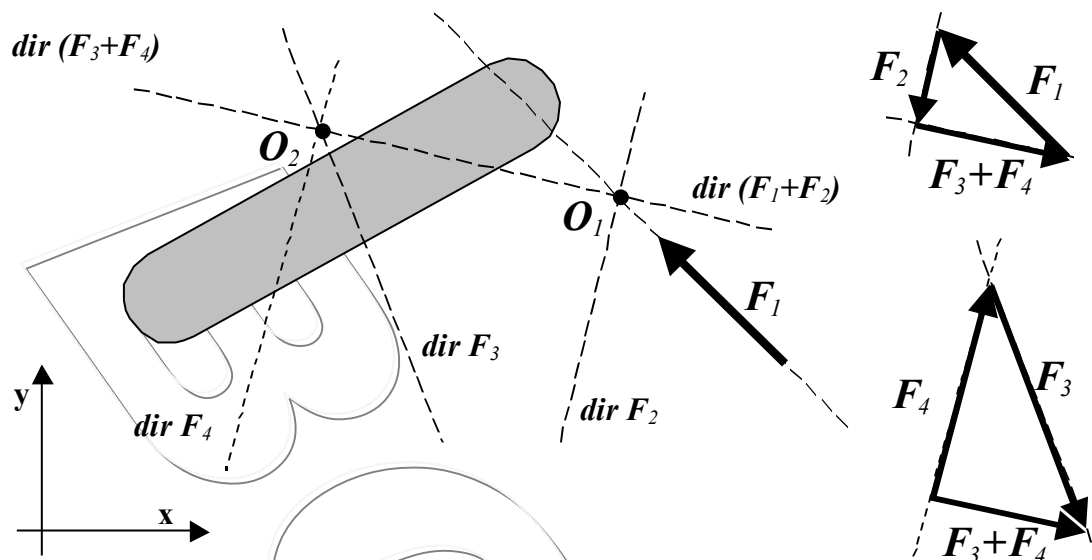
Se un corpo rigido è sottoposto a quattro forze, è chiaro che NON si potrà usare la tecnica del triangolo delle forze. Si potrà comunque utilizzare l'artificio di **sommare le forze a due a due** per ridursi al caso più semplice possibile: quello di un corpo sottoposto a due sole forze. Si ricorda che della somma di due forze di cui sia nota la sola retta di azione non si può conoscere a priori praticamente nulla (modulo, direzione, verso), tranne che individuare uno dei punti della sua retta di azione (che quindi può essere preso come 'punto di applicazione' della somma); tale punto è dato dall'intersezione delle rette di azione delle rette che si vanno a sommare¹⁰.



Tra i vari casi, sicuramente il più ricorrente è quello in cui:

¹⁰ Tale punto può essere anche improprio, tale caso si verifica quando le rette sono tra loro parallele.

- una forza (sia F_1) è completamente nota;
- delle altre forze (siano F_2, F_3 e F_4) sia nota la retta di azione.



In questo caso si prosegue come segue:

1. Si prolungano le rette di azione di F_1 e F_2 fino ad incontrare il punto di intersezione O_1 in cui può pensarsi applicata la loro somma;
2. Si prolungano le rette di azione di F_3 e F_4 fino ad incontrare il punto di intersezione O_2 in cui può pensarsi applicata la loro somma;
3. Il sistema di quattro forze si è ridotto alle due forze (F_1+F_2) e (F_3+F_4) , di cui si conosce il punto di applicazione. Poiché due forze per farsi equilibrio devono costituire una coppia di braccio nullo, unendo i punti O_1 e O_2 si ottiene la direzione della retta di azione comune alle due forze (F_1+F_2) e (F_3+F_4) ;
4. Basta a questo punto chiudere i due triangoli delle forze che corrispondono alle due seguenti relazioni vettoriali, ciascuna contenente 3 termini:
 - $F_1+F_2+(F_3+F_4)=0$;
 - $(F_1+F_2)+F_3+F_4=0$;
5. Si inizia dalla relazione $F_1+F_2+(F_3+F_4)=0$, di cui si conosce completamente un termine e le rette di azione degli altri, con cui si può costruire un triangolo da cui ricavare il termine (F_3+F_4) ;
6. Individuato quindi il termine (F_3+F_4) basta trovare le due forze F_3 e F_4 , note in direzione, la cui somma è pari il termine già ricavato al punto precedente.

2.7. La ruota nella locomozione

2.7.1. Ruota trascinata

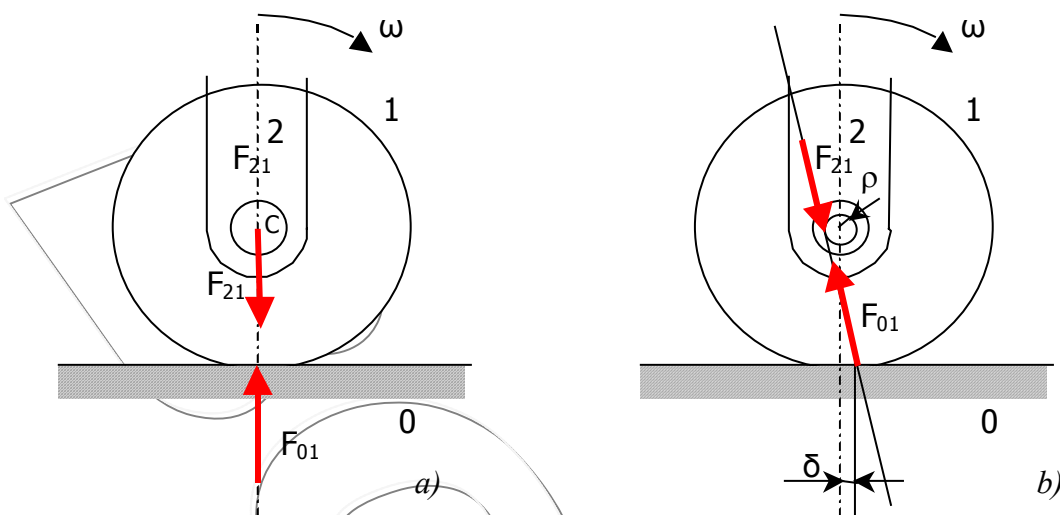


Figura 11: Ruota trascinata, a) caso ideale, b) caso reale.

Sulla ruota agiscono due sole forze:

- la reazione $\mathbf{F}_{21}$ che il veicolo 2 applica alla ruota (corpo 1), nella coppia rotoidale con asse passante per il punto C e ortogonale al piano della figura;
- la forza di contatto $\mathbf{F}_{01}$.

Affinché un corpo, sotto l'azione di due sole forze, sia in equilibrio è necessario che queste due forze abbiano la stessa retta d'azione, lo stesso modulo e verso opposto.

- La forza $\mathbf{F}_{21}$ in condizioni ideali passa per l'asse di rotazione della coppia rotoidale, in condizioni reali però, a causa dell'attrito, sarà tangente a una circonferenza con centro in C e raggio $\rho = r \sin \varphi$ (circolo d'attrito, r è il raggio del perno e φ l'angolo d'attrito).
- La forza $\mathbf{F}_{01}$ in condizioni ideali passa per il punto di contatto geometrico tra ruota e strada, in condizioni reali, a causa della non perfetta deformabilità dei materiali, il punto di applicazione sarà spostato rispetto al punto di contatto geometrico di una quantità δ (parametro di attrito volvente).

Utilizzando queste informazioni è possibile determinare la direzione delle forze scambiate (vedi figura).

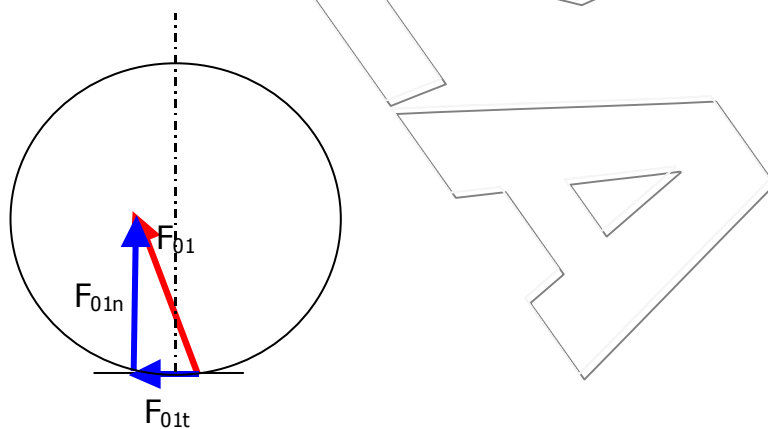


Figura 12: Componente normale e tangenziale della forza di contatto.

La forza di contatto F_{01} può essere scomposta in una componente normale F_{01n} e una tangenziale F_{01t} . Se il rapporto tra le due componenti $\frac{F_{01t}}{F_{01n}}$ è inferiore al coefficiente di attrito statico f_s la ruota rotola senza sulla strada, viceversa se $\frac{F_{01t}}{F_{01n}} > f_s$ la ruota slitta.

Riassumendo:

- $\frac{F_{01t}}{F_{01n}} < f_s$ la ruota non slitta;
- $\frac{F_{01t}}{F_{01n}} > f_s$ la ruota slitta.

2.7.2. Ruota trascinata

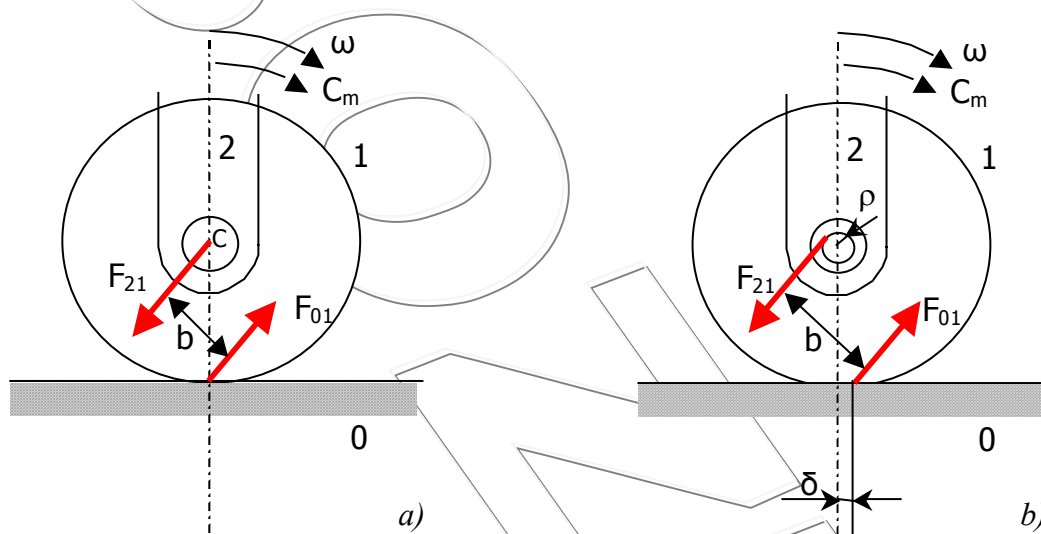


Figura 13: Ruota motrice, a) caso ideale, b) caso reale.

Sulla ruota agiscono due forze e una coppia:

- la reazione F_{21} che il veicolo 2 applica alla ruota (corpo 1), nella coppia rotoidale con asse passante per il punto C e ortogonale al piano della figura;
- la forza di contatto F_{01} ;
- la coppia motrice C_m .

Anche in questo caso si possono fare le seguenti considerazioni per determinare le direzioni delle due forze:

- La forza F_{21} in condizioni ideali passa per l'asse di rotazione della coppia rotoidale, in condizioni reali però, a causa dell'attrito, sarà tangente a una circonferenza con centro in C e raggio $\rho = r \sin \varphi$ (circolo d'attrito, r è il raggio del perno e φ l'angolo d'attrito).
- La forza F_{01} in condizioni ideali passa per il punto di contatto geometrico tra ruota e strada, in condizioni reali, a causa della non perfetta deformabilità dei materiali, il punto di applicazione sarà spostato rispetto al punto di contatto geometrico di una quantità δ (parametro di attrito volvente).

Affinché la ruota sia in equilibrio è necessario che sia verificata la seguente uguaglianza:

$$|C_m| = |F_{01}|b$$

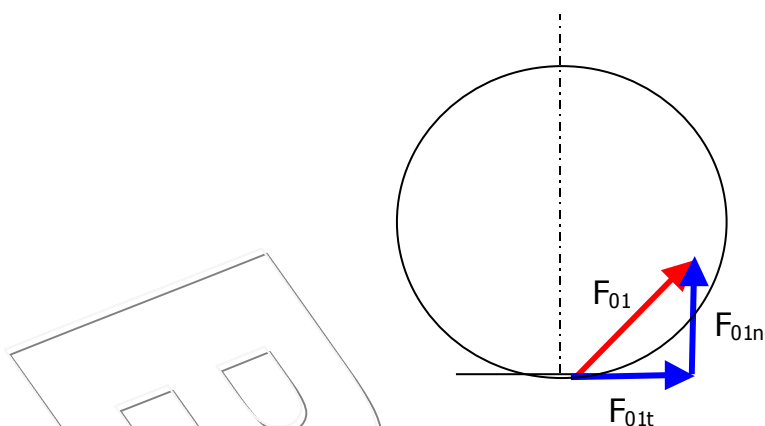


Figura 14: Componente normale e tangenziale della forza di contatto.

Anche in questo caso,

- se $\frac{F_{01t}}{F_{01n}} < f_s$ la ruota non slitta;
- se $\frac{F_{01t}}{F_{01n}} > f_s$ la ruota slitta.

2.7.3. Ruota frenata

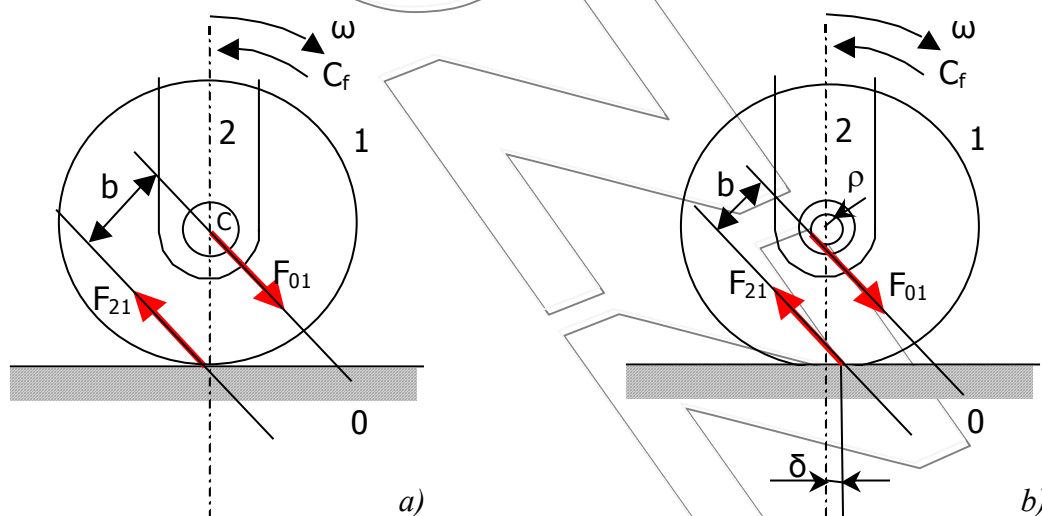


Figura 15: Ruota frenata, a) caso ideale, b) caso reale.

Sulla ruota agiscono due forze e una coppia:

- la reazione $\mathbf{F}_{21}$ che il veicolo 2 applica alla ruota (corpo 1), nella coppia rotoidale con asse passante per il punto C e ortogonale al piano della figura;
- la forza di contatto $\mathbf{F}_{01}$;
- la coppia frenante $\mathbf{C}_f$.

Per definire le direzioni delle due forze si possono fare le stesse considerazioni viste per la ruota trainata e motrice. Affinché la ruota sia in equilibrio è necessario che sia verificata la seguente uguaglianza:

$$|\mathbf{C}_f| = |\mathbf{F}_{01}|b$$

2.7.4. Esempio

Si consideri il veicolo riportato in figura 16. La ruota anteriore 1 è trascinata, la ruota 2 è motrice. Sul veicolo è applicata una forza normale Q e una forza tangenziale T , nel punto A del veicolo. Sono assegnati per ciascuna delle ruote i raggi dei corrispondenti cerchi d'attrito e il parametro dell'attrito volvente. È possibile determinare facilmente la risultante R delle forze Q e T .

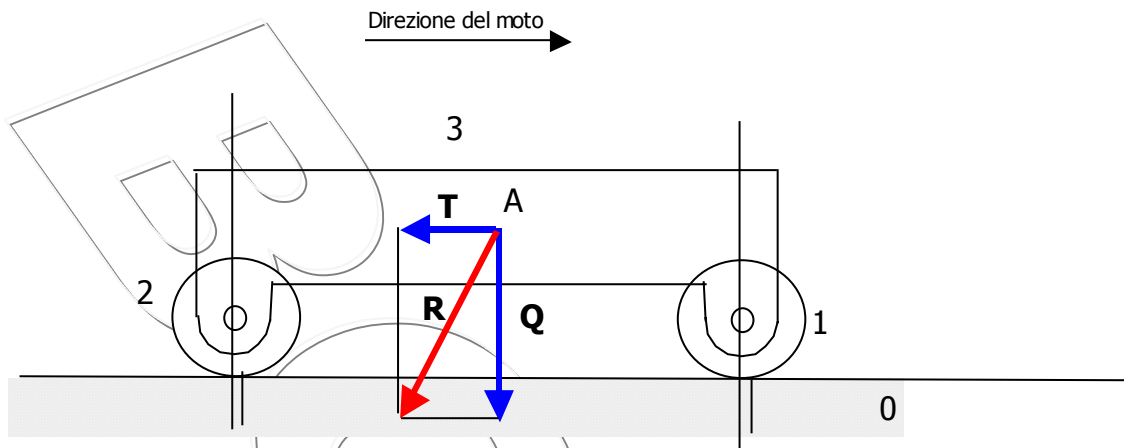


Figura 16: Dati dell'esempio.

Si analizza l'equilibrio del veicolo e delle due ruote. Il sistema è in equilibrio sotto l'effetto di tre forze: la forza R e le due forze di contatto F_{01} e F_{02} . La direzione della F_{01} può essere determinata, dato che la ruota 1 è trascinata, in accordo a quanto visto in precedenza. Per quanto riguarda la F_{02} , a priori è noto solo il punto di applicazione. La direzione della F_{02} può però essere determinata tenendo conto del fatto che, per avere l'equilibrio alla rotazione del veicolo, è necessario che le tre rette d'azione si intersechino in un punto (figura 17).

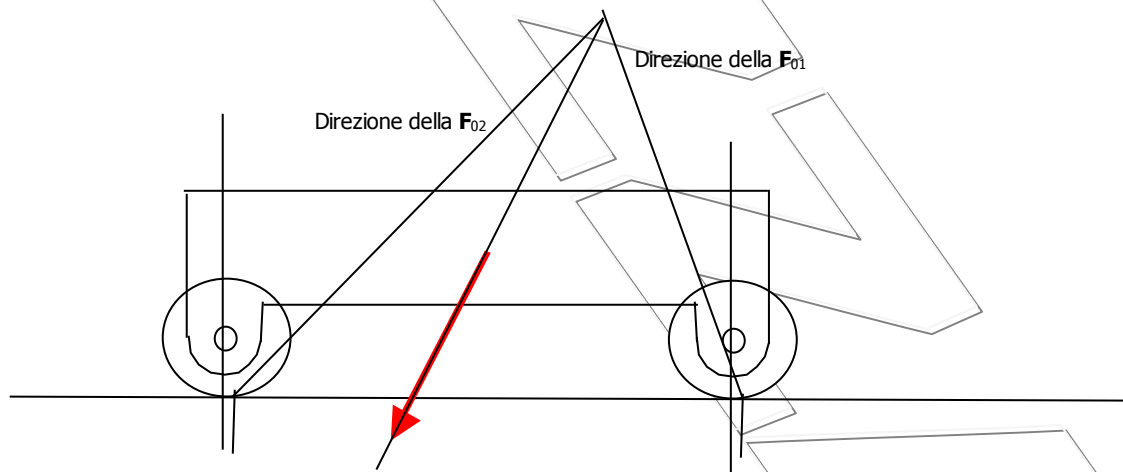


Figura 17: Direzioni delle forze di contatto.

Una volta determinate le tre direzioni è possibile determinare i moduli delle tre forze (figura 18). Conoscendo il modulo della F_{02} è infine possibile determinare il modulo della coppia motrice C_m (figura 19):

$$|C_m| = |F_{02}|b$$

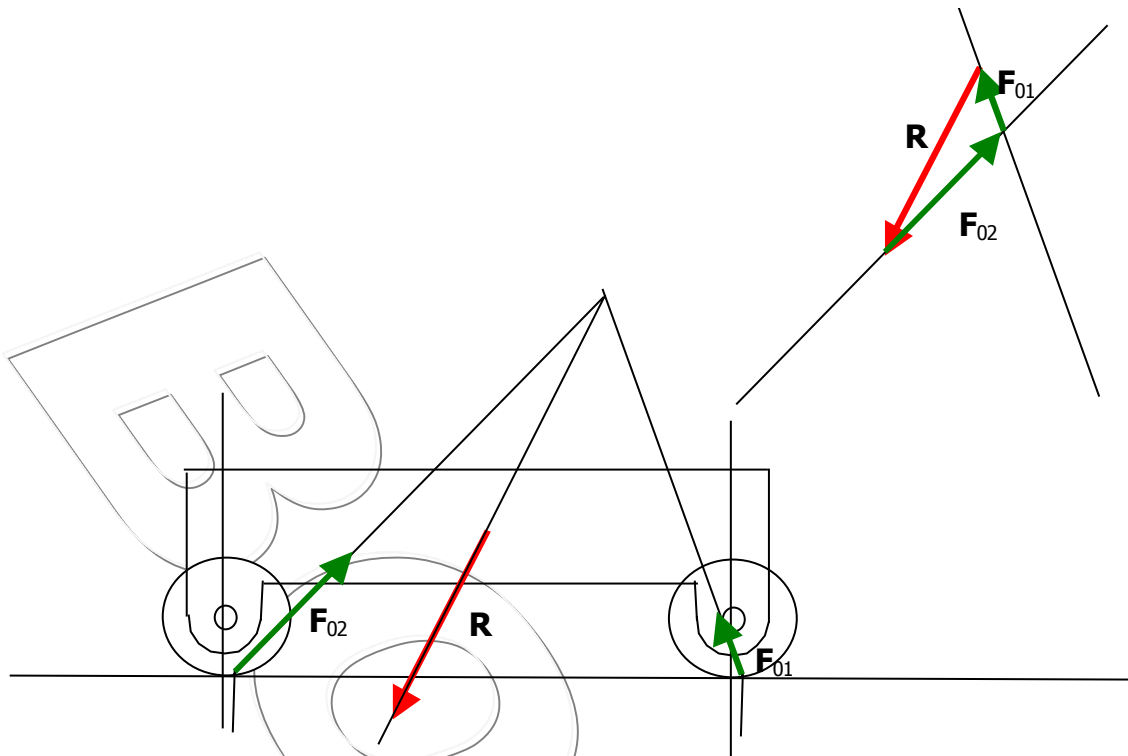


Figura 18: Calcolo delle forze di contatto.

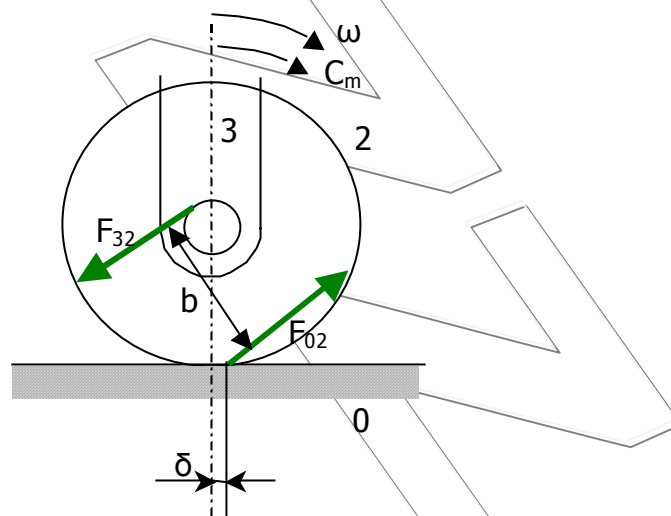
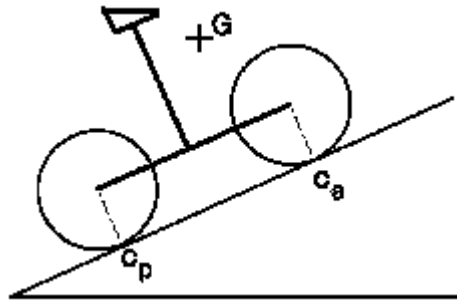


Figura 19: Equilibrio della ruota motrice.

2.7.5. Esercizio

La figura seguente rappresenta un motociclo in salita; ammettiamo trascurabile l'inerzia delle ruote e del motociclista (tanto è vero che è trasparente...); sia M la massa del telaio del motociclo, sia G il centro di massa del telaio ed $\vec{a}$ l'accelerazione del sistema.

Si determini, in maniera grafica, la coppia motrice che è necessario il telaio applichi alla ruota posteriore.

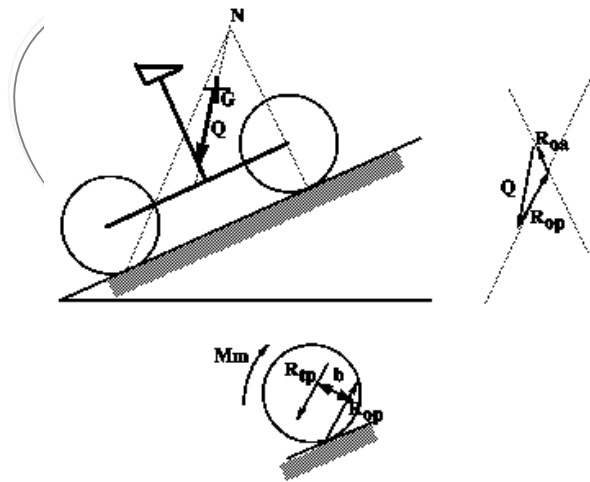


Sul telaio, oltre alle forze vincolari ed alla reazione alla coppia motrice, agiranno le seguenti forze esterne:

- le forze “reali” di gravità equivalenti a $M\bar{g}$ applicata in G;
- le forze di inerzia equivalenti a $-M\bar{a}$ applicata in G.

Componendo queste forze troviamo la forza Q applicata in G.

A questo punto il problema diviene “statico”.

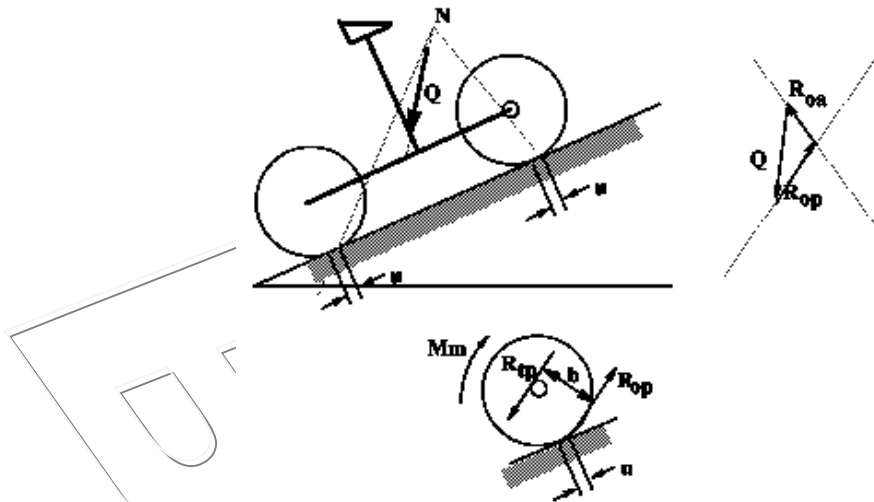


Risolviamolo prima nel caso ideale, annullando le cause di perdita (attrito radente cinetico, attrito volvente) e non l'attrito adesivo che permette il rotolamento ruota-strada!! Indichiamo con il pedice t il complesso telaio-motociclista, p la ruota posteriore, a ruota anteriore, O la strada.

Si noti che per l'equilibrio della ruota anteriore è subito immediata la retta d'azione delle R_{oa} e R_{ta} che passa per il punto di contatto teorico C_a ed il centro della ruota.

Facendo un bilancio delle incognite è immediato constatare che è subito applicabile l'equilibrio al sistema complessivo (problema delle tre forze).

Successivamente è facilmente risolvibile l'equilibrio della ruota posteriore, da cui si determina la coppia motrice M_m (esterna alla ruota, ma interna al sistema complessivo!!)



Risolviamolo adesso nel caso reale. La procedura è analoga al caso ideale. La differenza sta nel fatto che le rette d'azione delle reazioni della strada sulle ruote passano per un punto spostato in avanti di u rispetto ai punti di contatto teorici e che le reazioni del telaio sulle ruote tramite le coppie rotoidali devono essere tangenti ai cerchi d'attrito (si suppongono uguali parametri dell'attrito volvente ed uguali cerchi d'attrito per le due ruote). Considerando l'equilibrio della ruota anteriore, sottoposta a R_{0a} e R_{ta} , si ha una inizialmente una duplice possibilità per la loro comune retta d'azione, subito chiarita rifacendosi al caso ideale e ricordando che la scelta opportuna è quella per cui l'attrito ostacola il moto. A questo punto è immediato fare l'equilibrio del sistema complessivo, ricavare R_{0a} , e con questo, tramite l'equilibrio della ruota posteriore, ricavare la coppia motrice, evidentemente più grande rispetto al caso ideale.

3. Centro di istantanea rotazione

Consideriamo il moto piano istantaneo di un corpo A individuato da una rotazione con velocità angolare ω attorno ad un asse ortogonale al piano del moto e dalla traslazione di un suo punto con velocità V_P .

La velocità di un qualunque punto S del piano è data dalla formula fondamentale dei moti rigidi:

$$\vec{V}_S = \vec{V}_P + \vec{\omega} \wedge (S - P)$$

Esiste un punto C sulla normale a V_P condotta per P che ha velocità nulla, tale punto è chiamato centro istantaneo di rotazione. Scrivendo la velocità di P rispetto a C si ha: $\vec{V}_P = \vec{\omega} \wedge (P - C)$

la distanza x tra P e C è data da $x = \frac{|\vec{V}_P|}{\omega}$

Se conosciamo il punto di istantanea rotazione e la velocità angolare del moto rigido conosciamo la direzione della velocità in ciascun punto di un sistema meccanico. Infatti $\vec{V}_S = \omega \wedge CS$

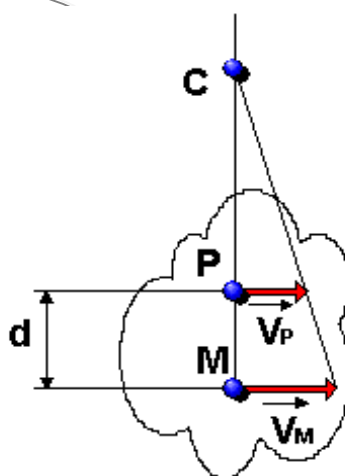


Figura 20: Utilità del Centro di Istantanea Rotazione

Nota la velocità di punto P e il centro istantaneo di rotazione è possibile determinare la velocità di qualsiasi punto del corpo M, vedi figura 20.

La determinazione del centro di istantanea rotazione è particolarmente interessante nello studio dei sistemi articolati, per il calcolo delle velocità e il tracciamento delle traiettorie.

In particolare se si vuole studiare il moto di un membro rispetto ad un altro è opportuno individuare il centro di istantanea rotazione nel moto relativo.

3.1. Centri di istantanea rotazione di un manovellismo di spinta

Conosciamo le direzioni delle velocità del punto A (perpendicolare alla manovella) e del pistone (traslazione orizzontale).

Pertanto tracciando le normali alle direzioni delle velocità indicate per i punti A e B, il punto C_{13} individua il centro di istantanea rotazione del moto relativo della biella intorno al telaio.

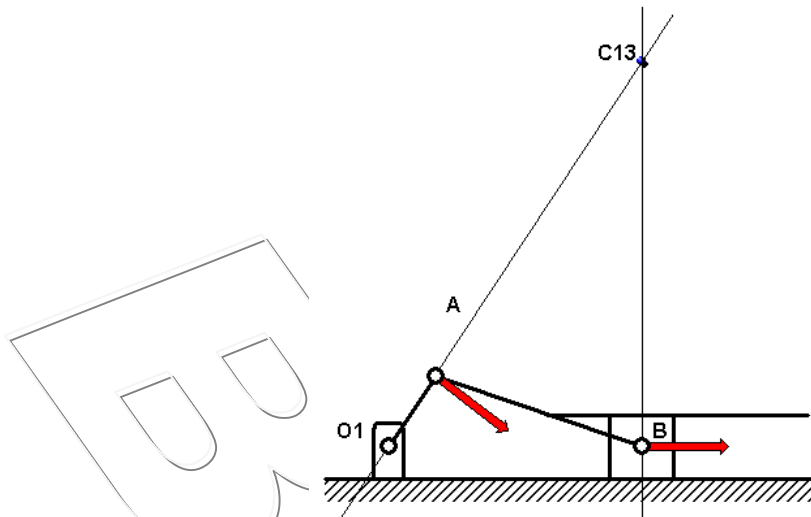


Figura 21: Centro di istantanea rotazione della biella del manovellismo di spinta

3.2. Centri di istantanea rotazione del quadrilatero articolato

Consideriamo un quadrilatero articolato come quello rappresentato sotto. Si tratta di un dispositivo con 1 grado di libertà.

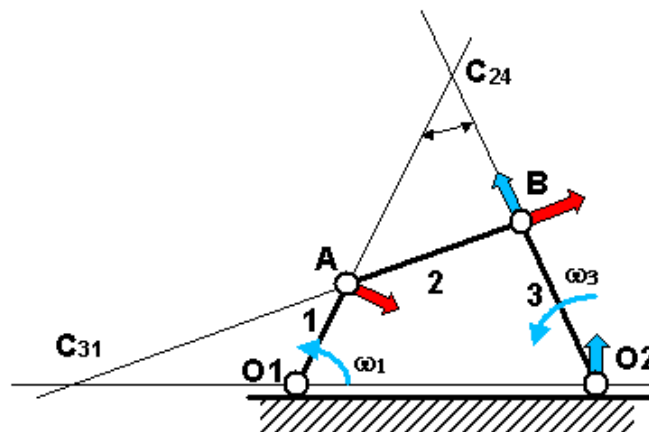


Figura 22: Centro di istantanea rotazione della biella del quadrilatero articolato

I punti O_1 e O_2 sono i centri di rotazione delle aste 1 e 3. L'asta 2 ha un moto di istantanea rotazione attorno al punto C_{24} che è il centro di rotazione del membro 2 rispetto al membro 4 (telaio), lo si trova semplicemente considerando che le traiettorie dei punti A e B della biella sono ortogonali ad O_1A e O_2B . In moto analogo si può determinare C_{31} il centro di istantanea rotazione del membro 3 nel suo moto rispetto al membro 1.

A proposito dell'utilità della determinazione del punto C_{31} si osserva che mentre il punto C_{24} , ha, nell'istante considerato velocità nulla, nel punto C_{31} la velocità relativa dei membri 1 e 3 è nulla.

$$\omega_3 \cdot \overline{O_3 C_{31}} = \omega_1 \cdot \overline{O_1 C_{31}}$$

$$\text{da cui: } \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\overline{O_1 C_{31}}}{\overline{O_3 C_{31}}}$$

Noto C_{31} si può determinare il rapporto tra le velocità angolari dei membri incernierati al telaio, tale rapporto è positivo, cioè le velocità di rotazione sono concordi, se il centro di rotazione è esterno al segmento O_1O_2 , mentre è negativo, cioè le velocità sono discordi, se il centro di rotazione è interno al segmento O_1O_2 .

3.3. Centro di istantanea rotazione di due ruote dentate

Consideriamo un meccanismo formato da due ruote dentate.

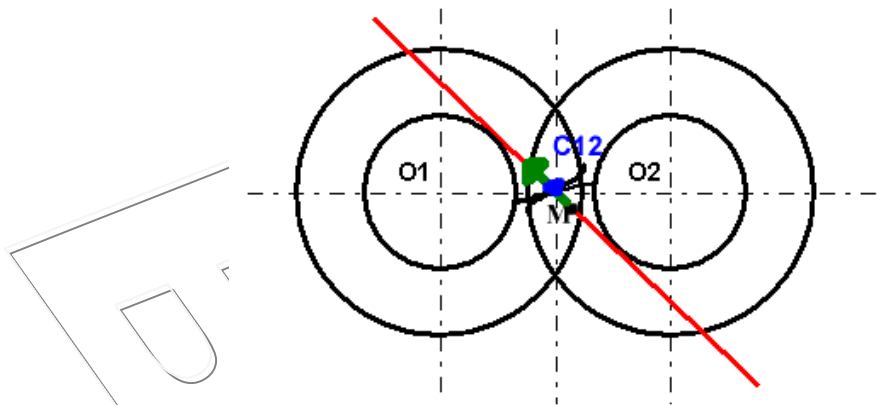


Figura 23: Centro di istantanea rotazione delle ruote dentate

Per trovare il centro di istantanea rotazione del moto relativo, immaginiamo di fissare la ruota 1 e determiniamo C_{21} cioè il centro del moto del membro 2 rispetto al membro 1, che si trova nel punto di intersezione delle normali alle traiettorie dei punti O_2 e M , ossia nel punto di intersezione della retta per O_1O_2 con la normale in M ai profili coniugati.

In particolare risulta:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{O_1C_{21}}{O_2C_{21}}$$

Anche in questo caso la conoscenza di C_{21} permette di determinare il rapporto tra le velocità (rapporto di trasmissione), essendo poi C_{21} interno a O_1O_2 le velocità angolari sono discordi.

! Si ricordi il teorema delle catene cinematiche, che risulta utile per lo studio dei moti rigidi piani :

Nel moto piano di due corpi rigidi i e j indicando con

C_i : centro d'istantanea rotazione di i ;

C_j centro d'istantanea rotazione di j ;

C_{ij} centro d'istantanea rotazione relativa di i rispetto a j ;

$C_i C_j C_{ij}$ devono essere allineati (in caso contrario non è possibile moto relativo).

4. Sistemi articolati

Un **sistema articolato** è un meccanismo formato da un certo numero di membri (aste) collegati fra loro da coppie elementari.

I sistemi articolati possono essere:

- piani: se gli assi di tutte le coppie sono paralleli fra loro.
- sferici: se gli assi di tutte le coppie sono incidenti in punto.
- generali: se gli assi delle coppie sono comunque sghembi.

Il membro fisso costituisce il telaio.

Se il meccanismo ha un solo grado di libertà sussiste la seguente relazione:

$$a = 2n - 4 \quad \begin{cases} n = \text{numero di coppie rotanti} \\ a = \text{aste} \end{cases}$$

4.1. Quadrilatero articolato

È il più semplice sistema articolato, possiede 4 coppie rotoidali e conseguentemente 4 aste. Sia AD il lato fisso (telaio); i lati adiacenti AB e CD si chiamano manovella o bilanciere a seconda che essi possano compiere un'intera rotazione attorno all'asse della coppia che li collega al telaio, oppure compiano una corsa limitata ad un settore. Il lato opposto al telaio prende il nome di biella (BC).

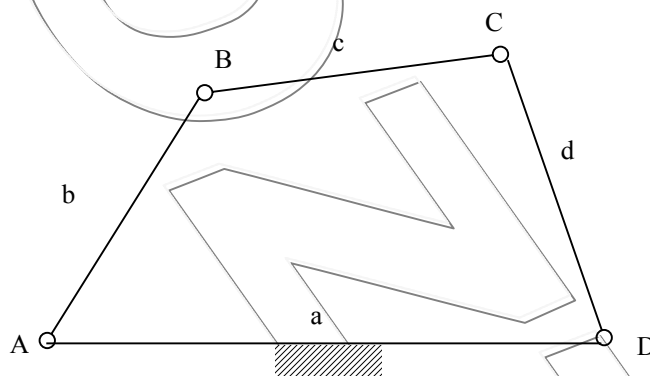


Figura 24: Schema cinematico del quadrilatero articolato

Il quadrilatero articolato è comunemente usato per trasformare un moto rotatorio continuo (movente=manovella) in un moto rotatorio alternato (bilanciere=cedente).

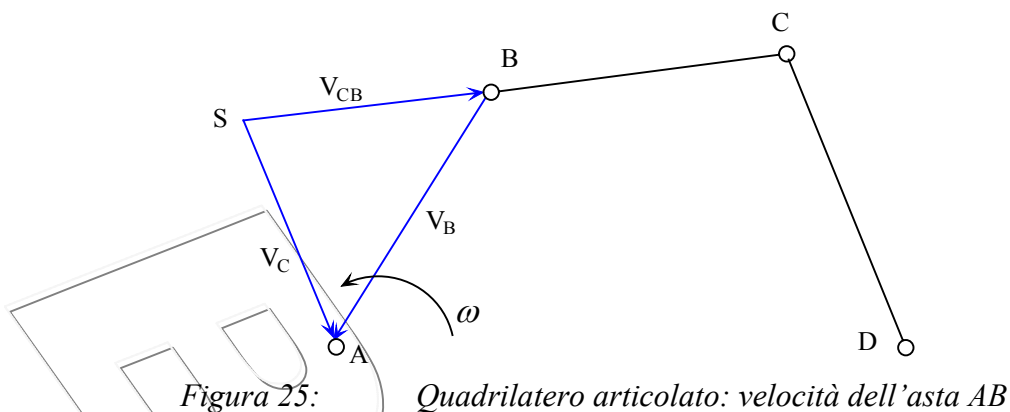
Regola di Grashof

Indicate con a e b le lunghezze dei lati maggiore e minore di un quadrilatero con c e d le lunghezze degli altri due lati si calcolino le somme $a+b$ e $c+d$.

se:

- $a+b > c+d$ il quadrilatero ha solo bilancieri;
- $a+b < c+d$ il quadrilatero ha:
 - 2 bilancieri se funge da telaio il lato opposto al più corto;
 - 2 manovelle se funge da telaio un lato adiacente a quello più corto.
- $a+b = c+d$ il quadrilatero diviene un parallelogramma articolato e ha sempre due manovelle.

4.1.1. Studio cinematico del quadrilatero articolato



Dalla formula fondamentale dei moti rigidi poiché l'asta AB ruota intorno ad A, la velocità del punto B risulta:

$$\underline{V}_B = \omega \wedge (B - A)$$

di modulo $|\underline{V}_B| = \omega \overline{BA}$

Per procedere nella risoluzione grafica utilizziamo adesso la seguente convenzione:

! rappresentiamo le velocità a meno di ω e ruotate di $\pi/2$ nel senso del moto cosicché la velocità del punto B è rappresentata dal segmento orientato BA

$$\frac{\underline{V}_B}{\omega} = (A - B)$$

Il punto C ruota intorno al punto D, la sua velocità sarà perciò diretta come CD.

Inoltre tale velocità può essere considerata anche come la somma vettoriale tra la velocità del punto B e la velocità della biella intorno a B $\underline{V}_C = \underline{V}_B + \underline{V}_{CB}$, si può quindi scrivere.

$$\frac{\underline{V}_C}{\omega} = \frac{\underline{V}_B}{\omega} + \frac{\underline{V}_{CB}}{\omega}$$

La velocità reale di C rispetto a B è ortogonale al segmento BC, può essere quindi rappresentata con un vettore diretto come BC. La precedente equazione vettoriale può essere risolta graficamente come riportato in figura 25:

$$\frac{\underline{V}_{CB}}{\omega} = (B - S); \quad \frac{\underline{V}_C}{\omega} = (A - S); \quad \frac{\underline{V}_B}{\omega} = (A - B);$$

Analogamente si procede per trovare la velocità di un punto rigidamente collegato alla biella.

Infatti si può scrivere la velocità di un qualsiasi punto P sia rispetto ad B sia rispetto C, cioè:

$$\frac{\underline{V}_P}{\omega} = \frac{\underline{V}_B}{\omega} + \frac{\underline{V}_{PB}}{\omega};$$

$$\frac{\underline{V}_P}{\omega} = \frac{\underline{V}_C}{\omega} + \frac{\underline{V}_{PC}}{\omega};$$

La $\underline{V}_{PB}$ ha la direzione di PB, la $\underline{V}_{PC}$ ha la direzione del segmento PC; indicando con T l'intersezione tra la direzione PB e la parallela a PC condotta per S, vedi figura 26, si ha:

$$\frac{\underline{V}_{PB}}{\omega} = (B - T); \quad \frac{\underline{V}_{PC}}{\omega} = (S - T); \quad \frac{\underline{V}_P}{\omega} = (A - T);$$

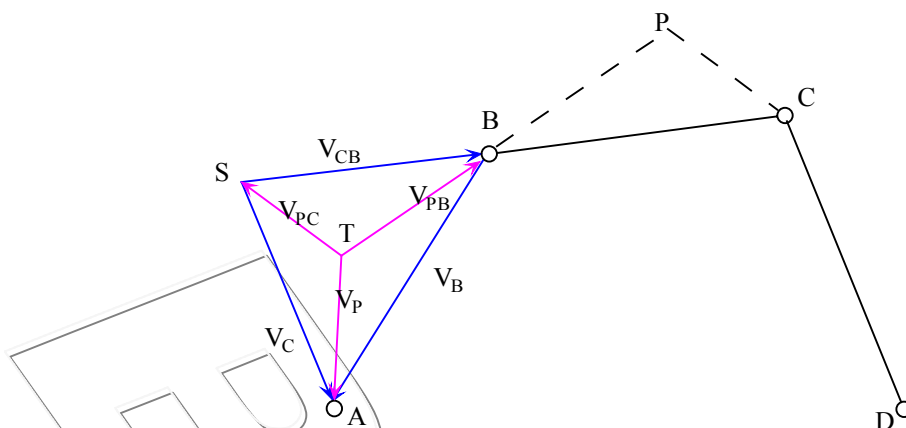


Figura 26: Quadrilatero articolato: velocità del punto P della biella BC

Passiamo poi a determinare le accelerazioni dei punti del quadrilatero.

Supponiamo per semplicità che il moto della manovella sia uniforme ($\dot{\omega} = 0$), l'accelerazione di B avrà perciò la sola componente centripeta:

$$\underline{a}_B = -\omega^2 (B - A)$$

! Le accelerazioni si riportano scalate rispetto a ω^2 , ma in direzione e verso reali. il vettore $\underline{a}_B$ sarà quindi dato dal segmento orientato BA, centripeto verso A.

L'accelerazione del punto C è esprimibile rispetto a B con:

$$\underline{a}_C = \underline{a}_B + \underline{a}_{CB}^n + \underline{a}_{CB}^t$$

La componente normale $\underline{a}_{CB}^n$ è nota, ha intensità $|\underline{a}_{CB}^n| = \frac{V_{CB}^2}{CB}$, dato che il valore di V_{CB} è noto, si

individua sulla biella il punto K tale che $KB = \frac{SM^2}{PM}$, con verso centripeto da K a M. La

componente tangenziale risulta perpendicolare in K a tale segmento.

D'altra parte l'accelerazione di C si può esprimere anche rispetto al punto D con:

$$\underline{a}_C = \underline{a}_{CD}^n + \underline{a}_{CD}^t$$

la componente normale $\underline{a}_{CD}^n$ è nota e di intensità $|\underline{a}_{CD}^n| = \frac{V_{CD}^2}{CD}$, rappresentata graficamente dal

segmento orientato $WA = \frac{SA^2}{CD}$, la componente tangenziale è perpendicolare.

Come mostrato in figura 27 l'accelerazione di C è data dal segmento orientato JA.

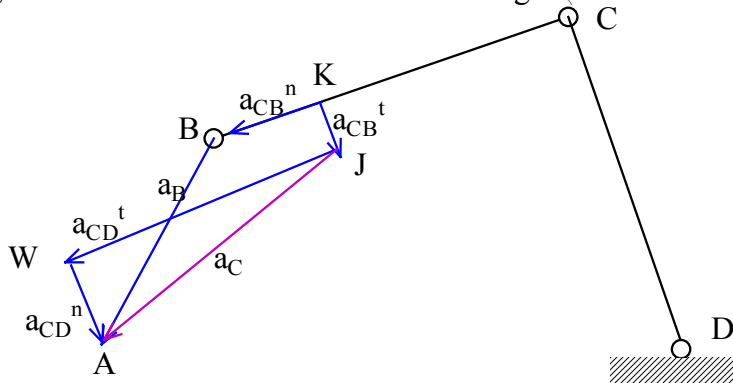


Figura 27: Quadrilatero articolato: accelerazione del punto C

! Le velocità e le accelerazioni trovate e rappresentate sono quelle convenzionali.

4.1.2. Applicazioni del quadrilatero articolato

il parallelogramma articolato, ovvero un quadrilatero articolato con le aste opposte di egual lunghezza e sempre parallele tra loro.

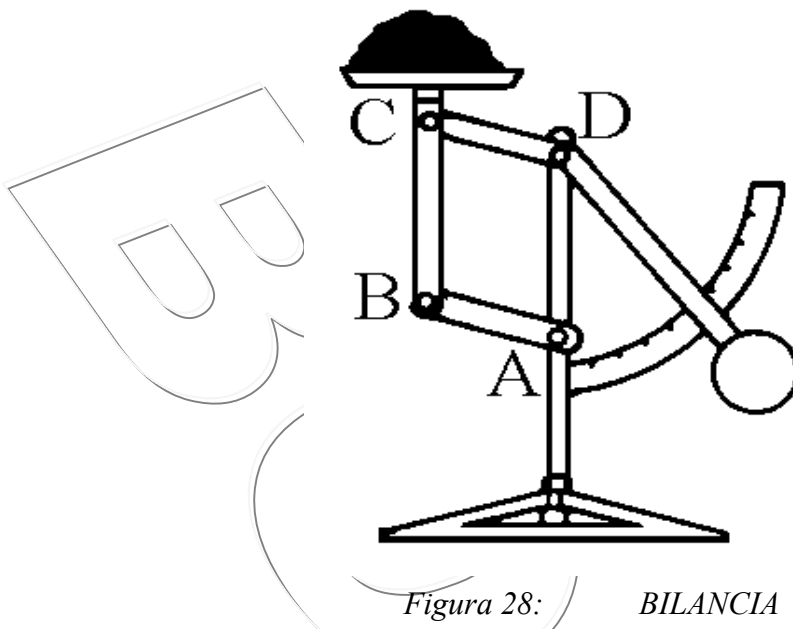


Figura 28: BILANCIA

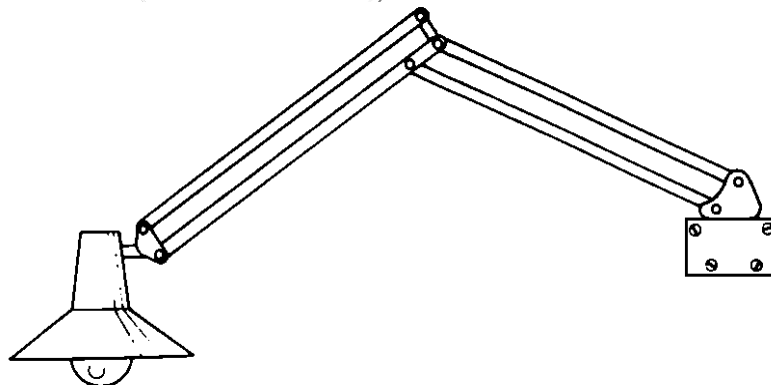


Figura 29: LAMPADA sono due parallelogrammi accoppiati: così si possono ottenere movimenti in due direzioni (si hanno due gradi di libertà) ma il parallelismo del movimento è sempre garantito.

Per altri esempi:

<http://www.math.unifi.it/archimede/archimede/curve/visita/quadrilateroarticolato.htm>

<http://digilander.libero.it/apuscio/quadrilatero1.htm>

4.2. Manovellismo di spinta

È un meccanismo composto da 4 membri (manovella, biella, corsoio, guida) collegati fra loro da 3 coppie rotoidali ed 1 coppia prismatica. Se la traiettoria rettilinea di P passa per O il manovellismo si dice centrato, altrimenti si dice deviato.

Serve per trasformare il moto rotatorio uniforme della manovella in moto traslatorio alternato del pistone (e viceversa!).

Per capire l'importanza di questo sistema articolato è utile ricordare che i comuni motori alternativi dei veicoli a due e quattro ruote sfruttano il cinematiso elementare biella-manovella (monocilindrici, pluricilindrici; 2, 4 tempi). In questa applicazione si ha la trasformazione del moto alternato del pistone, dovuto allo scoppio, in moto rotatorio dell'albero collegato alla manovella.

I componenti prendono il nome:

A = cilindro

B = pistone

C = biella

D = manovella

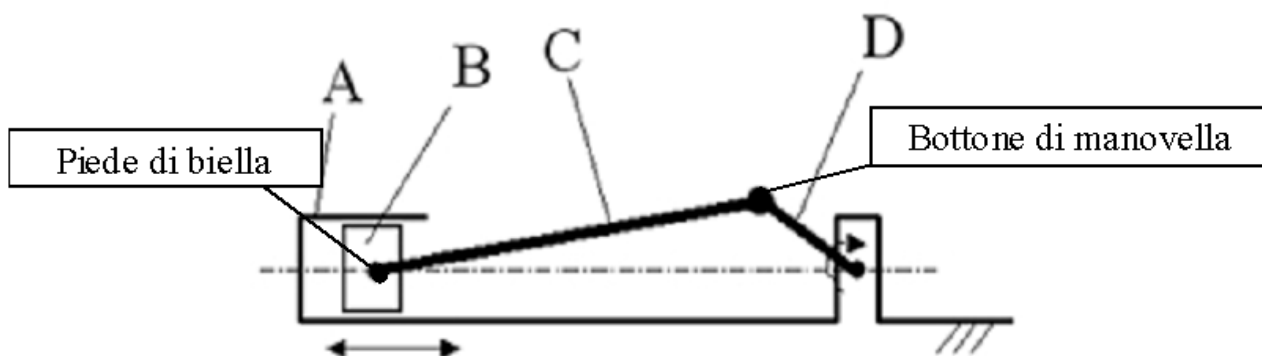
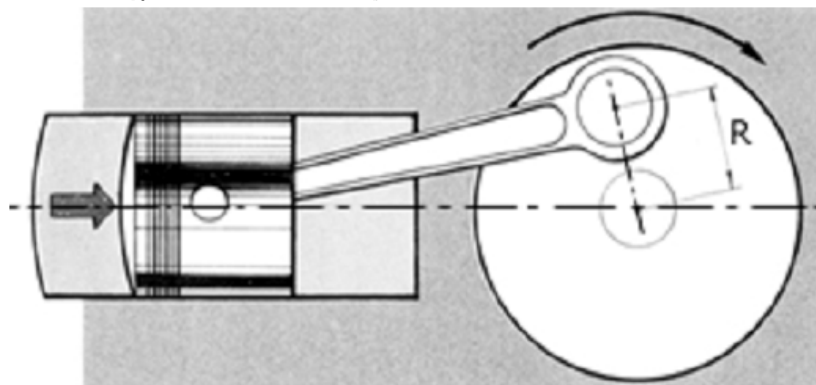


Figura 30: Schema del manovellismo di spinta centrato

4.2.1. Analisi cinematica- via grafica

Il manovellismo può essere considerato una derivazione del quadrilatero articolato che si ottiene facendo tendere all'infinito la lunghezza di una delle due bielle. Ne consegue che tutte le costruzioni geometriche per lo studio cinematico del quadrilatero articolato sono ancora valide.

Utilizzando quindi le stesse convenzioni, la velocità del punto, che vale in modulo $V_M = \omega \cdot (M - O)$, è rappresentata dal segmento orientato MO.

! N.B. Per tutta la successiva trattazione del manovellismo le velocità e le accelerazioni sono quelle CONVENZIONALI:

La velocità di P può essere espressa nella forma $\underline{V}_P = \underline{V}_M + \underline{V}_{PM}$, poiché il pistone trasla, la velocità V_P in direzione convenzionale è ortogonale alla direzione del moto del pistone stesso.

La velocità di P rispetto a M ha direzione parallela al segmento PM, dell'equazione vettoriale quindi si conosce il vettore $\underline{V}_M$ completamente, le direzioni di $\underline{V}_{PM}$ e di $\underline{V}_P$, la risoluzione è mostrato in figura 31.

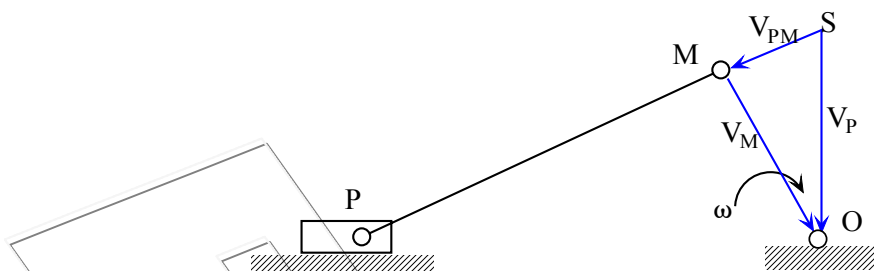


Figura 31: Manovellismo di spinta: velocità di P

La velocità di un punto qualsiasi T rigidamente collegato alla biella si trova scrivendone l'espressione sia rispetto al punto M sia rispetto al punto P

$$\underline{V}_T = \underline{V}_M + \underline{V}_{TM}; \quad \underline{V}_T = \underline{V}_P + \underline{V}_{TP};$$

in modo del tutto analogo a quanto detto per il quadrilatero articolato, si individua il punto di intersezione tra le direzioni TM e TP e si risolvono graficamente le due sistema equazioni vettoriali.

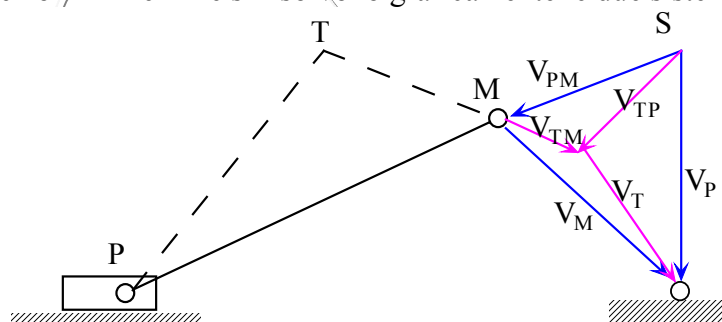


Figura 32: Manovellismo di spinta: accelerazione di P e T

Proseguiamo poi con la determinazione delle accelerazioni.

Supponiamo che la velocità angolare della manovella sia costante ($\dot{\omega} = 0$), l'accelerazione di M avrà perciò la sola componente centripeta:

$$\underline{a}_M = -\omega^2 (M - O)$$

ricordando che le accelerazioni si riportano scalate rispetto a ω^2 , ma in direzione e verso reali il vettore $\underline{a}_M$ sarà dato dal segmento orientato OM.

Dato che l'asta PM ruota con moto non uniforme, l'accelerazione del punto P è:

$$\underline{a}_P = \underline{a}_M + \underline{a}_{PM}^t + \underline{a}_{PM}^n$$

La componente normale $\underline{a}_{PM}^n$ è nota, ha intensità $|\underline{a}_{PM}^n| = \frac{V_{PM}^2}{PM}$, dato che il valore di V_{PM} è noto, si

individua sulla biella il punto K tale che $KM = \frac{SM^2}{PM}$, con verso centripeto da K a M.

Poiché il pistone trasla orizzontalmente, la sua accelerazione è diretta lungo la direzione PO, per individuare il valore basta chiudere il poligono delle accelerazioni come mostrato in figura 33.

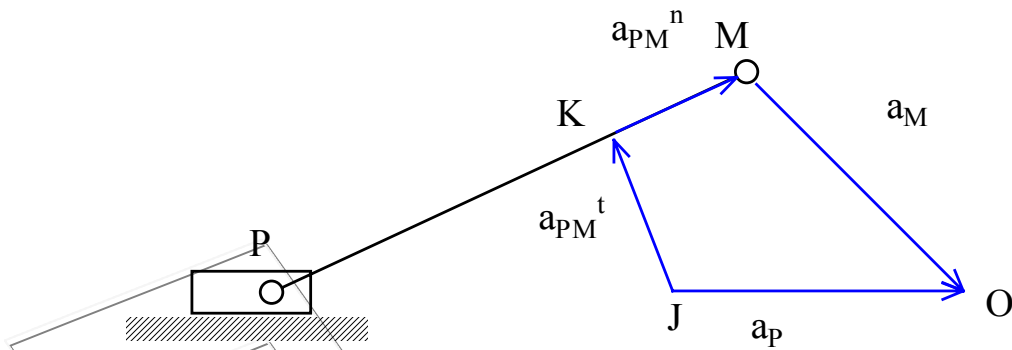


Figura 33: Manovellismo di spinta: accelerazioni di P

4.2.2. Espressione analitica della velocità e dell'accelerazione del pistone

Con le notazioni riportate anche nella successiva figura 34:

s_P : spostamento del cursore a partire dal punto morto superiore;

r : raggio di manovella;

l : lunghezza della biella;

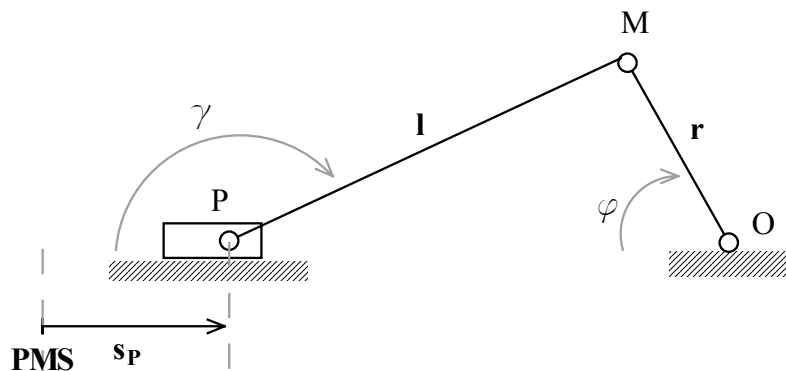


Figura 34: Schema cinematico per la determinazione analitica della velocità del pistone

$$s_P = (r + l) + l \cos \gamma - r \cos \varphi$$

poiché: $l \sin \gamma = r \sin \varphi$

indicando con $\lambda = \frac{r}{l}$ si ha: $\sin \gamma = \lambda \cdot \sin \varphi$

$$s_P = \left[r(1 - \cos \varphi) + l \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \right) \right]$$

derivando rispetto al tempo si ottiene l'espressione della velocità del pistone:

$$V = \frac{ds}{dt} = r\omega \sin \theta + \frac{g}{2} \omega \frac{\lambda^2 2 \sin \theta \cos \theta}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} = r\omega \left(\sin \theta + \frac{\lambda}{2} \frac{\sin 2\theta}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Tenendo conto che il parametro λ assume generalmente valori molto minori di 1 $0.1 \div 0.2$, si può trascurare l'espressione $\lambda^2 \sin^2 \varphi$ rispetto a 1, si ha quindi l'espressione semplificata della velocità:

$$V \cong r\omega \left(\sin \theta + \frac{\lambda}{2} \sin 2\theta \right)$$

derivando di nuovo, si ottiene l'accelerazione semplificata

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cong r\omega^2 (\cos \theta + \lambda \cdot \cos 2\theta) + r\dot{\omega} \left(\sin \theta + \frac{\lambda}{2} \sin 2\theta \right)$$

che nel caso di moto uniforme si riduce a:

$$a \cong r\omega^2 (\cos \theta + \lambda \cdot \cos 2\theta)$$

4.2.3. Esempi di applicazione del manovellismo di spinta



Figura 35: Motore ducati testa stretta del 2000

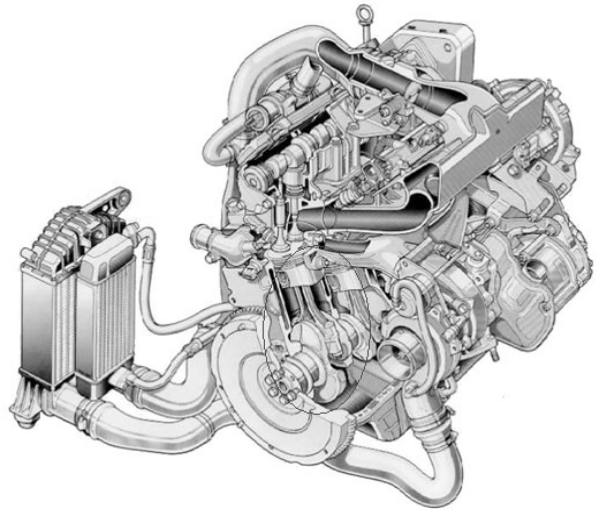


Figura 36: Puntó GT 4 cilindro in linea a quattro tempi

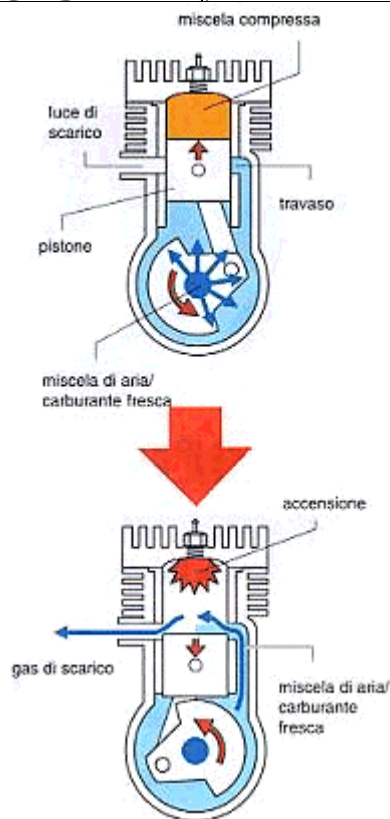


Figura 37: Motore monocilindrico 2 TEMPI

Le figure sono riportate a titolo di esempio di applicazione del cinematismo, e NON di funzionamento dei motori

4.3. Statica del quadrilatero articolato e manovellismo di spinta

Bisogna adesso considerare le forze applicate (interne, esterne) dalle quali non si può prescindere per determinare la soluzione costruttiva. Studiamo adesso l'equilibrio dei singoli membri sia nel caso ideale sia nel caso reale, prescindendo in entrambi i casi dalle forze di inerzia.

Supponiamo nota la geometria del sistema, nota la forza Q resistente e la direzione della P motrice capace di equilibrare la Q , e il coefficiente d'attrito f nel caso reale.

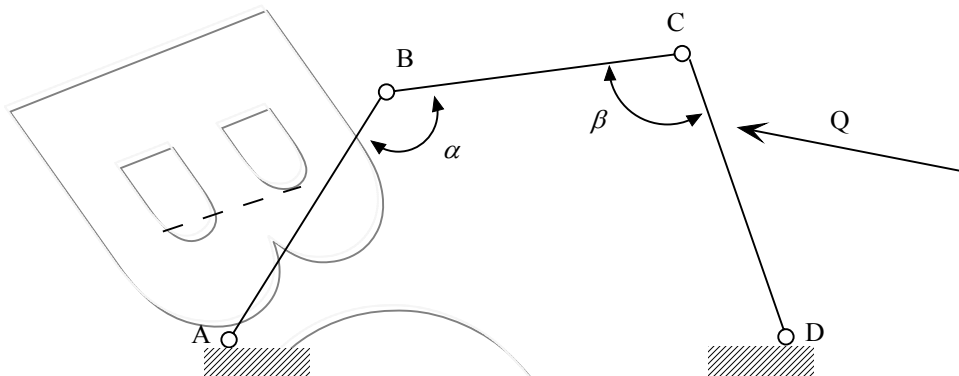


Figura 38: Angoli caratteristici del quadrilatero articolato

Per l'analisi delle forze si procede tenendo conto che, poiché l'intero meccanismo deve essere in equilibrio, bisogna sia in equilibrio ogni singolo membro; e su ciascun membro agiranno le forze esterne e le forze dovute all'interazione con gli altri membri.

Per esempio sul membro 3 agiranno la forza esterna Q , completamente nota, la forza che il telaio (0) fa attraverso la cerniera in D R_{03} di cui sappiamo SOLO il punto d'applicazione, la forza che fa il membro 2 attraverso la cerniera in C R_{23} di cui sappiamo la direzione, poiché l'asta 2 è scarica (non sottoposta a forze esterne).

Quanto detto per il quadrilatero articolato vale per tutti i sistemi articolati.

Nelle figure 39 e 40 che seguono sono riportate le risoluzioni grafiche del quadrilatero articolato e del manovellismo di spinta, per le procedure si rimanda ai libri di testo e alle lezioni in aula.

! N.B. Dire che ogni membro è in equilibrio significa che devono valere le equazioni cardinali

della statica
$$\begin{cases} \vec{R}^e = 0 \\ \vec{M}^e = 0 \end{cases}$$

Si annulla il momento imponendo che le direzioni delle forze passino per lo stesso punto, e si annulla la risultante chiudendo il triangolo delle forze, prestando attenzione al fatto che le frecce devono essere orientate nello stesso verso.

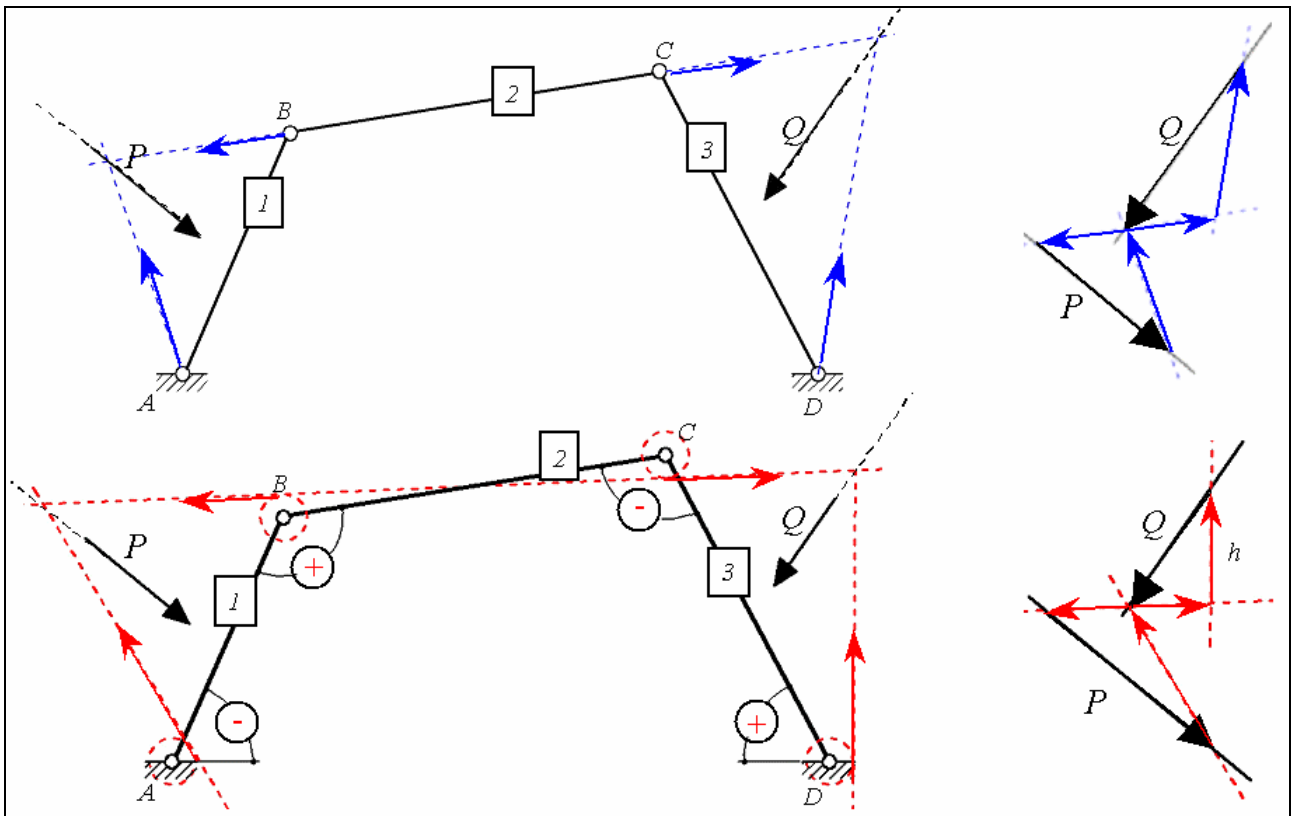


Figura 39: Risoluzione grafica del quadrilatero articolato

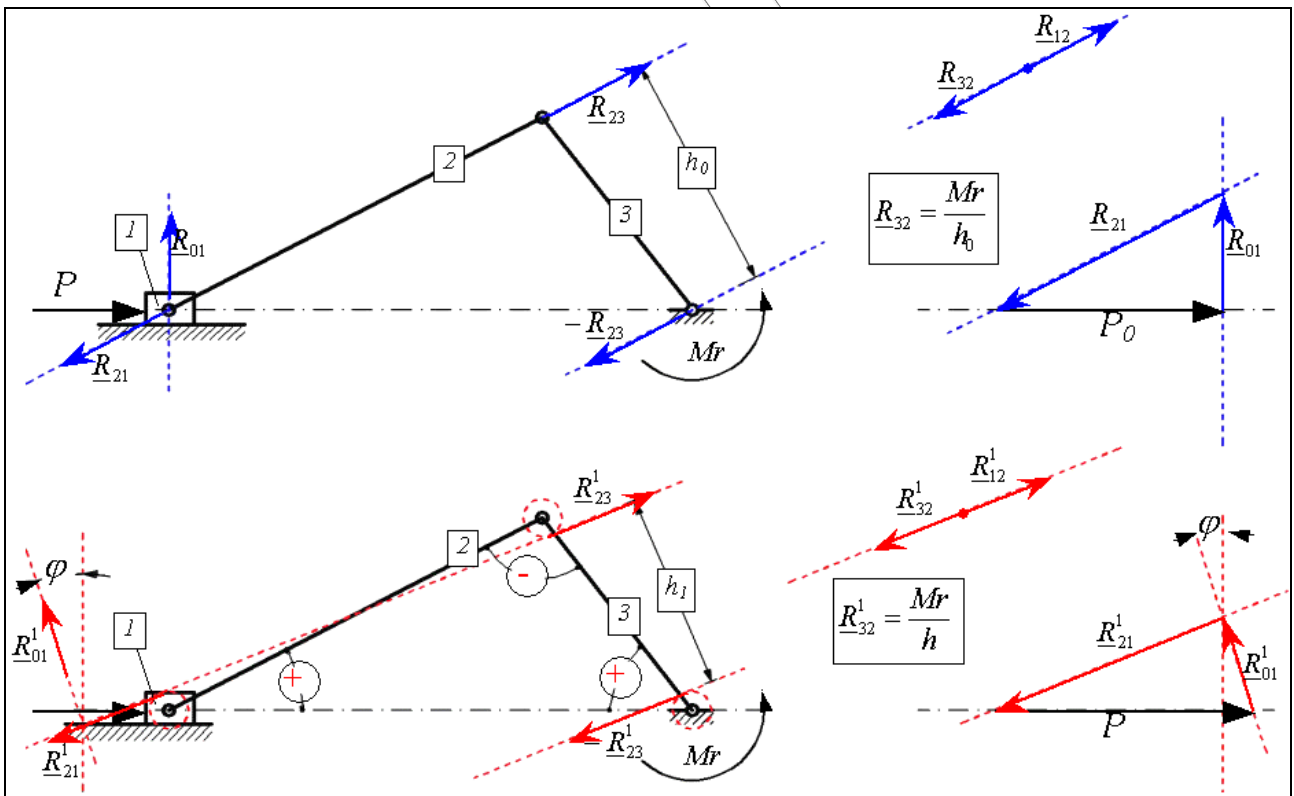


Figura 40: Risoluzione grafica del manovellismo di spinta

5. Meccanismi con sagome e camme

La catena cinematica più semplice che contenga coppie superiori è formata da tre membri e da tre coppie cinematiche; tali coppie cinematiche oltre a quella superiore possono essere ambedue prismatiche, ambedue rotoidali, una prismatico e una rotoidale.

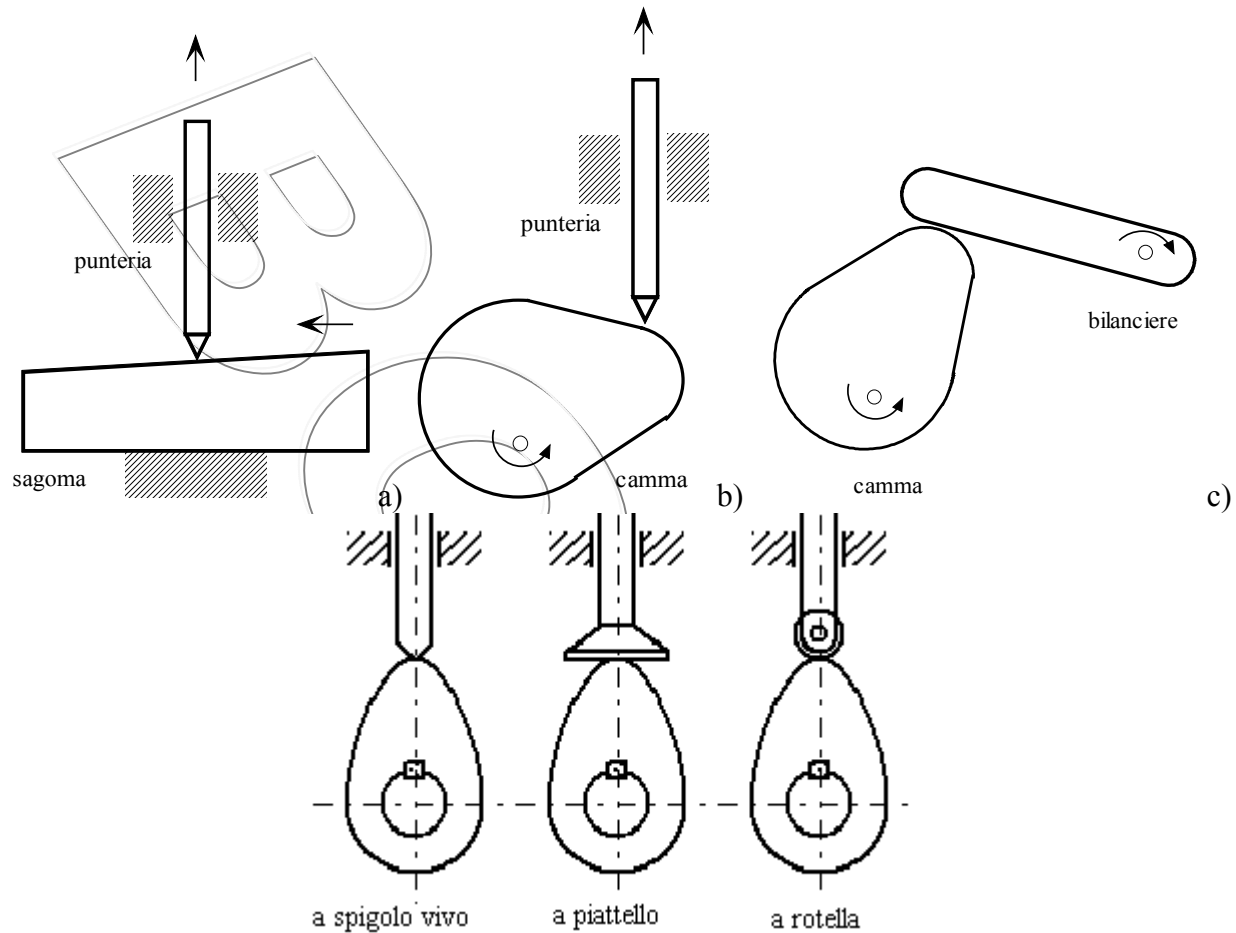


Figura 41: Schemi dei meccanismi: a) sagoma-punteria b) camma-punteria c) camma-bilanciere

Questi meccanismi realizzano una determinata legge di moto mediante il contatto fra superfici coniugate di forma opportuna.

Ogni combinazione tra i diversi tipi di moto e le diverse forme di movente e cedente ha caratteristiche diverse e si presta a una ben precisa soluzione di moto, come parametro comune hanno la trasformazione di un moto (rotatorio o traslatorio) UNIFORME del movente in un moto (rotatorio o traslatorio) ALTERNO del membro cedente, che debba muoversi secondo una legge prestabilita.

5.1. Sagoma e punteria

Entrambi i membri (movente e cedente) hanno moto traslatorio.

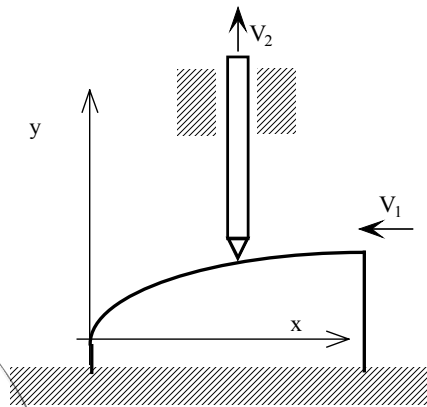


Figura 42: Meccanismo sagoma-punteria

Prendiamo il sistema di riferimento con l'origine sull'inizio del profilo attivo della sagoma. Ad uno spostamento $-x$ della sagoma corrisponde uno spostamento y della punteria, siano $-V_1$ e V_2 rispettivamente la velocità di sagoma e punteria, si ha:

$$V_2 = -V_1 \frac{dy}{dx}$$

supponendo V_1 costante, si può anche scrivere:

$$a_2 = V_1^2 \frac{d^2 y}{dx^2}; \quad a_2 = \frac{da_2}{dt} = -V_1^3 \frac{d^3 y}{dx^3};$$

Problema cinematica diretto: assegnato il profilo della sagoma si determina il moto della punteria

Esempi

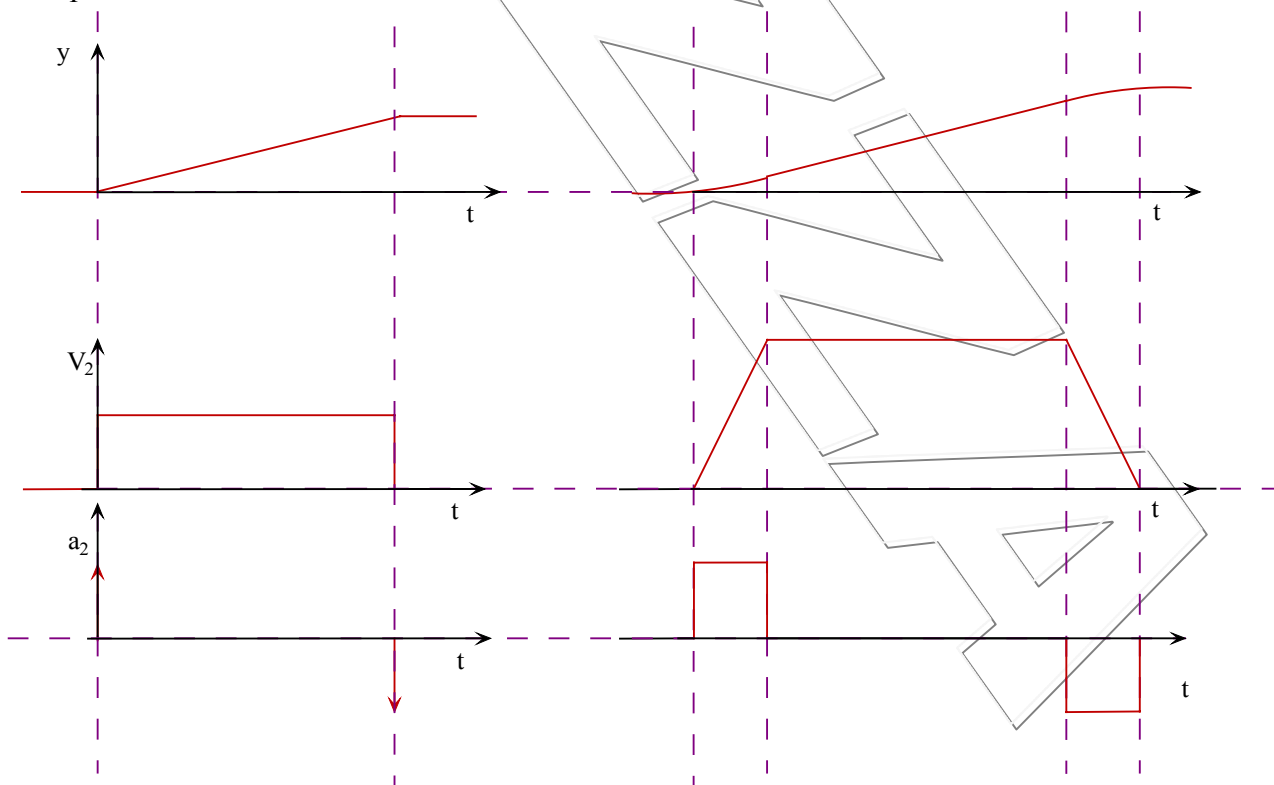


Figura 43: Grandezze cinematiche per: sagoma con profilo rettilineo (a sinistra) e profilo rettilineo con raccordi parabolici (a destra)

Se si suppone che la sagoma abbia profilo rettilineo, la velocità V_2 presenta due discontinuità una all'inizio e una alla fine della corsa, in corrispondenza ci sono due picchi di accelerazione (urti).

Il più semplice profili che non diano infiniti nel diagramma delle accelerazioni è quello rettilineo con raccordi parabolici, un profilo di questo tipo dà luogo a delle discontinuità nel diagramma delle accelerazioni che si traducono in infiniti nel diagramma di a_2 che possono essere fonte di fenomeni vibratori alle alte velocità.

Un tipo di profilo che non dia nessuna discontinuità in nessuno dei diagrammi corrisponde a una funzione $y(x)$ di ordine superiore, che però è più complicato e quindi richiede lavorazioni più complicate e costose.

Problema cinematica inverso: assegnata la legge di moto della punteria, è nota quindi $y=y(t)$ o la $V_2=V_2(t)$, si determina il profilo della sagoma.

Le considerazioni fin qui svolte si riferiscono a una punteria a spigolo vivo, ma se la punteria è a rotella o a testa sferica cosa cambia? Niente; solo che le curve considerate costituiscono adesso la traiettoria del centro della rotella, e il profilo effettivo della sagoma è definito come involuppo di una famiglia di cerchi aventi il centro sulla curva suddetta.

5.2. Camma e punteria

Il movente ha moto rotatorio, il cedente traslatorio.

Supposta nota la legge delle alzate in funzione della rotazione della camma $y = y(\vartheta)$ a partire dalla posizione di riposo, si conosce inoltre il raggio della camma R e l'eccentricità della camma e .

La costruzione grafica del profilo della camma è riportata in figura 44, dove viene rappresentata la camma ferma e la punteria è riprodotta in posizioni successive (camma fissa e punteria che si muove su di essa con velocità $-\omega$). Per $\vartheta=0$ punto di inizio delle alzate, individuo il segmento M_0N_0 , per un generico angolo ϑ si ha $y=MN-M_0N_0$ così per $\vartheta=\vartheta_1$ si avrà $y_1=y(\vartheta_1)$ a cui corrisponde il segmento M_1N_1 tangente alla circonferenza di raggio e . Si procede poi per vari valori dell'angolo ϑ e si trovano i corrispondenti punti M_i che individuano sul profilo della camma.

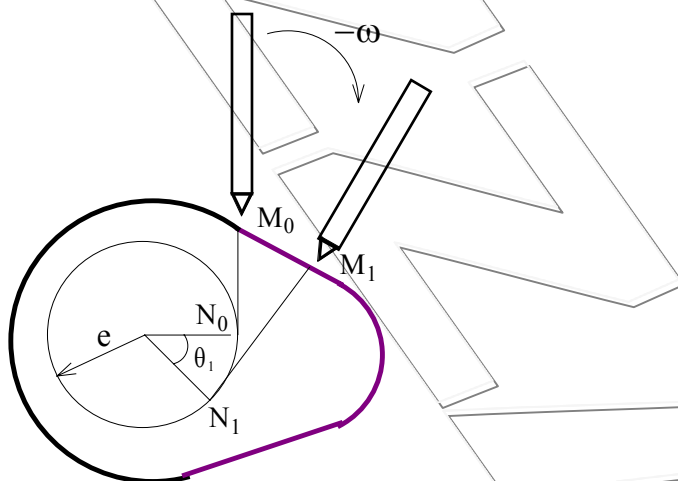


Figura 44: Due configurazioni successive assunte dalla punteria nel moto relativo rispetto alla camma

La velocità del punto M appartenente alla punteria può essere vista come somma della velocità di M appartenente alla camma più la velocità della punteria rispetto alla camma stessa;

$$\vec{V}_M^P = \vec{V}_M^C + \vec{V}_{PC}$$

Di V_M^P si conosce la direzione, poiché la punteria trasla sulla guida, anche della V_{PC} si sa la direzione infatti la camma vede la punteria strisciarle intorno e quindi la sua velocità sarà sulla tangente comune; il punto M della camma si muove di moto rigido intorno a O, quindi la sua

velocità è nota e vale $\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge (M - O)$, la risoluzione grafica della somma vettoriale è riportata in figura 45.

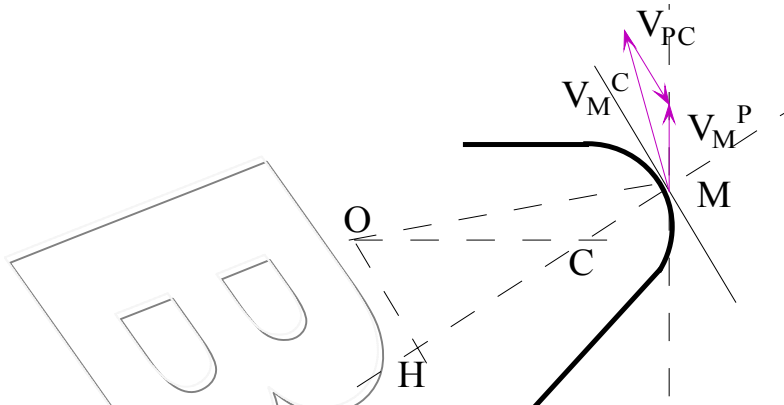


Figura 45: Velocità del punto M

! Il punto C è il Centro di istantanea rotazione del moto relativo tra camma e punteria, esso si trova nel punto di intersezione della retta passante per O e perpendicolare all'asse della punteria (il cui centro di rotazione è improprio) e della normale alla tangente comune nel punto di contatto.

Per le sue proprietà, in C la velocità relativa della camma e della punteria è nulla, si ha:

$$|\vec{V}_p| = \omega \overline{OC}$$

5.3. Camma e bilanciere

Sia il movente che il cedente hanno moto rotatorio.

Tale meccanismo può essere studiato graficamente in modo del tutto analogo a quanto fatto per camma-punteria. Si suppone nota la legge di moto del bilanciere $\beta = \beta(\vartheta)$, la distanza O_1O_2 , e il profilo del bilanciere.

Si considera la camma ferma e il bilanciere che si muove su di essa con velocità angolare uguale e contraria a quella della camma stessa ($-\omega_1$), si individua il profilo della camma come involuppo delle posizioni occupate dal bilanciere. Infatti dalla posizione iniziale $\theta=0$, corrispondente a β_0 e al punto di contatto M_0 si trovano i punti di contatto successivi M_i , ad ogni valore di θ corrisponde un valore di β che individua una posizione del bilanciere, e quindi un punto M

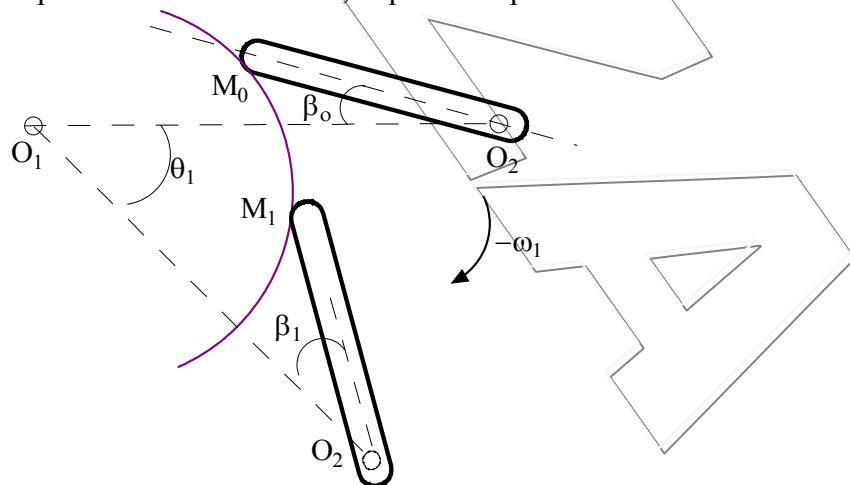


Figura 46: Schema cinematico equivalente al sistema camma-bilanciere

Rispetto al centro di istantanea rotazione, la cui individuazione è analoga al caso precedente e viene lasciata per esercizio allo studente, si ha $\overline{O_2C}\omega_2 = \overline{O_1C}\omega_1$ e la velocità relativa nel punto di contatto vale: $\vec{V}_M = (\omega_1 \pm \omega_2)\overline{CM}$.

5.4. Impuntamento delle camme

Si ha il fenomeno dell'impuntamento quando il momento motore applicato alla camma non è capace di equilibrare alcuna forza resistente applicata alla punteria.

Studio delle forze in gioco: la forza di contatto tra camma e punteria (R_0) prescindendo dall'attrito è perpendicolare alla tangente comune, le reazioni dei collari (R_1 R_2) sono inclinate dell'angolo ϕ in maniera da opporsi al moto. La punteria risulta essere un membro rigido sottoposto a quattro forze, il punto K che serve per individuare la risultante $\vec{Q} + \vec{R}_1$ e $\vec{R}_2 + \vec{R}_0$, deve essere a sinistra del punto H, punto di incontro tra le direzioni delle reazioni dei collari; se fosse a destra la forza Q sarebbe diretta in senso opposto, agirebbe cioè da forza motrice.

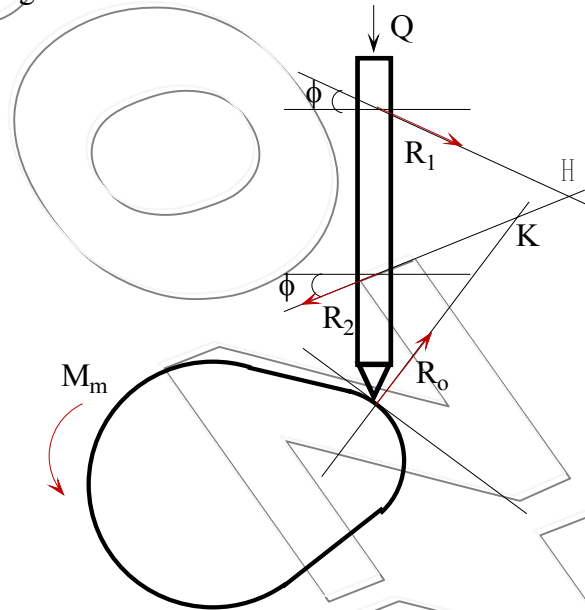


Figura 47: Schema per la verifica dell'impuntamento della camma

5.5. Esempi di applicazioni dei meccanismi con le camme

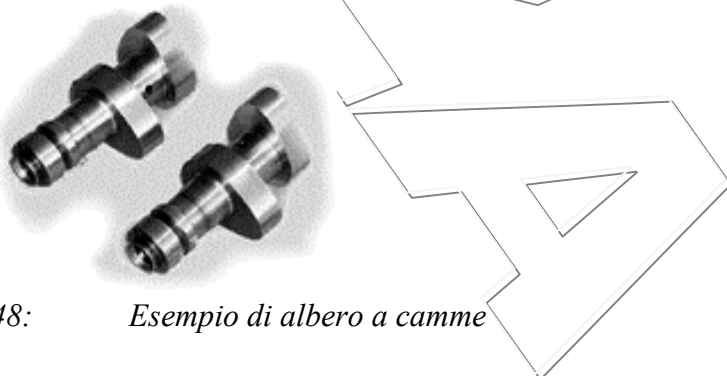


Figura 48: Esempio di albero a camme

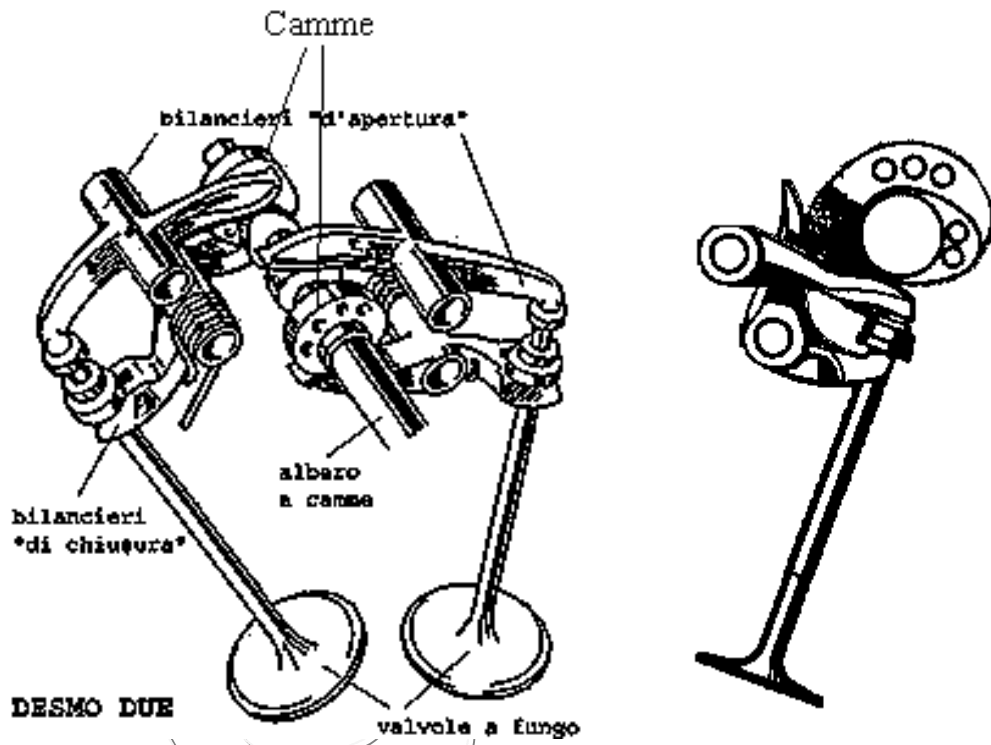
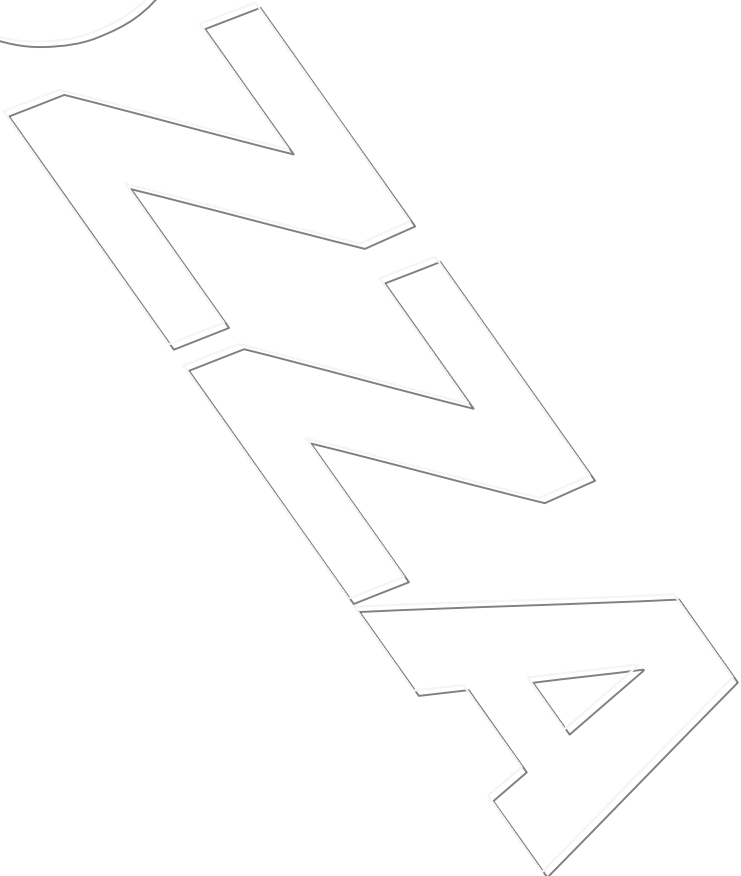


Figura 49: Comando delle valvole desmodromico (Ducati)

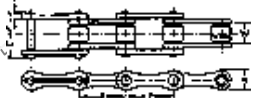


6. Meccanismi con Organi Flessibili

6.1. Generalità

Si dicono meccanismi ad organi flessibili quelli caratterizzati dall'uso di coppie cinematiche costituite da un elemento flessibile (capace di resistere solo a sollecitazione di trazione) che si svolge su un membro rigido.

Queste trasmissioni possono essere classificate in base al tipo di organo flessibile utilizzato:

Tipologia	Tipo	Note	Sez trasv.	Vista long.
Funi		Utilizzate prevalentemente per fissaggio/sollevamento carichi		
Cinghie		Possibilità di collegare assi con interassi elevati. Non necessitano elevata precisione di montaggio. Sono tendenzialmente meno rumorose delle catene e se lavorano ad alta velocità soffrono meno i problemi di usura tipici invece delle catene		
	lisce	Molto silenziose, hanno elevata flessibilità (raggi di pulegge e tenditori più piccoli). Consentono con tenditori ausiliari la trasmissione tra assi sghembi. La massima coppia trasmissibile è limitata dall'attrito tra puleggia e cinghia. La trasmissione degli sforzi per attrito richiede elevati precarichi delle cinghie che devono essere "tirate" dalle pulegge per impedire lo scorrimento. Il sincronismo tra gli assi collegati non è garantito.		
	Tonde	Analoghe alle cinghie lisce sono utilizzate raramente in casi particolari (assi particolarmente sghembi o più assi collegati contemporaneamente)		
	Trapezie	Meno flessibili delle cinghie lisce assicurano un elevato coefficiente d'attrito (elevate coppie trasmissibili) con bassi precarichi dei supporti.		
	Poli-V	Soluzione di compromesso tra l'elevata flessibilità delle cinghie lisce e la grande capacità di carico di quelle trapezie.		
	dentate	Elevate coppie trasmissibili, garantiscono sincronismo degli assi collegati		
Catene		Garantiscono il sincronismo tra gli assi collegati, ma sono generalmente più rumorose delle cinghie ed afflitte da maggiori problemi di usura se funzionanti ad alta velocità. Le catene si prestano alla trasmissione di forze elevate con ingombri ridotti.		
	Forza	Semplici, Robuste nella costruzione c'è una maggiore attenzione alla realizzazione di un'elevata resistenza più che alla riduzione dell'attrito sui giunti e/o alla ottimizzazione cinematica		
	Potenza	Maggiore cura nella realizzazione dei collegamenti tra le maglie, riduzione degli attriti, ottimizzazione della forma per ottenere un'inserimento sul dente della puleggia graduale e silenziosa.		

6.2. Modellazione della non perfetta flessibilità delle cinghie

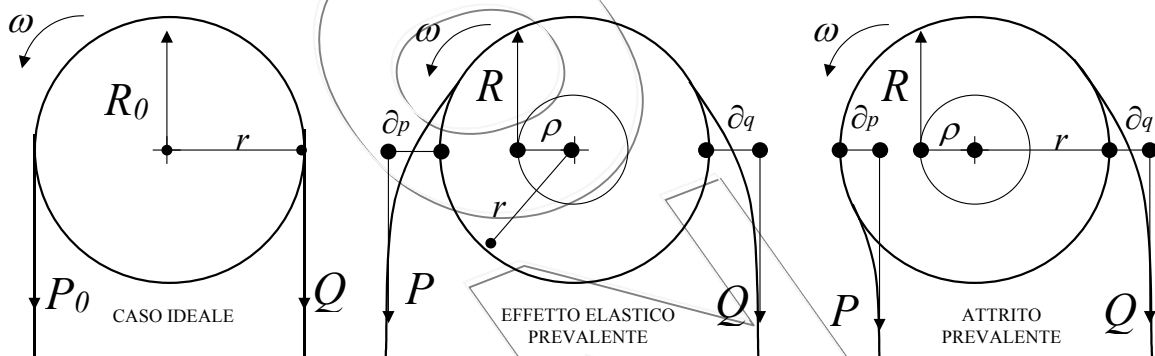
Nella realtà nessun organo sia esso una cinghia, una fune o una catena risulta perfettamente flessibile. In questo caso la flessione della cinghia richiede l'utilizzo di una certa coppia.

Tale effetto può essere imputabile a due diversi fenomeni:

- Elasticità: la cinghia presenta una certa resistenza alla flessione di natura elastica e quindi dal punto di vista energetico reversibile.
- Attrito/Isteresi/altre Irreversibilità: Per effetto di attriti interni una parte consistente (anche la totalità) del lavoro speso per flettere la cinghia non viene restituito, ma dissipato prevalentemente sotto forma di calore.

Le coppie equivalenti introdotte da questi effetti fisici sono modellate spostando i punti di applicazione delle forze motrici $\mathbf{P}$ e resistenti $\mathbf{Q}$ di una distanza fittizia (rispettivamente ∂_p e ∂_q).

Questo artificio consente di introdurre delle coppie equivalenti proporzionali alle forze $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ che permettono di rappresentare anche graficamente gli effetti sull'equilibrio statico del sistema introdotti dalla non perfetta flessibilità degli organi. Per modellare l'attrito sulla coppia rotoidale che fa da perno alla puleggia si introduce allo stesso modo un braccio fittizio ρ (raggio del circolo di attrito).



$$R \text{ (reazione vincolare)} = P + Q$$

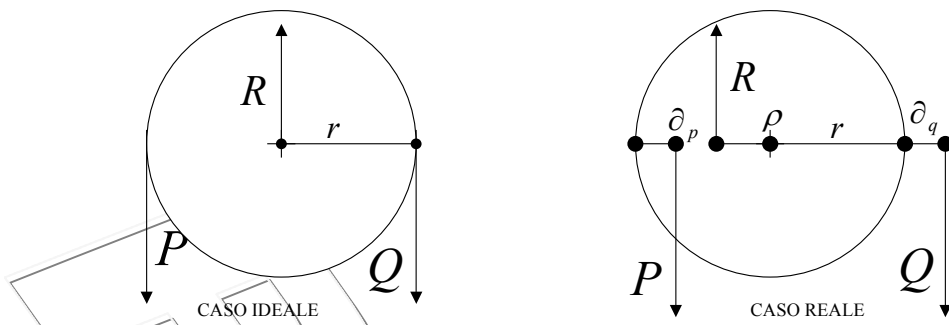
CASO IDEALE: $P \cdot r = Q \cdot r \Rightarrow P = Q$

EFFETTO ELASTICO PREVALENTE: $P \cdot (r + \partial_p - \rho) = Q \cdot (r + \partial_q + \rho) \Rightarrow P = Q \cdot \frac{(r + \partial_q + \rho)}{(r + \partial_p - \rho)} = Q \cdot K$

EFFETTO ATTRITO PREVALENTE: $P \cdot (r - \partial_p - \rho) = Q \cdot (r + \partial_q + \rho) \Rightarrow P = Q \cdot \frac{(r + \partial_q + \rho)}{(r - \partial_p - \rho)} = Q \cdot K$

$$K \geq 1$$

6.3. Macchine per sollevamento carichi: carrucola fissa



$$R \text{ (reazione vincolare)} = P + Q$$

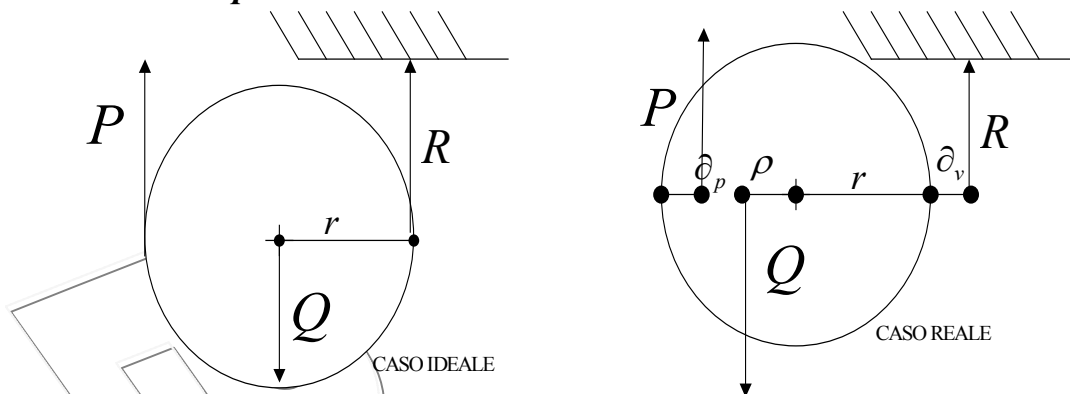
CASO IDEALE: $P \cdot r = Q \cdot r \Rightarrow P = Q$

EFFETTO ELASTICO PREVALENTE: $P \cdot (r + \delta_p - \rho) = Q \cdot (r + \delta_q + \rho) \Rightarrow P = Q \frac{(r + \delta_q + \rho)}{(r + \delta_p - \rho)} = Q \cdot K$

EFFETTO ATTRITO PREVALENTE: $P \cdot (r - \delta_p - \rho) = Q \cdot (r + \delta_q + \rho) \Rightarrow P = Q \frac{(r + \delta_q + \rho)}{(r - \delta_p - \rho)} = Q \cdot K$

RENDIMENTO: $\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{1}{K}$ $K = \text{fattore di perdita tra i rami della cinghia}$

6.4. Macchine per sollevamento carichi: carrucola mobile



$$R \text{ (reazione vincolare)} = P + Q$$

CASO IDEALE: $P \cdot 2r = Q \cdot r \Rightarrow P = \frac{Q}{2}$

$$K \geq 1$$

EFFETTO ATTRITO PREVALENTE: $P \cdot (2r - \delta_p + \delta_v) = Q \cdot (r + \delta_v + \rho) \Rightarrow P = Q \frac{(r + \delta_v + \rho)}{(2r - \delta_p + \delta_v)}$

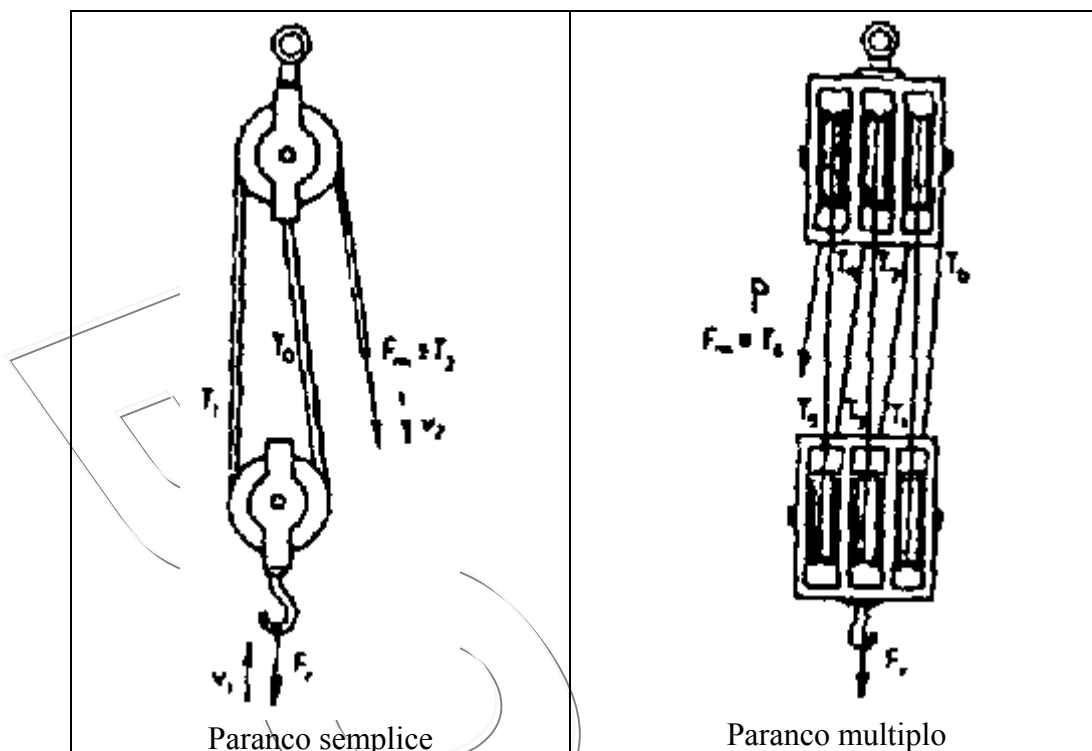
Oppure: $\begin{cases} P(r - \delta_p - \rho) = V(r + \delta_v + \rho) \Rightarrow P = KV \quad (K \geq 1) \\ V + P = Q \end{cases}$

RENDIMENTO: $\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{1+K}{2K} \Rightarrow P = \frac{K}{1+K} Q$

$$\eta^I \text{ (retrogrado)} = \frac{2}{1+K}$$

6.5. Macchine per sollevamento carichi: paranchi

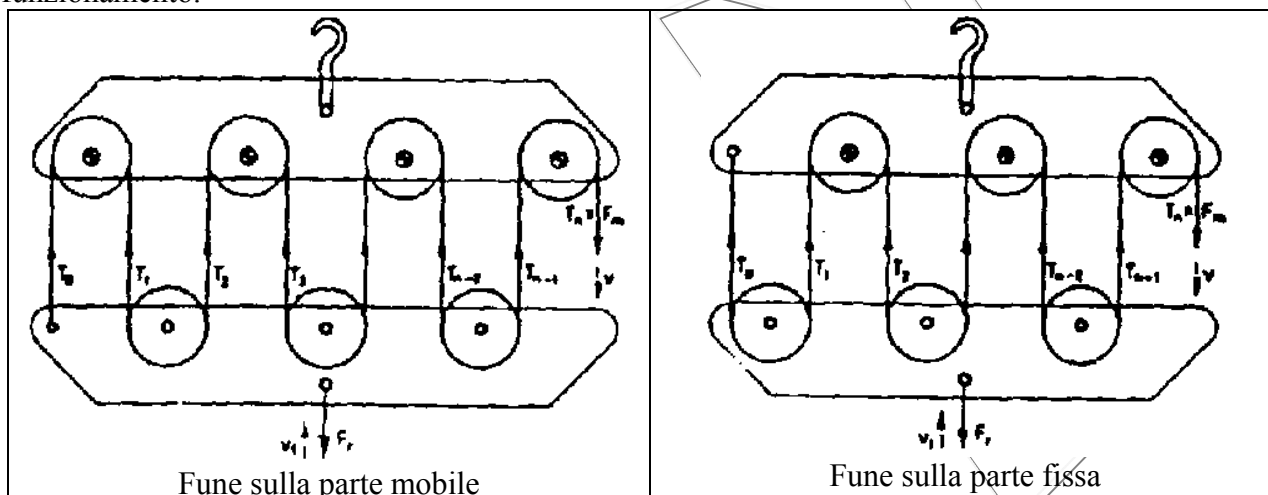
I paranchi sono costituiti da una serie di carrucole fisse e una serie di carrucole mobili rispettivamente montate su di un unico asse, e da una fune che si avvolge alternativamente su di esse. Una delle estremità della fune è libera, e ad essa è applicata la forza motrice; l'altra estremità può essere fissata alla parte mobile o a quella fissa.



La principale classificazione dei paranchi li distingue tra paranchi a tiro diretto o invertito a seconda se la forza motrice è rivolta verso l'alto (nello stesso senso dello spostamento della parte mobile), ovvero verso il basso.

6.5.1. Paranchi a tiro invertito

Per semplicità di comprensione del modello, gli schemi dei paranchi saranno del tipo riportato in seguito, in cui le carrucole sembrano avere ognuno il proprio asse di rotazione. Tale schema non è però mai utilizzato nelle applicazioni pratiche nelle quali invece tutte le carrucole della parte mobile hanno lo stesso asse, come pure quelle della parte fissa (vedi figura del paranco multiplo, sopra a destra). Gli schemi sono però utili perché permettono di comprendere meglio il principio di funzionamento.



Facendo riferimento al paranco con fune collegata alla parte mobile, imponendo le condizioni per l'equilibrio verticale della parte mobile si ha:

$$T_0 + T_1 + T_2 + \dots + T_{n-1} = Q.$$

Dalla espressione del rendimento delle singole carrucole si ottiene anche:

$$T_1 = K \cdot T_0$$

$$T_2 = K \cdot T_1 = K^2 \cdot T_0$$

...

$$T_{n-1} = K^{n-1} \cdot T_0$$

$$P = K^n \cdot T_0$$

Dalle precedenti relazioni si ottiene dunque:

$$Q = T_0 (1 + K + \dots + K^{n-1}) = T_0 \frac{K^n - 1}{K - 1}$$

e quindi anche:

$$P = Q \frac{K^n (K - 1)}{K^n - 1}$$

Se ci si trovasse nel caso ideale, ovvero assenza di attrito nella coppia rotoidale e perfetta elasticità della fune, sarebbe $K=1$. Dalla precedente si ottiene anche (passando al limite):

$$P_0 = \frac{Q}{n}$$

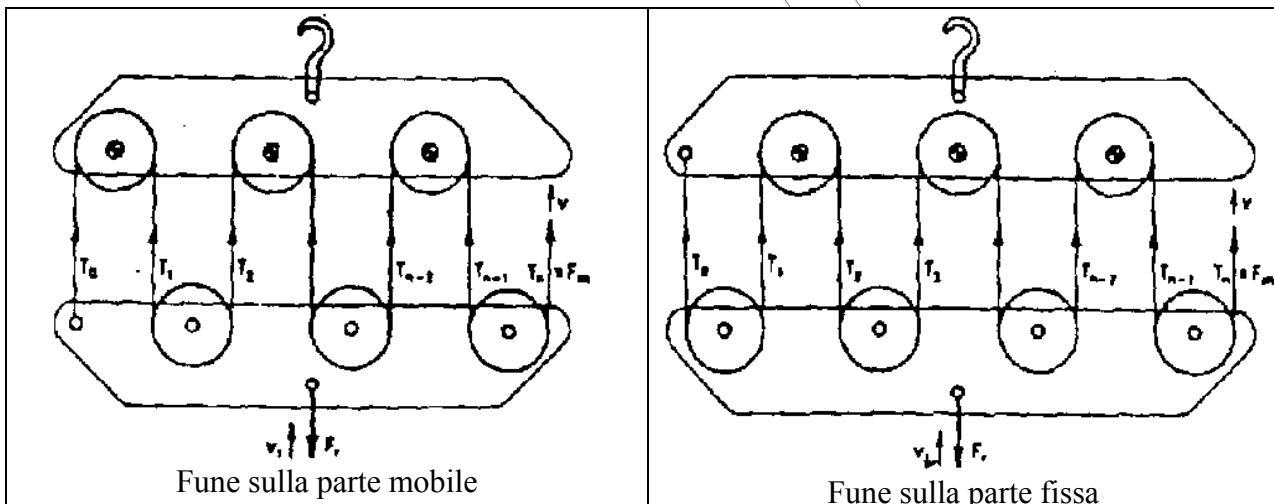
Il rendimento del paranco ha quindi la forma:

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{K^n - 1}{nK^n (K - 1)}$$

Per ottenere il rendimento del moto retrogrado η' , si introduce una regola pratica valida in questo caso come in generale: basta calcolare il reciproco della espressione del rendimento diretto η e sostituire i parametri dipendenti dall'attrito (in questo caso il coefficiente K) con il loro reciproco (in $1/K$). Si ottiene quindi:

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{K^n - 1}{nK^n (K - 1)} \Rightarrow \frac{1}{\eta} = \frac{nK^n (K - 1)}{K^n - 1} \Rightarrow \eta' = \frac{n \frac{1}{K^n} \left(\frac{1}{K} - 1 \right)}{\frac{1}{K^n} - 1} = \frac{n(K - 1)}{K(K^n - 1)}$$

6.5.2. Paranchi a tiro diretto



Facendo riferimento al paranco con fune collegata alla parte fissa, dall'equilibrio verticale della parte mobile si ha:

$$Q = T_0 + T_1 + T_2 + \dots + T_{n-1} + P.$$

Dalla espressione del rendimento delle carrucole si ottiene anche:

$$T_1 = K \cdot T_0$$

$$T_2 = K \cdot T_1 = K^2 \cdot T_0$$

...

$$P = K^n \cdot T_0$$

Dalle quali si ottiene:

$$Q = T_0(1 + K + \dots + K^n) = T_0 \frac{K^{n+1} - 1}{K - 1}$$

e quindi anche:

$$P = Q \frac{K^n (K - 1)}{K^{n+1} - 1}.$$

Se ci si trovasse nel caso ideale sarebbe $K=1$, quindi dalla precedente si ottiene (passando al limite):

$$P_0 = \frac{Q}{n + 1}.$$

Il rendimento del paranco ha quindi la forma:

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{K^{n+1} - 1}{(n + 1)K^n (K - 1)}.$$

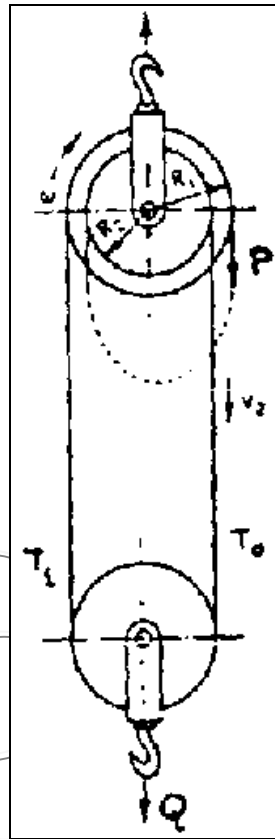
Il rendimento del moto retrogrado η' , applicando la regola esposta in precedenza risulta:

$$\eta' = \frac{(n + 1)(K - 1)}{K(K^{n+1} - 1)}.$$

6.5.3. Paranco differenziale

E' il classico parametro utilizzato dai macellai per sollevare i quarti di animali molto pesanti. E' una macchina che deve consentire di sollevare carichi notevoli con forze molto piccole. Questa apparente 'qualità straordinaria' è però bilanciata dal fatto che tale macchina ha un rendimento piuttosto basso. E' costituito da due carrucole fisse di diametro (poco) diverso e solidali tra loro, e da una carrucola mobile disposte come nella figura riportata a seguito. L'elemento flessibile è una catena che ingrana con la carrucola fissa di diametro minore, che è munita di denti per evitare lo slittamento della catena sulla puleggia stessa.

La forza motrice P viene applicata al ramo della catena uscente dalla puleggia fissa di raggio maggiore. Tale ramo della catena rimane scarico finché non torna ad avvolgersi sulla puleggia fissa di raggio inferiore.



Dall'equilibrio alla traslazione verticale della parte mobile si ha:

$$T_1 + T_0 = Q;$$

ed è inoltre anche:

$$T_1 = K \cdot T_0 \Rightarrow Q = K \cdot T_0 + T_0 = T_0 (K + 1);$$

$$T_0 = Q \frac{1}{(K + 1)};$$

$$T_1 = Q \frac{K}{(K + 1)}.$$

Dall'equilibrio alla rotazione della carrucola fissa si ha inoltre:

$$T_1 \cdot (R_1 + \delta + \rho) = P \cdot (R_1 - \delta - \rho) + T_0 \cdot (R_2 - \delta - \rho)$$

da cui:

$$T_1 \cdot (R_1 + \delta + \rho) - T_0 \cdot (R_2 - \delta - \rho) = P \cdot (R_1 - \delta - \rho)$$

$$\Rightarrow T_1 \cdot \frac{(R_1 + \delta + \rho)}{(R_1 - \delta - \rho)} - T_0 \cdot \frac{(R_2 - \delta - \rho)}{(R_1 - \delta - \rho)} = P$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
 P &= Q \frac{K}{(K+1)} \cdot \frac{(R_1 + \delta + \rho)}{(R_1 - \delta - \rho)} - Q \frac{1}{(K+1)} \cdot \frac{(R_2 - \delta - \rho)}{(R_1 - \delta - \rho)} = \\
 &= \frac{Q}{(K+1)} \cdot \left(\frac{K(R_1 + \delta + \rho)}{(R_1 - \delta - \rho)} - \frac{(R_2 - \delta - \rho)}{(R_1 - \delta - \rho)} \right) \\
 &= \frac{Q}{(K+1)} \cdot \left(K \frac{\left(1 + \frac{\delta + \rho}{R_1}\right)}{\left(1 - \frac{\delta + \rho}{R_1}\right)} - \frac{R_2}{R_1} \frac{\left(1 - \frac{\delta + \rho}{R_2}\right)}{\left(1 - \frac{\delta + \rho}{R_1}\right)} \right) \cong \\
 &\cong \frac{Q}{(K+1)} \cdot \left(K \left(1 + 2 \frac{\delta + \rho}{R_1}\right) - \frac{R_2}{R_1} \left(1 - \frac{\delta + \rho}{R_2} + \frac{\delta + \rho}{R_1}\right) \right).
 \end{aligned}$$

Per conoscere la forza motrice in condizioni ideali basta imporre $\rho = \delta = 0$; dalla precedente si ottiene quindi:

$$P_0 = \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Se si trascura la differenza tra i raggi R_1 e R_2 della carrucola fissa nei termini di attrito ($R_2/R_1 \cong 1$) e si suppone:

$$1 + 2 \frac{\delta + \rho}{R_1} \cong K;$$

dalle precedenti si ottiene:

$$P = \frac{Q}{(K+1)} \cdot \left(K^2 - \frac{R_2}{R_1} \right)$$

dalla quale si ottiene l'espressione del rendimento:

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{\frac{Q}{2} \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right)}{\frac{Q}{(K+1)} \cdot \left(K^2 - \frac{R_2}{R_1} \right)} = \frac{(R_1 - R_2)}{2R_1} \frac{1 + K}{K^2 - \frac{R_2}{R_1}}.$$

Per quanto riguarda il moto retrogrado si ha:

$$\eta' = \frac{2R_1}{(R_1 - R_2)} \frac{\frac{1}{K^2} - \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{K}} = \frac{2R_1}{(R_1 - R_2)} \frac{1 - K^2 \frac{R_2}{R_1}}{K(K+1)}.$$

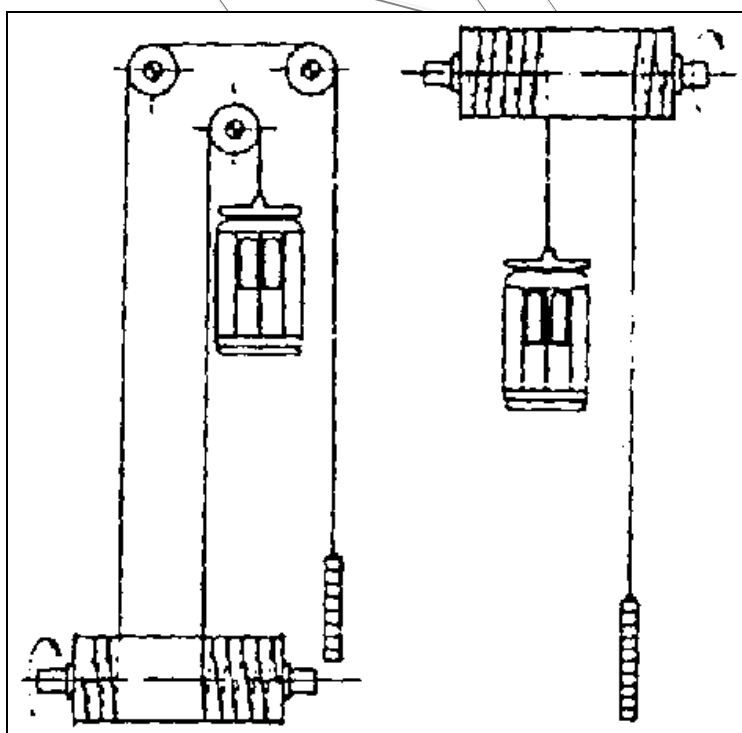
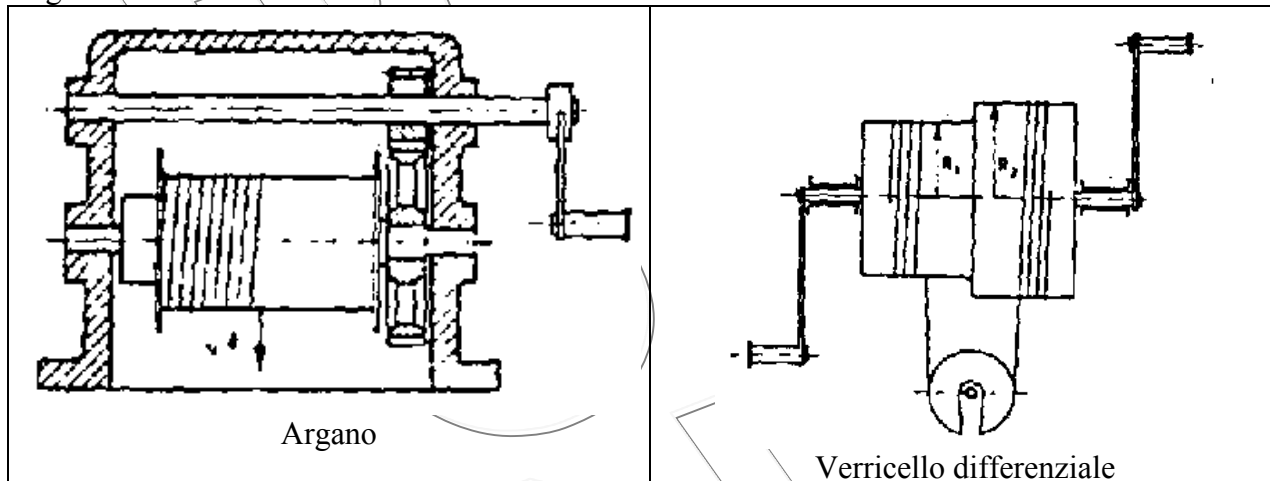
Dalla precedente si osserva che risulta $\eta' < 0$ se:

$$K^2 \frac{R_2}{R_1} > 1.$$

Se il rendimento del moto inverso η' è negativo significa che tale moto non è possibile; si conclude quindi che se vale la precedente relazione la macchina è **ad arresto spontaneo** (è questo è di grande aiuto nel caso del macellaio).

6.5.4. Macchine per sollevamento carichi: altre applicazioni

Tra le macchine per il sollevamento esistono macchine più o meno semplici che vengono utilizzate sia nell'industria (industria edile, acciaierie, industria pesante in genere, ecc...), sia macchine di uso assai più comune, come gli ascensori. Anche per tali macchine, di cui qui a seguito sono riportati alcuni schemi, sarebbe possibile calcolare sia il rendimento che la riduzione dello sforzo per il sollevamento del carico. Tuttavia non si ritiene utile in questa sede approfondire ulteriormente l'argomento.



Ascensori: con verricello in basso (a sinistra) e con verricello in alto (a destra)

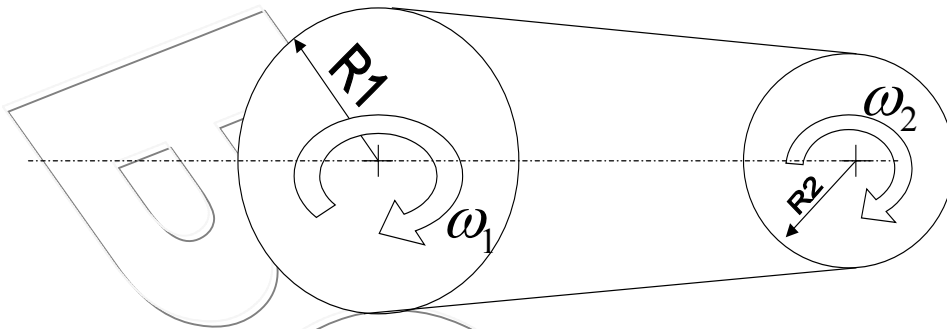
6.6. Pulegge collegate tramite organi flessibili

Si ritenga valida l'ipotesi che l'organo flessibile si avvolga sulle pulegge senza scorrere. Tale ipotesi risulta automaticamente nel caso di catene e cinghie dentate.

Se invece la trasmissione del moto (es. cinghie lisce) avviene per attrito si suppone che la coppia da trasmettere sia tale da non provocare lo scorrimento delle cinghie sulle pulegge.

Il **rapporto di trasmissione** risulta quindi:

$$\omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2 \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$



ATTENZIONE: Per cinghie e catene dentate i raggi **R1** ed **R2** non possono avere valori arbitrari ma devono essere necessariamente dei multipli del passo della dentatura adottato.

6.6.1. Equilibrio Statico

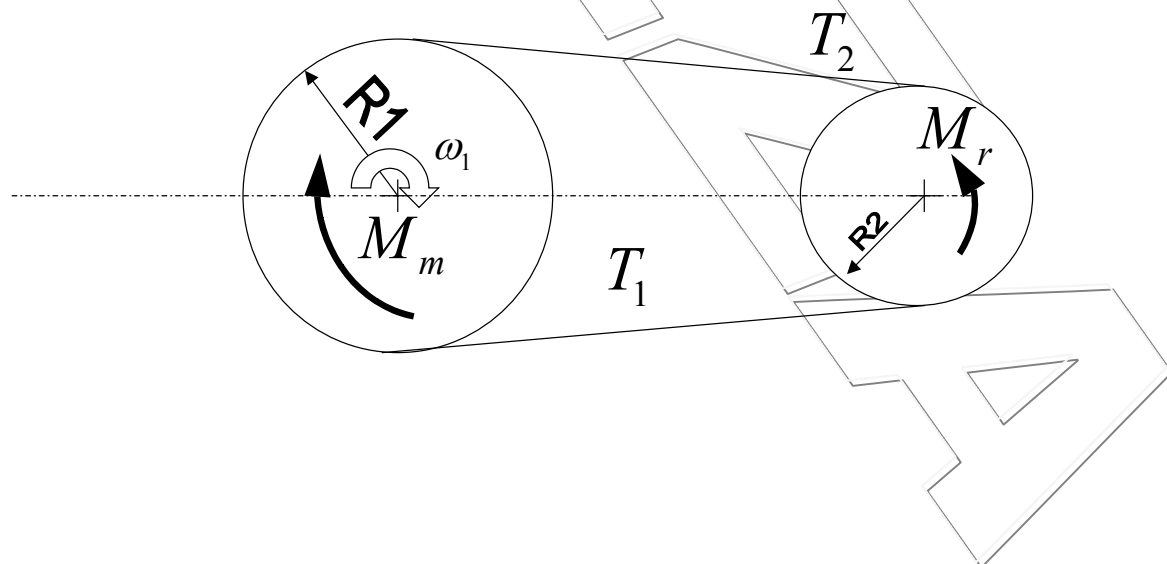
Si impone l'equilibrio alla rotazione delle cinghie trascurando perdite e forze di natura dissipativa (Caso Ideale)

Siano T_1 e T_2 le tensioni dei due rami della cinghia imponendo l'equilibrio alla rotazione si ottiene:

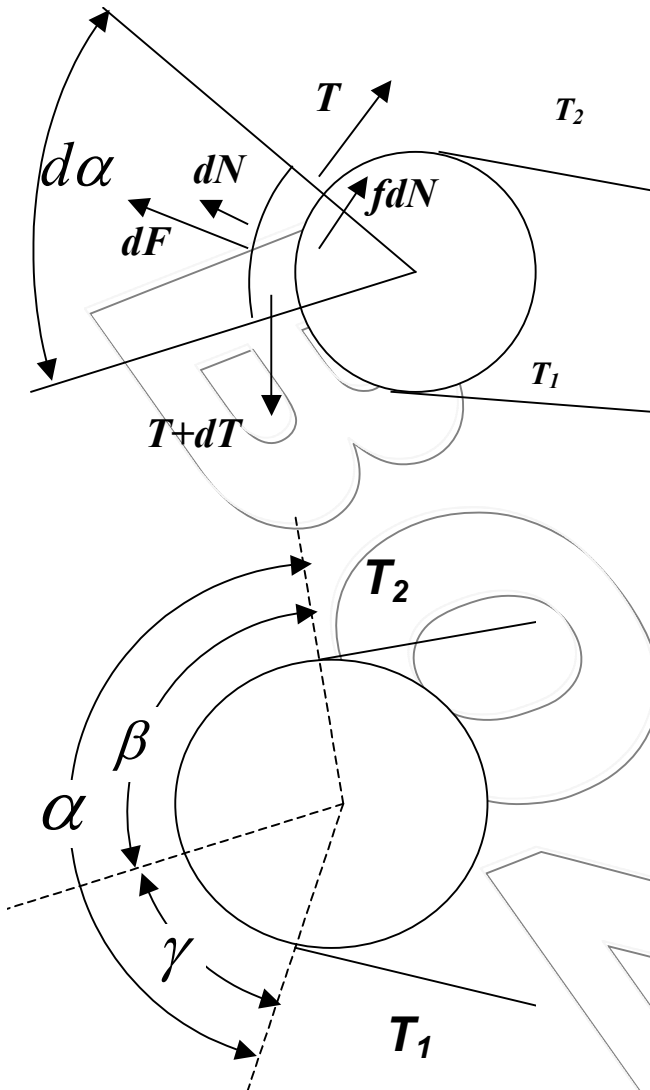
$$M_M = R_1 \cdot (T_1 - T_2) \text{ (Equilibrio su puleggia motrice)}$$

$$M_R = R_2 \cdot (T_1 - T_2) \text{ (Equilibrio su puleggia resistente)}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{M_m}{R_1} = \frac{M_r}{R_2} \Rightarrow \frac{M_m}{M_r} = \frac{R_1}{R_2}$$



6.6.2. Trasmissioni con cinghie piane (archi di aderenza e scorrimento)



La tensione della cinghia durante il contatto con la puleggia varia da T_1 a T_2 (la tensione sulle cinghie varia necessariamente per equilibrare le coppie sulle pulegge).

Tale variazione della tensione delle cinghie tra i due rami è riconducibile nelle cinghie lisce alle forze di attrito tangenziali scambiate con la superficie della puleggia.

Per effetto della geometria della trasmissione (interasse e diametro delle due pulegge) la cinghia abbraccia la puleggia su un arco detto di “abbracciamento” “ α ”.

Si prenda in esame un elemento infinitesimo della cinghia di ampiezza “ $d\alpha$ ”.

Il tiro della cinghia “ T ” lungo l’elemento infinitesimo varia di un “ dT ” che risulta facilmente calcolabile:

$$(T + dT) \cos\left(\frac{d\alpha}{2}\right) - T \cos\left(\frac{d\alpha}{2}\right) = fdN$$

$$dT = fdN$$

Dove “ dN ” rappresenta la forza normale scambiata tra l’elemento infinitesimo di cinghia e la superficie della puleggia.

“ dN ” può essere calcolato a partire dall’equilibrio dell’elemento di cinghia in direzione normale

$$dN + dF = 2T \sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) \cdot Td\alpha$$

Dove “ dF ” è la forza centrifuga che agisce sulla cinghia per effetto della rotazione:

$$dN = Td\alpha - dF = Td\alpha - q \frac{v^2}{r} r d\alpha = T^l d\alpha$$

q = densità lineare della cinghia

v = velocità della cinghia

r = raggio della puleggia

Poiché la forza centrifuga è indipendente dall’arco di abbracciamento (q , v ed r costanti) si ha:

$dT^l = dT$ per cui risulta lecito scrivere:

$$dT^l = fT^l d\alpha \Rightarrow \log \frac{T_1^l}{T_2^l} = f\alpha \Rightarrow T_1^l = T_2^l e^{f\alpha}$$

La tensione non può variare seguendo questa legge per tutto l’arco di abbracciamento perché se così fosse si otterrebbero valori di T_1 e T_2 non coerenti con l’equilibrio alla rotazione delle pulegge.

La tensione varia quindi con la sopra-citata legge esponenziale lungo un arco β detto “di scorrimento” e rimane costante lungo il restante angolo γ detto “di aderenza”.

L’aderenza si manifesta “sempre” sul lato entrante della cinghia (cui corrispondono evidentemente i tiri più elevati e quindi le forze normali scambiate con la puleggia più elevate).

Evidentemente al crescere della coppia trasmessa cresce l'ampiezza dell'arco di scorrimento rispetto a quello di aderenza. Quindi la massima coppia trasmissibile sarà quella per cui l'arco di scorrimento diventa pari a quello di abbracciamento.

Dal punto di vista matematico questo concetto può essere espresso calcolando il valore dell'arco di scorrimento al variare della coppia trasmessa M :

$$M = (T_1 - T_2)r = (T_1^I - T_2^I)r = T_2^I (e^{f\beta} - 1)e^{f\beta} \Rightarrow \begin{cases} T_1^I = \frac{M_2}{r} \frac{e^{f\beta}}{e^{f\beta} - 1} \\ T_2^I = \frac{M_2}{r} \frac{1}{e^{f\beta} - 1} \end{cases}$$

Le relazioni sopra-esposte non sono sufficienti a determinare β che evidentemente dipende anche dal precarico T_0 imposto ad ogni ramo della cinghia.

Ammettendo che le cinghie siano perfettamente elastiche e trascurando le differenze di allungamento sui due rami della cinghia dovute ai diversi archi di scorrimento sulle due pulegge si ottiene:

imposizione di uguaglianza allungamenti

$$l \frac{T_1 - T_0}{ES} = l \frac{T_0 - T_2}{ES} \Rightarrow T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

l = lunghezza di un ramo della cinghia

Sostituendo le due espressioni delle tensioni delle cinghie sopra trovate si ottiene:

$$T_0 = \frac{M}{2r} \frac{e^{f\beta} + 1}{e^{f\beta} - 1} + qv^2$$

Di solito si sceglie il valore di progetto di T_0 in modo che risulti: $T_0 = 2 \frac{M}{r}$

6.7. Calcolo del coefficiente di attrito equivalente delle cinghie trapezie

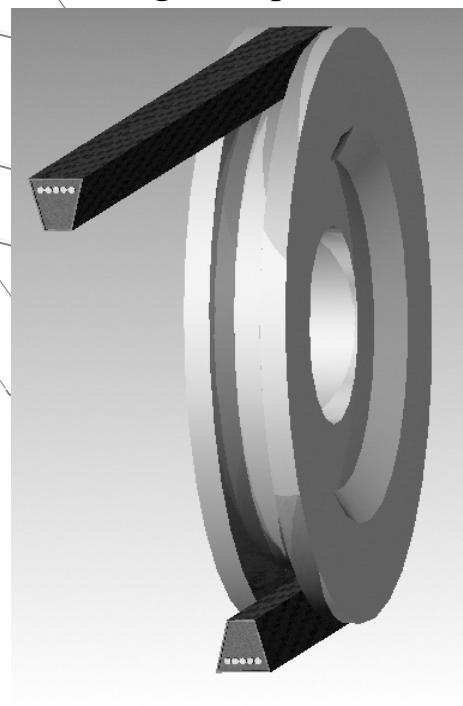
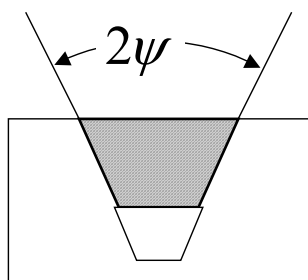
Le cinghie con sezione trapezia richiedono pulegge con una scanalatura opportuna che funge da guida.

Il contatto avviene lungo i fianchi inclinati del dente in questo modo il coefficiente di attrito equivalente risulta:

$$f^I = \frac{f}{\sin \psi}$$

In questo modo risulta trasmettere coppie molto elevate anche con precarichi relativamente modesti della cinghia per cui risulta il T_0 viene scelto in modo che risulti verificato il

seguente criterio: $T_0 = \frac{M}{r}$



6.8. Rendimento della trasmissione

Le principali perdite delle trasmissioni a cinghia sono riconducibili essenzialmente ai seguenti fenomeni:

- **Ventilazione:** le cinghie si muovono ad alta velocità trascinando con se dell'aria; le maggiori perdite di ventilazione si hanno per effetto dell'aria che viene trascinata dalla cinghia in prossimità delle pulegge.
- **Attrito sui Perna:** i forti precarichi delle cinghie inducono sui cuscinetti delle pulegge forti reazioni vincolari e quindi perdite per attrito. E' possibile ridurre il precarico T_0 fino a valori estremamente bassi $\left(0.65 \frac{M}{r}\right)$ utilizzando galoppini tenditori o speciali spray "adhesion improver" che tuttavia riducono la vita utile della cinghia ed aumentano le perdite dovute alla Elasticità/rigidezza della cinghia.
- **Elasticità/Rigidezza:** le cinghie reali non sono perfettamente inestensibili e flessibili; la geometria di avvolgimento della cinghia reale risulta quindi diversa da quella ideale ed una certa quota di lavoro viene dissipata durante l'avvolgimento/svolgimento della cinghia sulla puleggia.

Il rendimento di una trasmissione a cinghia può raggiungere in condizioni particolari il 95%.

Si sconsigliano rapporti di trasmissioni maggiori di 6 per ogni stadio di pulegge collegate.

Le massime velocità periferiche ammesse sono nell'ordine dei 50 m/s.

7. RUOTE DENTATE

7.1. TRASMISSIONE DEL MOTO FRA ASSI PARALLELI

Si considerino due assi tra loro paralleli (r e r' in figura 50) e due corpi rigidi che ruotano attorno a tali assi con velocità angolari ω e ω' , facciamo inoltre l'ipotesi che le due velocità angolari siano fra loro discordi.

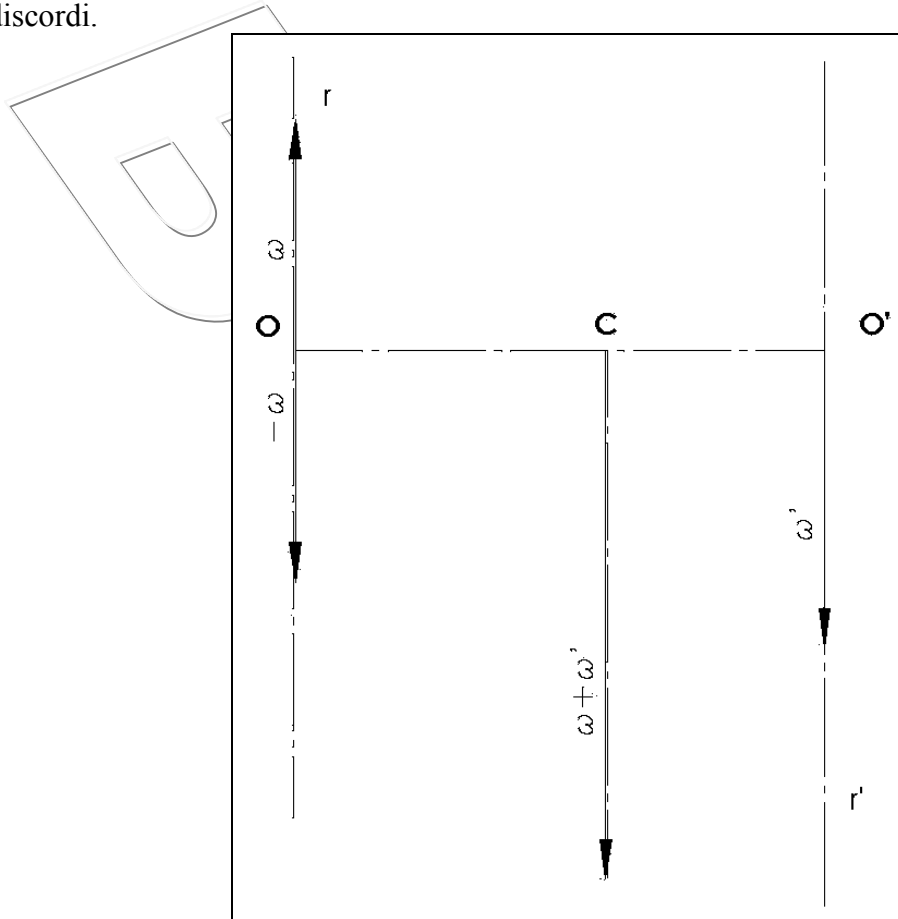


Figura 50: Trasmissione per assi paralleli

Volendo ricavare le primitive del moto (polare fissa λ e polare mobile λ') imponiamo che il rapporto tra le due velocità angolari sia costante, ovvero:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \text{cost.}$$

Per ottenere il moto relativo dell'asse r' rispetto all'asse r , si imprime a tutto il sistema una rotazione $-\omega$. Si otterrà così ancora una rotazione di intensità $\omega + \omega'$ attorno ad un asse parallelo a r e r' ma passante per un punto C , tale da garantire la condizione:

$$\omega \cdot OC = \omega' \cdot O'C$$

moltiplicando ambo i membri per $(O'C/\omega)$ si ottiene:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OC}{O'C} = \text{cost}$$

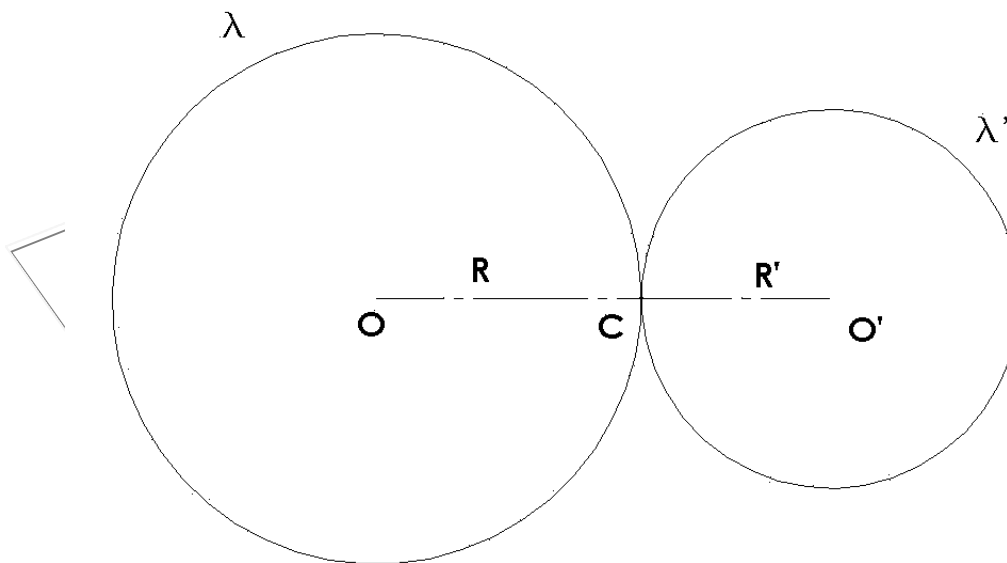
avendo sfruttato l'ipotesi fatta in precedenza. Dal momento che la distanza OO' si mantiene costante durante il moto ed è costante il rapporto tra i segmenti OC e $O'C$ allora si può scrivere che:

$$OC = \text{cost}$$

$$O'C = \text{cost}$$

Allora le due polari sono date da due cilindri circolari di assi r e r' e di raggi OC e $O'C$.

7.2. RUOTE DI FRIZIONE



(Figura 51) Ruote di Frizione

Se ci riportiamo su di un piano ortogonale alla direzione di ω , le due polari del moto possono essere rappresentate per mezzo di due circonferenze tangenti nel punto C (*centro d'istantanea rotazione*). Materializzando tali circonferenze possiamo ricavare un primo esempio di trasmissione tra assi paralleli in cui i due membri hanno un moto relativo dato da un rotolamento puro. Questo tipo di trasmissione prende il nome di **“ruote di frizione”**. Sotto quest'ipotesi, riferendoci alla figura 51, λ sia la polare fissa (*base*) coincidente con la ruota motrice, R sia il raggio di λ , la ruota motrice abbia una velocità di rotazione pari a ω ed il momento motore sia diretto in senso antiorario, λ' sia la polare mobile (*rulletta*) coincidente con la ruota cedente, R' sia il raggio di λ' , la ruota cedente abbia una velocità di rotazione pari a ω' ed il momento resistente sia anch'esso diretto in senso antiorario.

Essendo il moto relativo un rotolamento puro non vi potrà essere strisciamento tra i due membri, questo implica che le velocità periferiche nel punto di contatto (C) dovranno avere uguale intensità, ovvero:

$$R' \cdot \omega' = R \cdot \omega$$

Definiamo poi il rapporto di trasmissione tra le due ruote come, il rapporto tra la velocità angolare della ruota cedente e la velocità angolare della ruota motrice, ovvero:

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

Sfruttando la condizione di non strisciamento tra le ruote si può anche scrivere:

$$\tau = \frac{R}{R'}$$

ovvero il rapporto di trasmissione può essere espresso utilizzando solo parametri geometrici delle ruote di frizione.

Analizziamo adesso la coppia nel caso ideale.

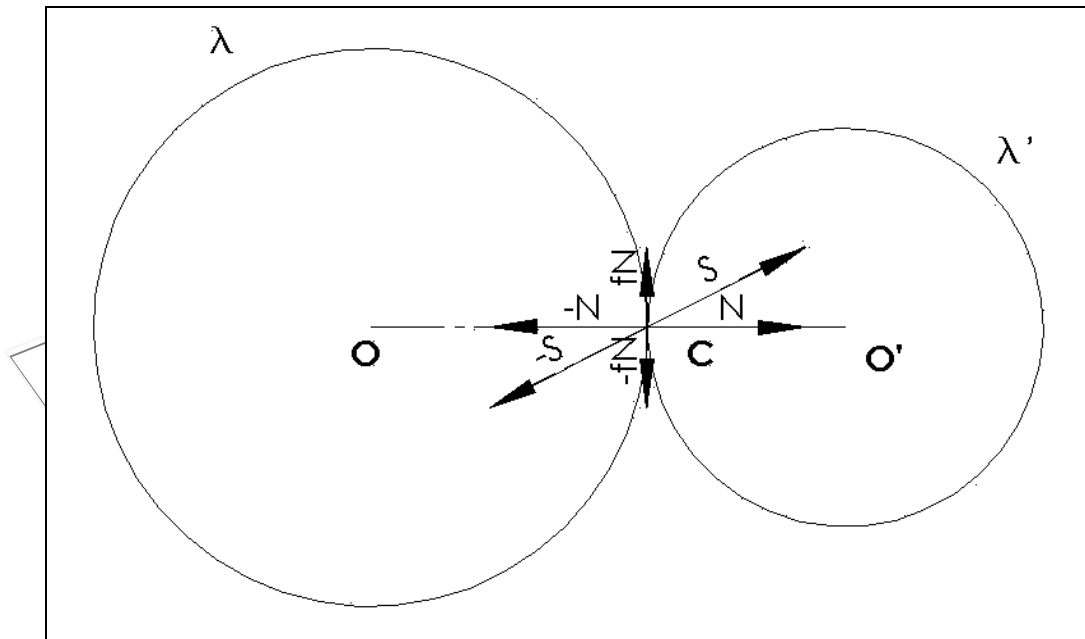


Figura 52: Forze agenti sulle ruote di frizione nel caso ideale

Riferendoci allo schema in figura 52 si può scrivere:

$$M_{mo} = R \cdot h \cdot N$$

$$M_r = R' \cdot h' \cdot N$$

dove h è un definito come:

$$0 \leq h \leq f$$

Eliminando hN si giunge all'espressione:

$$M_{mo} = \frac{R}{R'} \cdot M_r = \tau \cdot M_r$$

ovvero, nel caso ideale, il momento motore è esprimibile attraverso il prodotto del rapporto di trasmissione per il momento resistente.

L'assunzione che il moto relativo sia dato da un rotolamento puro è però una semplificazione, in realtà si vengono a creare delle deformazioni locali nell'intorno del punto di contatto, deformazioni dovute alla pressione tra le due ruote; quindi il contatto non avviene più in un punto ma su di una linea. Come conseguenza si ha che la forza N non passa più per il centro delle ruote di frizione ma è traslatata, parallelamente a se stessa, di una quantità δ (figura 53), la direzione della traslazione dipende dal senso di rotazione delle ruote di frizione.

Anche per il caso reale calcoliamo le espressioni del momento motore e del momento resistente:

$$M_m = N \cdot \delta + R \cdot h \cdot N$$

$$M_r = -N \cdot \delta + R' \cdot h' \cdot N$$

Dalla seconda espressione si può ricavare N:

$$N = \frac{M_r}{h \cdot R' - \delta}$$

Sostituendo poi N nella prima espressione si ricava il momento motore:

$$M_m = \frac{h \cdot R + \delta}{h \cdot R' - \delta} M_r = M_r \cdot \frac{R}{R'} \cdot \frac{h + \frac{\delta}{R}}{h - \frac{\delta}{R'}}$$

Ricordando l'espressione del rendimento:

$$\eta = \frac{M_{mo}}{M_m}$$

si può scrivere per la coppia di ruote di frizione:

$$\eta = \frac{M_r \frac{R}{R'}}{\frac{R}{R'}} \cdot \frac{h - \frac{\delta}{R'}}{h + \frac{\delta}{R}} = \frac{h - \frac{\delta}{R'}}{h + \frac{\delta}{R}}$$

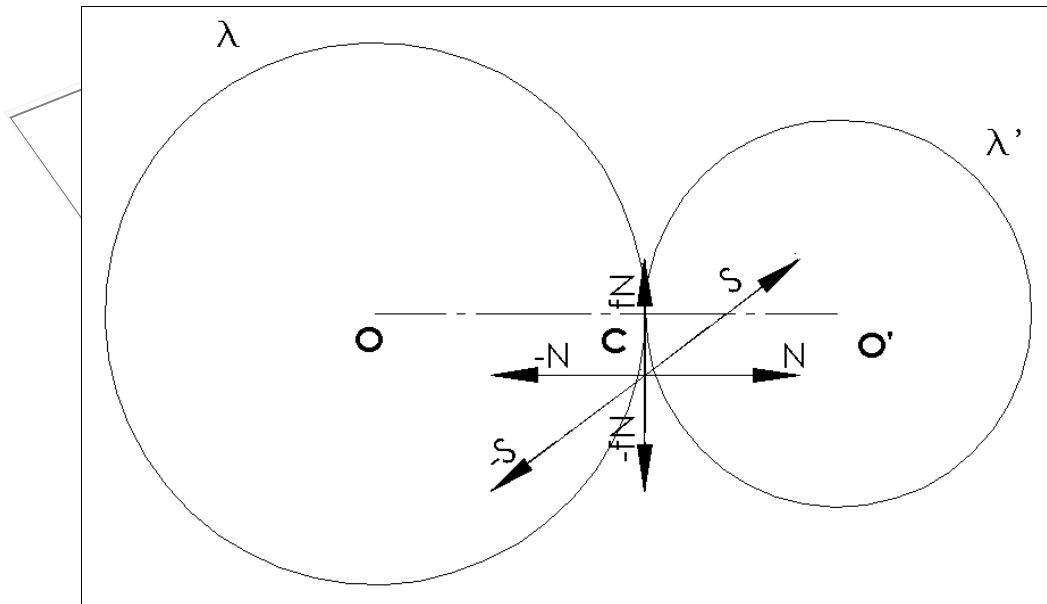


Figura 53: Forze agenti sulle ruote di frizione nel caso reale

Le ruote di frizione vengono impiegate nella trasmissione di piccole coppie (strumenti di misura, motorini di ciclomotori), nella trasmissione di moto sotto l'azione di forze modeste ad organi di grandi dimensioni (ad esempio betoniere).

Il difetto di una trasmissione del moto mediante ruote di frizione è che essa dipende dal valore del coefficiente d'attrito; volendo utilizzare un tipo di trasmissione indipendente da tale coefficiente si deve rinunciare ad avere un moto relativo di puro rotolamento.

7.3. PROFILI CONIUGATI

Dato un generico moto piano definito per mezzo della polare fissa λ e della polare mobile λ' si definiscono *profili coniugati* due curve che durante il moto piano si mantengono costantemente in contatto. Le polari stesse del moto sono due particolari profili coniugati.

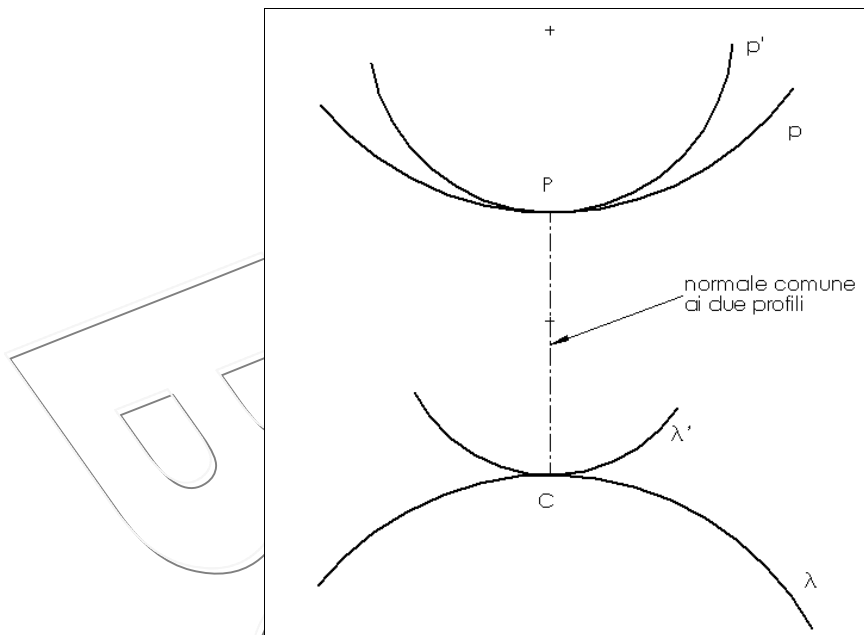


Figura 54: Definizione profili coniugati

Per i profili coniugati vale la seguente proprietà:

- **La normale comune ai profili coniugati nel punto di contatto passa per il centro di istantanea rotazione C del moto piano.**

Se così non fosse si avrebbe il distacco o la compenetrazione dei profili durante il moto.

Vogliamo adesso, date le due polari del moto ed il profilo p' , tracciare il profilo p (coniugato di p').

Per fare questo useremo due diversi metodi.

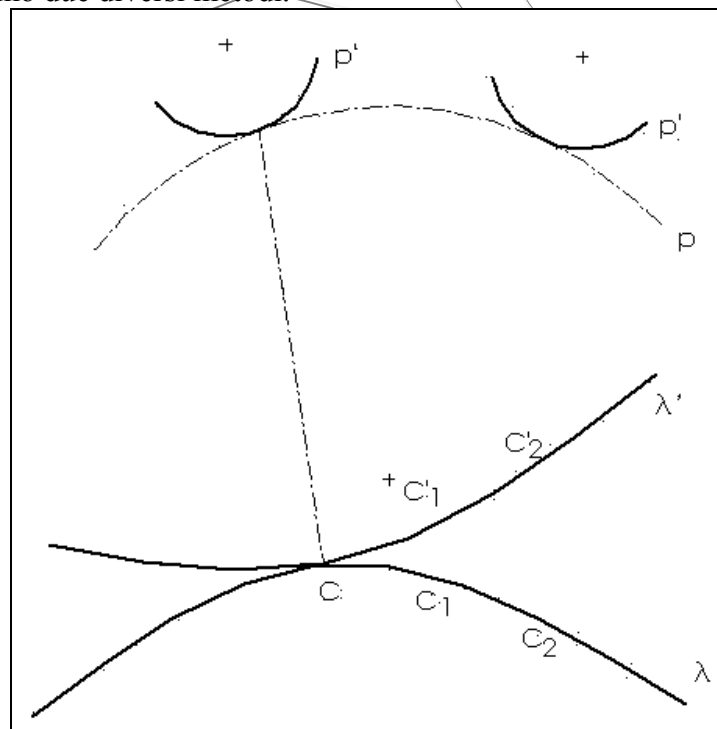


Figura 55: Metodo dell'involuppo

- **Metodo dell'involuppo**

Questo metodo consiste nel disegnare le posizioni assunte dal profilo p' durante il moto di rotolamento della polare mobile sulla polare fissa. La curva ottenuta come involuppo di tutte le curve p' tracciate sarà il profilo p cercato.

- **Metodo dell'epiciclo**

Consideriamo una curva ε ed un punto P ad essa solidale e facciamo rotolare la curva ε una volta sulla polare fissa λ e una volta sulla polare mobile λ' . Durante tali moti il punto P descriverà due curve p e p' tra loro coniugate.

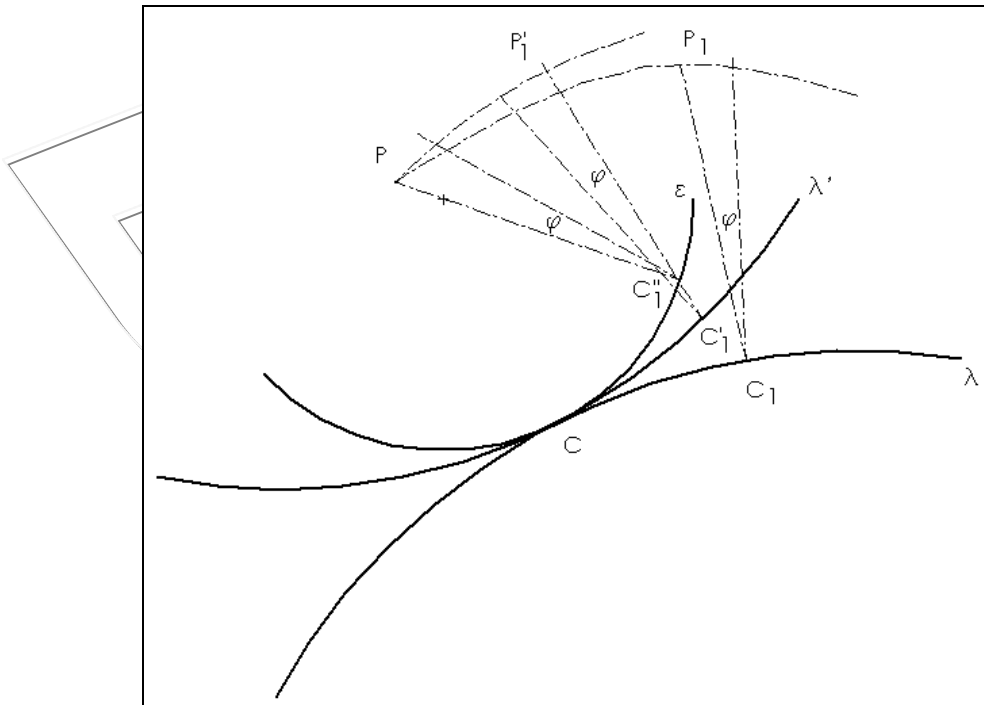


Figura 56: Metodo dell'epiciclo

Con riferimento alla figura 56 possiamo scrivere le seguenti relazioni geometriche:

$$C_1''P = C_1'P_1'$$

$$C_1''P = C_1P_1$$

da cui si ricava l'uguaglianza:

$$C_1'P_1' = C_1P_1$$

tale relazione indica che i punti P_1' e P_1 sono coniugati durante il moto.

Si possono ottenere due profili coniugati anche utilizzando, al posto del punto P , una curva μ solidale alla curva ε .

Il metodo dell'epiciclo ha la particolarità di poter creare delle famiglie di curve tali che presi due profili qualunque questi risultano essere fra loro coniugati. L'asserto deriva dal considerare che il profilo p è ricavato unicamente da ε e dalla polare fissa, mentre il profilo p' è ricavato unicamente da ε e dalla polare mobile. Variando λ' (o λ) si ottiene una nuova curva p' (o p) ancora coniugata con p (o p').

7.4. RUOTE DENTATE CILINDRICHE AD EVOLVENTE

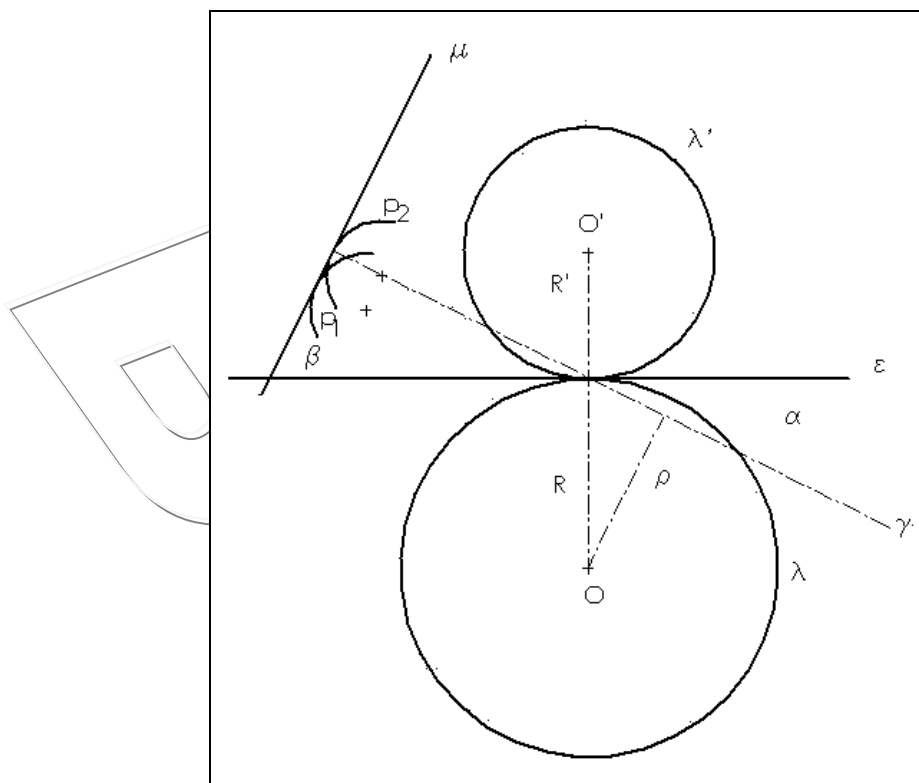


Figura 57: Creazione evolvente ruota dentata

Come abbiamo già detto parlando delle ruote di frizione se si desidera avere una trasmissione del moto indipendente dal valore del coefficiente d'attrito si deve abbandonare l'assunzione di utilizzare come profili coniugati le polari del moto e quindi rinunciare ad avere un moto di puro rotolamento.

Si deve quindi utilizzare uno dei metodi visti nel precedente paragrafo per generare due profili coniugati; scegliamo il metodo dell'epiciclo. La curva ε (epiciclo) sia una retta solidale ad entrambe le polari e la curva μ sia una retta solidale a ε (figura 57). I profili che μ verrà a generare sono evolventi di cerchio, infatti se chiamiamo β l'angolo che μ forma con ε allora l'angolo che la normale a μ (passante per il centro istantaneo di moto C ed indicata con γ) forma con l'epiciclo sarà:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \text{cost}$$

Quindi in ogni generica posizione la retta γ si manterrà ad una distanza costante dal centro O della polare fissa, tale distanza è definita come:

$$\rho = R \cdot \cos(\alpha)$$

L'evolvente del moto sarà allora una circonferenza di centro O e raggio ρ e prende il nome di **circonferenza di base**.

Con considerazioni del tutto analoghe si può asserire che il profilo p' è l'evolvente della circonferenza di centro O' e raggio ρ' = R' · cos(α).

Gli stessi profili coniugati potevano essere generati come traiettoria di un punto P solidale alla retta γ, durante il moto di rotolamento di tale retta sulle due circonferenze di base.

I profili ad evolvente godono poi delle seguenti proprietà:

1. **La forza trasmessa dai denti, se si trascurano gli attriti, ha direzione costante**
2. **I profili rimangono coniugati anche variando l'interasse, in questo caso cambia solo l'angolo α (detto angolo di pressione). Per l'angolo di pressione esistono valori normalizzati pari rispettivamente a 20° e 14.30°**

3. La ruota con un numero infinito di denti (denominata dentiera) ha un superfici dei denti piane.

7.5. CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DI UNA RUOTA DENTATA

Nel seguente paragrafo daremo alcune definizioni riguardanti parametri geometrici caratterizzanti le ruote dentate.

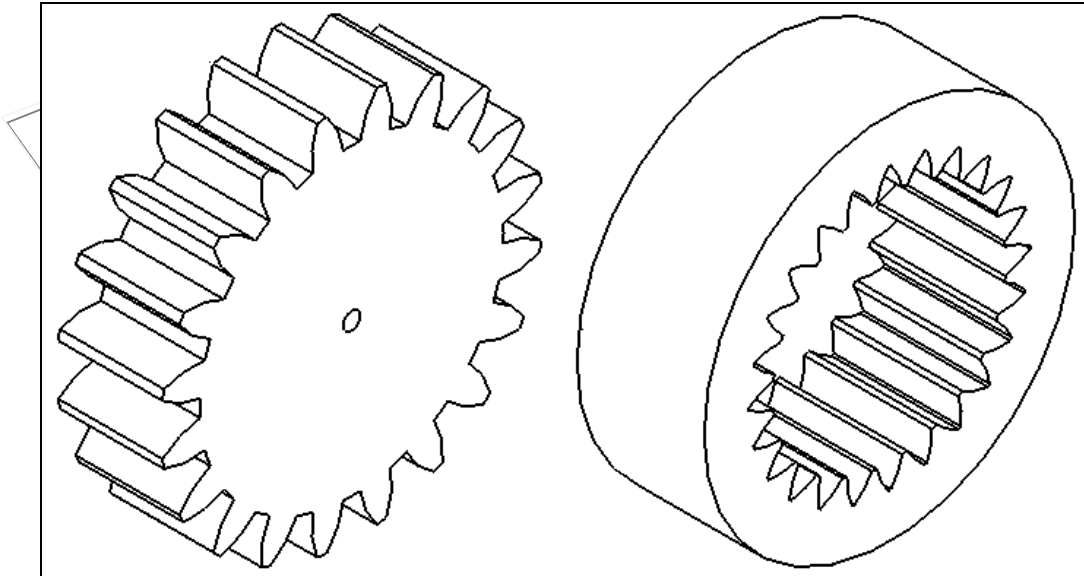


Figura 58: Generiche ruote dentate cilindriche a denti dritti, dentatura esterna e dentatura interna

Prendiamo, come riferimento, la generica ruota dentata cilindrica a denti dritti riportata in figura 58. La cresta del dente è compresa entro una circonferenza, la quale prende il nome di “**circonferenza di testa**”. Oltre a questa sono presenti la “**circonferenza primitiva**”, traccia sul piano della ruota dentata della polare del moto relativo; la “**circonferenza di base**” e la “**circonferenza di piede**”. Quest’ultima delimita la parte inferiore del dente ed è a questo raceordata. Tutte le circonferenze sopraccitate sono concentriche. Per maggiore chiarezza si veda la seguente figura 59.

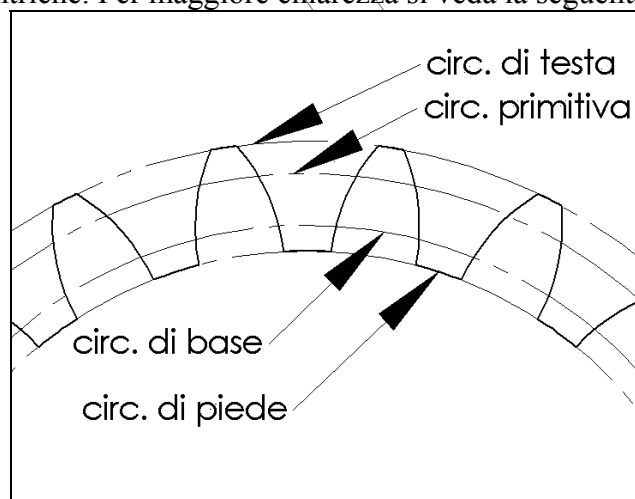


Figura 59: Definizioni circonferenza di base, primitiva, di testa e di piede

La distanza radiale tra la primitiva e la circonferenza di testa prende il nome di **addendum** (generalmente indicato con a), mentre la distanza radiale tra la primitiva e la circonferenza di piede prende il nome di **dedendum** (generalmente indicato con d). Si chiama invece altezza del dente (indicata con h) la somma dell’addendum e del dedendum.

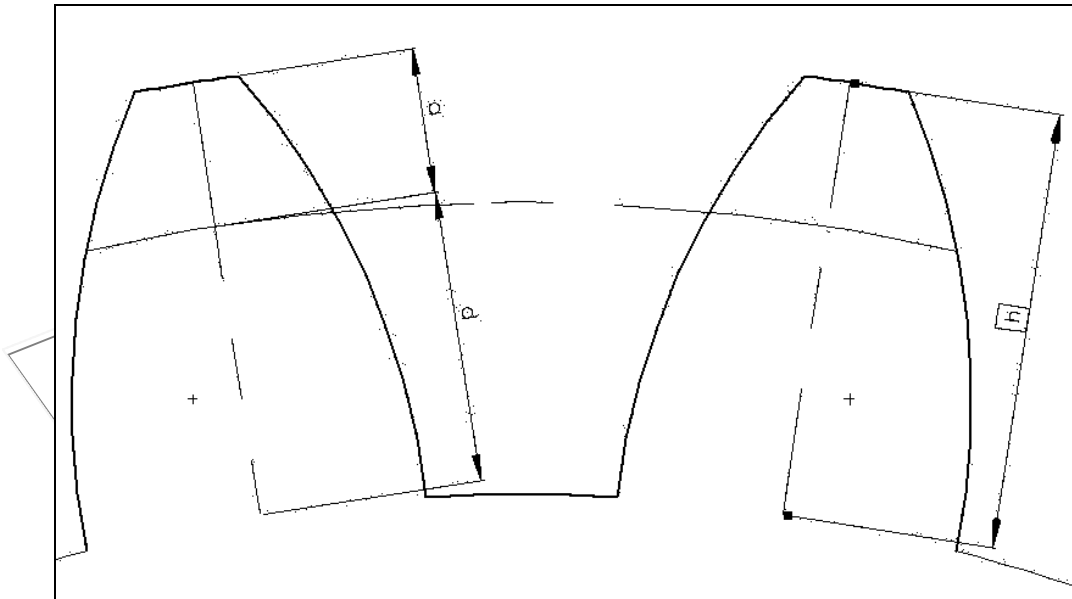


Figura 60: Definizione addendum, dedendum e altezza dente.

Le superfici laterali del dente prendono il nome di fianco. La circonferenza primitiva divide il fianco del dente in due porzioni, un'esterna alla circonferenza primitiva che prende il nome di *fianco addendum* e un'interna alla circonferenza primitiva che prende il nome di *fianco dedendum*. Si definisce **modulo** di una ruota dentata il rapporto tra il diametro primitivo $2R$ e il numero di denti z , ovvero:

$$m = \frac{2R}{z}$$

Il valore del modulo non può essere scelto a caso ma deve rientrare in uno dei valori normalizzati (UNI 4504).

VALORI NORMALIZZATI DEL MODULO							
<u>1</u>	1.25	<u>1.5</u>	1.75				
2	2.25	<u>2.5</u>	2.75				
<u>3</u>	3.25	3.5	3.75				
<u>4</u>		4.5					
<u>5</u>		5.5					
<u>6</u>		6.5					
7	<u>8</u>	9	<u>10</u>	11	<u>12</u>	14	<u>16</u>

La norma UNI prevede che siano adottati di preferenza i valori del modulo sottolineati. Una volta definito il modulo si può distinguere tra due diversi tipi di proporzionamento:

- **Proporzionamento normale:** in cui
 - $a = m$
 - $d = 1.25m$
 - $h = 2.25 m$
- **Proporzionamento ribassato:** in cui
 - $a = 0.8m$
 - $d = m$
 - $h = 1.8m$

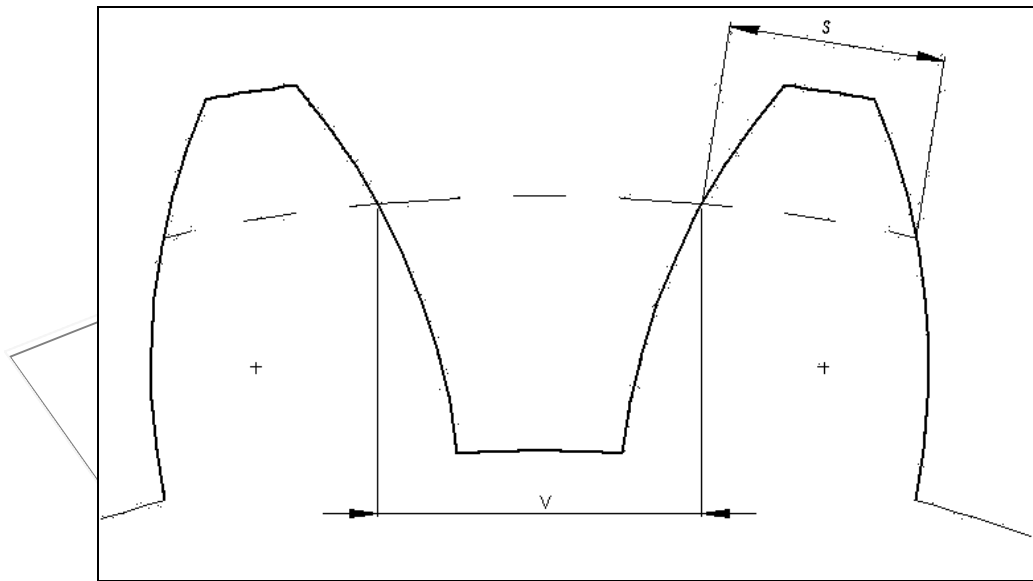


Figura 61: Definizione di vano e spessore

Sulla circonferenza primitiva si possono misurare altri due parametri geometrici caratterizzanti un dente di una ruota dentata, questi sono lo *spessore* ed il *vano*. Lo spessore ed il vano sono pari a metà del *passo*; quest'ultimo è definito come la distanza tra due profili consecutivi misurata sulla circonferenza primitiva.

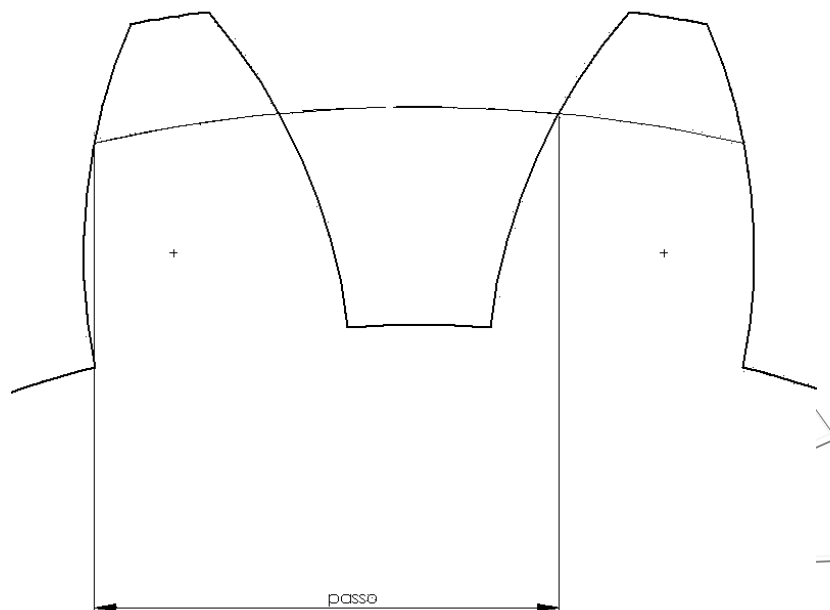


Figura 62: Definizione di passo

L'espressione analitica del passo è data da:

$$p = \frac{2\pi R}{z}$$

dove R è il raggio della primitiva e z il numero di denti della ruota. Condizione necessaria affinché due ruote dentate ingranino fra di loro è che abbiano lo stesso passo. E' interessante notare che esiste un legame tra modulo e passo di una ruota dentata:

$$p = \frac{2\pi R}{z} = \pi \left(\frac{2R}{z} \right) = \pi m$$

Ma questo equivale a dire che due ruote dentate ingranano fra loro se hanno lo stesso modulo. Volendo dimostrare l'asserto si considerino due ruote dentate (ruota 1 e ruota 2) aventi la prima passo p_1 e la seconda passo p_2 . Affinché vi sia ingranamento deve risultare:

$$p_1 = p_2$$

ma scrivendo il passo in funzione del modulo si ha:

$$\pi m_1 = \pi m_2$$

semplificando si ottiene infine:

$$m_1 = m_2$$

Consideriamo la definizione del rapporto di trasmissione tra due ruote dentate:

$$\tau = \frac{R_1}{R_2}$$

dove R_1 e R_2 sono i raggi delle primitive delle ruote. Dalla definizione di passo si può ricavare la seguente espressione:

$$R = \frac{p \cdot z}{2\pi}$$

Quindi il rapporto di trasmissione può essere scritto come:

$$\tau = \frac{p \cdot z_1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{p \cdot z_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Ovvero il rapporto di trasmissione è direttamente legato al numero di denti delle due ruote dentate.

7.6. CONTINUITÀ' DEL MOTO

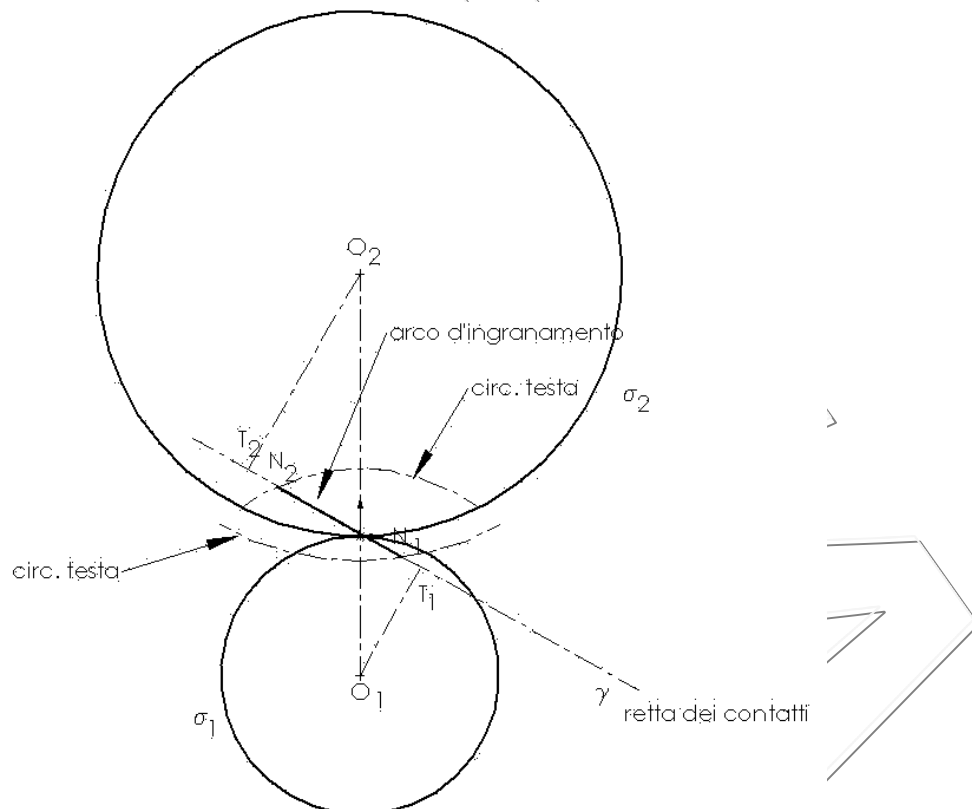


Figura 63: Condizione di continuità del moto

Durante l'ingranamento delle due ruote dentate il punto di contatto tra due generici denti si sposta su di un segmento appartenente ad una retta, indicata con γ , e chiamata *retta dei contatti*, il segmento prende invece il nome di *arco di ingranamento*, ed è delimitato dai punti N_1 e N_2 , intersezioni della retta γ con le circonferenze di testa delle due ruote.

Durante il moto del punto di contatto dal punto N_1 al punto N_2 , le due primitive σ_1 e σ_2 rotolano su di un arco s , denominato **arco di azione**. Esiste una relazione tra il passo di una ruota e la lunghezza dell'arco di azione, tale relazione prende il nome di **condizione di continuità del moto** e si esprime analiticamente attraverso la relazione:

$$s \geq p$$

Dove con p si è indicato il passo della ruota dentata. Se non si verificasse tale condizione (ad esempio risultasse che $p > s$) vorrebbe dire che in un arco di lunghezza $p-s$ non si avrebbero denti in presa e quindi il moto della ruota dentata risulterebbe discontinuo, cosa che non è accettabile. Calcoliamo adesso, per via analitica le lunghezze dell'arco di azione e dell'arco di ingranamento. Riferendosi alla figura 64, dalle proprietà geometriche dell'evolvente di cerchio si ha che vale l'uguaglianza:

$$HL = N_2C$$

Consideriamo adesso le circonferenze di testa e primitiva; esiste una relazione tra gli archi B_2C e HL e i raggi delle circonferenze:

$$\frac{B_2C}{HL} = \frac{R_1}{\rho_1} = \frac{R_1}{R_1 \cdot \cos(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

sfruttando l'uguaglianza scritta in precedenza:

$$B_2C = \frac{HL}{\cos(\alpha)} = \frac{N_2C}{\cos(\alpha)}$$

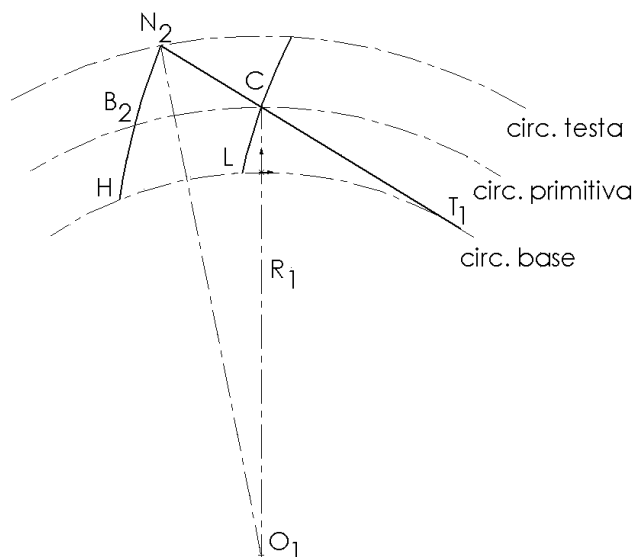


Figura 64: Numero minimo di denti

L'espressione di tutto l'arco di azione s è data da:

$$s = B_2B_1 = \frac{N_2N_1}{\cos(\alpha)}$$

Calcoliamo adesso il valore del segmento N_2C . Riferendosi ancora alla figura 64 indichiamo il segmento N_2C con la variabile x . Applicando il teorema di Carnot al triangolo N_2CO si può scrivere:

$$(R_1 + a)^2 = R_1^2 + x^2 - 2xR_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \Rightarrow$$

$$R_1^2 + 2aR_1 + a^2 = R_1^2 + x^2 + 2xR_1 \sin(\alpha)$$

semplificando si ottiene un'equazione di secondo grado nella variabile x :

$$x^2 + 2xR_1 \sin(\alpha) - a(a + 2R_1) = 0$$

la quale risolta porta ad un'espressione della variabile in funzione unicamente del raggio della circonferenza primitiva, dell'addendum e dell'angolo di pressione.

$$x = N_2 C = -R_1 \sin(\alpha) + \sqrt{a^2 + R_1 (R_1 \sin^2(\alpha) + 2a)}$$

Per calcolare anche l'espressione della parte di segmento CN_1 , si deve considerare l'altra ruota ripetendo, in modo del tutto analogo, i ragionamenti fatti in precedenza.

7.7. CONDIZIONE DI NON INTERFERENZA TRA I PROFILI

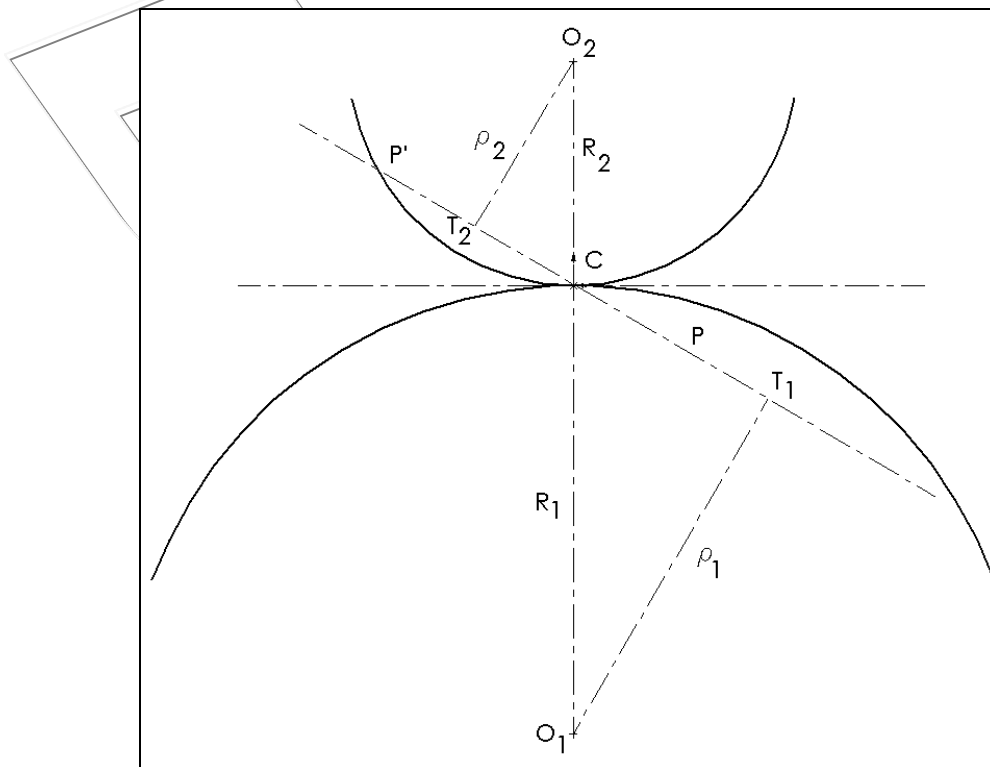


Figura 65: Condizione di non interferenza tra i profili

Sia P il punto di contatto tra due denti in presa, con profilo ad evolvente di cerchio, di due ruote dentate. Tale punto P, durante il moto relativo, si sposterà lungo la retta dei contatti descrivendo un segmento. Il segmento dovrà risultare o tutto interno, oppure esterno, al segmento T_1T_2 , anch'esso appartenente alla retta dei contatti. Vediamo perché deve valere la condizione sopra esposta. I punti T_1 e T_2 sono i centri di curvatura dei profili e quando il punto P si muove all'interno del segmento T_1T_2 i denti risultano entrambi avere fianchi convessi, se il punto P è invece esterno al segmento T_1T_2 allora entrambi i denti avranno fianchi concavi. Queste due tipologie di fianco sono accettabili, non è invece accettabile un fianco che cambi concavità (da concavo a convesso o da convesso a concavo) cosa che accadrebbe se il punto P percorresse un segmento solo in parte contenuto in T_1T_2 . Ricapitolando si può enunciare la *condizione di non interferenza dei profili* come:

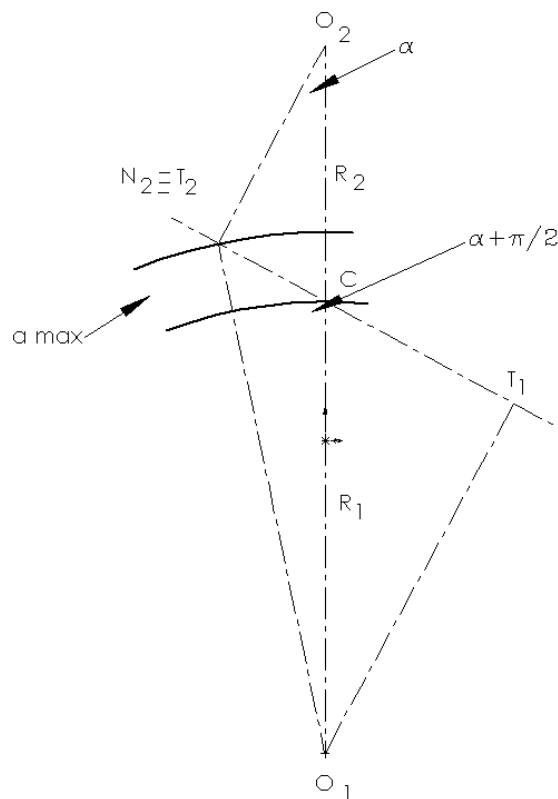
Affinché non si abbia interferenza tra i denti di due ruote dentate durante il moto di ingranamento il punto di contatto P tra i denti deve percorrere un segmento o tutto interno o tutto esterno a T_1T_2 , distanza tra i centri di curvatura dei profili misurata sulla retta dei contatti.

La condizione di non interferenza dei profili introduce anche una condizione minima sul numero di denti di una generica ruota dentata.

Sia N_1N_2 il segmento sulla retta dei contatti percorso dal punto P, e sia C il centro istantaneo di moto delle due primitive. Per la non interferenza dovrà risultare:

$$CN_2 \leq CT_2$$

$$CN_1 \leq CT_1$$

$$CN_2 < CN_1 \leq CT_2 < CT_1$$
$$CN_2 \leq CT_2$$
$$a = k \cdot m = k \frac{2R}{z}$$
$$CN_2 = CT_2$$


Consideriamo il triangolo N_2CO_1 , in questo i cateti sono esprimibili attraverso le relazioni:

$$O_1 N_2 = a + R_1$$

$$O_1 C = R_1$$

$$N_2 C = R_2 \cdot \sin(\alpha)$$

$$(R_1 + a)^2 = R_1^2 + R_2^2 \cdot \sin^2(\alpha) - 2R_1 \cdot R_2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

99

$$R_1^2 + 2aR_1 + a^2 = R_1^2 + R_2^2 \cdot \sin^2(\alpha) + 2R_1 \cdot R_2 \cdot \sin^2(\alpha)$$

Semplificando, si ottiene un'equazione di secondo grado nella variabile a :

$$a^2 + 2R_1a - R_2 \cdot \sin^2(\alpha) \cdot (R_2 + 2R_1)$$

Risolvendo tale equazione si ricava l'espressione:

$$a = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 \cdot (R_2 + 2R_1) \cdot \sin^2(\alpha)}$$

Dovendo essere:

$$a_{\max} \geq k \cdot m_{\max}$$

e ricordando l'espressione del modulo, si può scrivere:

$$\frac{2kR_2}{z_{\min}} \leq -R_1 + \sqrt{R_1^2 + R_2 \cdot (R_2 + 2R_1) \cdot \sin^2(\alpha)}$$

Il numero minimo di denti è così dato da:

$$z_{\min} \geq \frac{2kR_2}{-R_1 + \sqrt{R_1^2 + R_2 \cdot (R_2 + 2R_1) \cdot \sin^2(\alpha)}} =$$

$$= \frac{2k}{-\tau + \sqrt{\tau^2 + (1 + 2\tau) \cdot \sin^2(\alpha)}}$$

Avendo sostituito al rapporto tra i raggi primitivi il rapporto di trasmissione.

Nel caso di ruote a dentatura interna si procede in modo analogo, sostituendo τ con $-\tau$ e prendendo il radicando col segno negativo, si ha così:

$$z_{\min} \geq \frac{2k}{\tau - \sqrt{\tau^2 + (1 + 2\tau) \cdot \sin^2(\alpha)}}$$

Come ultimo caso prendiamo in esame l'ingranamento tra una dentiera e una ruota dentata (in questo caso : $\tau \rightarrow \infty$).

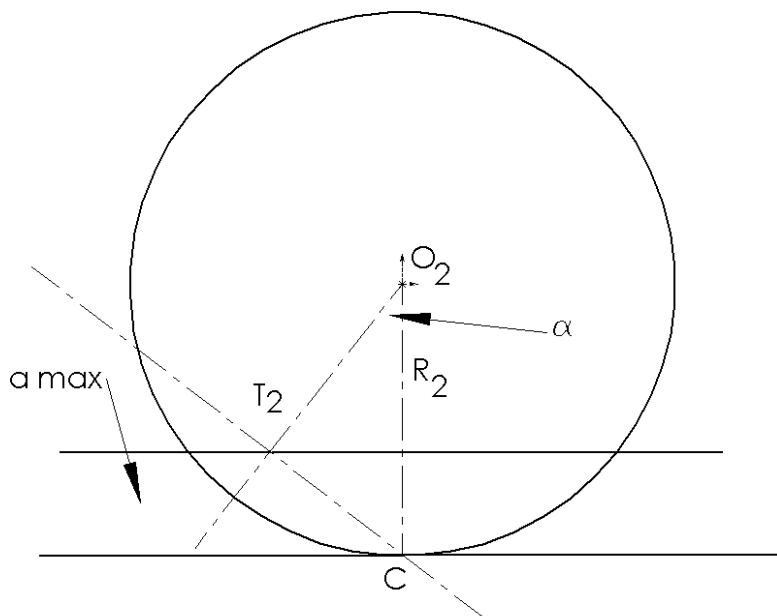


Figura 67: Numero minimo denti: caso dentiera-ruota

Dal momento che il rapporto di trasmissione tende all'infinito non è possibile ricavare, attraverso le formule precedenti, un'espressione del numero minimo di denti. Se però osserviamo la figura 67 si può notare che è possibile scrivere la relazione:

$$a = CT_2 \sin(\alpha)$$

a sua volta CT_2 è esprimibile attraverso la relazione:

$$CT_2 = R_2 \sin(\alpha)$$

e quindi:

$$a = R_2 \sin^2(\alpha)$$

Procedendo come nel caso di due ruote, si arriva infine alla relazione cercata:

$$z \geq \frac{2k}{\sin^2(\alpha)}$$

Si poteva giungere allo stesso risultato applicando il teorema di *de l'Hopital* all'espressione del numero minimo di denti per due ruote.

7.8. DENTATURE CORRETTE

In questo paragrafo prenderemo in esame ruote dentate aventi un proporzionamento diverso da quello normale.

E' opportuno, se non necessario ricorrere a ruote con dentature *corrette* quando:

- La correzione viene effettuata per evitare interferenza durante la fase di lavorazione di una ruota
- La correzione viene effettuata per esigenze di funzionamento in fase d'esercizio.

Le esigenze di funzionamento possono essere riassunte in:

1. evitare eventuali interferenze.
2. migliorare la resistenza del dente sia a sollecitazioni di tipo flessionale sia da un punto di vista di resistenza ad usura.
3. permettere il montaggio di ruote con un interasse prestabilito

Un primo esempio di correzione di ruote dentate è dato dal proporzionamento ribassato, già mostrato in precedenza, nel quale si a realizzare un dente con le seguenti caratteristiche geometriche:

- addendum = 0.8m
- dedendum = m
- altezza = 1.8m

Dentiera utensile

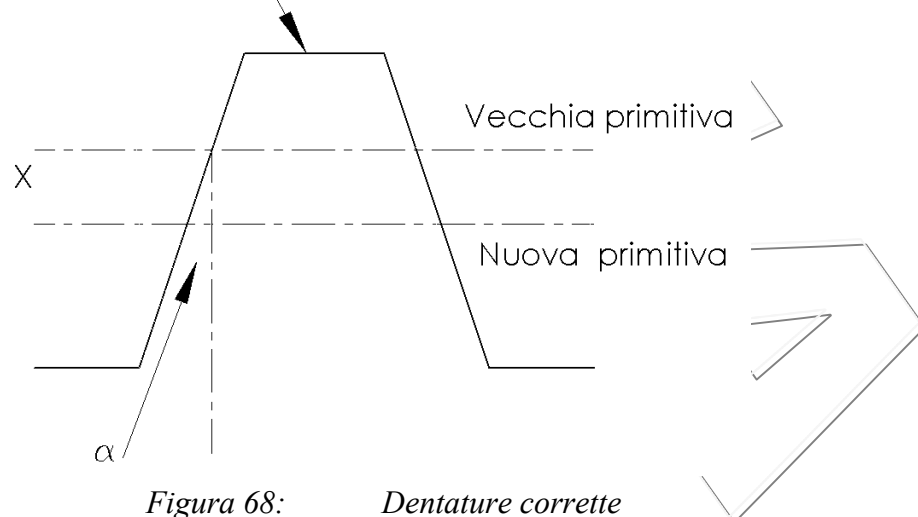


Figura 68: Dentature corrette

Se si vuole creare un ruota dentata, con un proporzionamento diverso da quello normale, utilizzando sempre la stessa dentiera utensile, si può pensare di traslarla di una data quantità. Si dovrà però controllare che non vi sia interferenza durante il taglio della ruota dentata. Vogliamo determinare lo spostamento massimo ammissibile della dentiera utensile per cui non si verifichi interferenza dovuta al taglio. Riferendoci alla figura 68 possiamo scrivere, sia per la dentiera sia per la ruota, i seguenti valori dei parametri geometrici.

PARAMETRI GEOMETRICI	DENTIERA UTENSILE	RUOTA
addendum	$a = a_0 - x$	$a = a_0 + x$
dedendum	$d = d_0 + x$	$d = d_0 - x$
spessore	$s = \frac{\pi m}{2} - 2x \operatorname{tg}(\alpha)$	$v = \frac{\pi m}{2} + 2x \operatorname{tg}(\alpha)$
vano	$v = \frac{\pi m}{2} + 2x \operatorname{tg}(\alpha)$	$s = \frac{\pi m}{2} - 2x \operatorname{tg}(\alpha)$

Dove a_0 indica il valore limite dell'addendum per il quale non si ha interferenza, d_0 indica il valore limite del dedendum per il quale non si ha interferenza, x indica lo spostamento della dentiera utensile, sia poi z_0 il numero di denti minimo della ruota.

Come visto in precedenza, per una ruota, con proporzionamento normale, che ingrani con una dentiera vale la relazione:

$$a_0 = R_0 \sin^2(\alpha)$$

Ricordando la definizione del modulo:

$$m = \frac{2R_0}{z_0}$$

si può scrivere:

$$a_0 = \frac{m z_0}{2} \sin^2(\alpha)$$

moltiplicando ambo i membri per $1/m$ si ricava infine la relazione:

$$\frac{a_0}{m} = \frac{z_0}{2} \sin^2(\alpha).$$

Per le ruote corrette non si avrà interferenza se sarà verificata la condizione:

$$\frac{a}{m} \leq \frac{z}{2} \sin^2(\alpha)$$

sottraendo membro a membro a_0 da a si ottiene:

$$\frac{a_0 - a}{m} \leq \frac{z_0 - z}{2} \sin^2(\alpha)$$

Per la ruota la differenza $a_0 - a$ può essere scritta come:

$$a_0 - a = -x$$

che porta alla relazione finale:

$$\frac{x}{m} \geq \frac{z_0 - z}{2} \sin^2(\alpha)$$

Quest'ultima relazione permette, nel caso si abbia una ruota con un numero di denti z (con $z < z_0$) di calcolare lo spostamento x della dentiera utensile per evitare interferenza durante il taglio.

7.9. RUOTE DENTATE CILINDRICHE A DENTI ELICOIDALI

Una ruota dentata cilindrica a denti dritti può essere pensata generata da un segmento AB, solidale al piano γ (piano dei contatti) e parallelo agli assi dei cilindri di base.

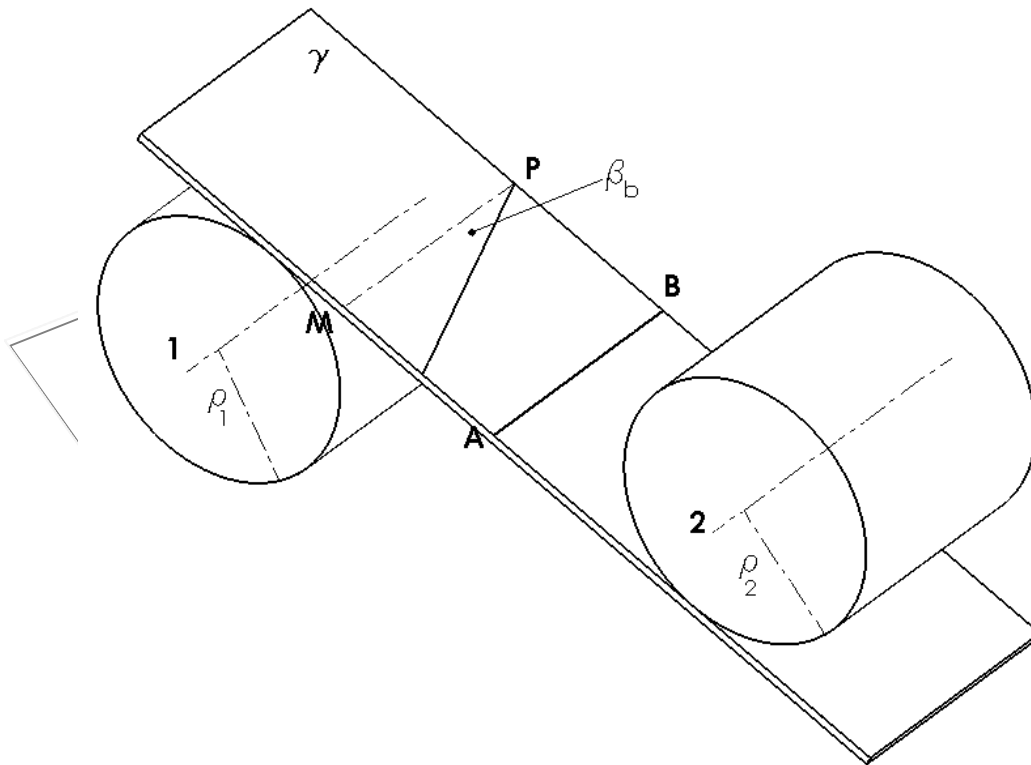


Figura 69: Generazione ruote dentate cilindriche a denti elicoidali

Se il segmento non è parallelo agli assi ma inclinato (figura 69), rispetto ad essi, di un dato angolo β_d (questo equivale a considerare il segmento MP in luogo del segmento AB), la superficie del dente non è più cilindrica ma elicoidale si ottengono quindi **ruote dentate cilindriche a denti elicoidali** (figura 70)

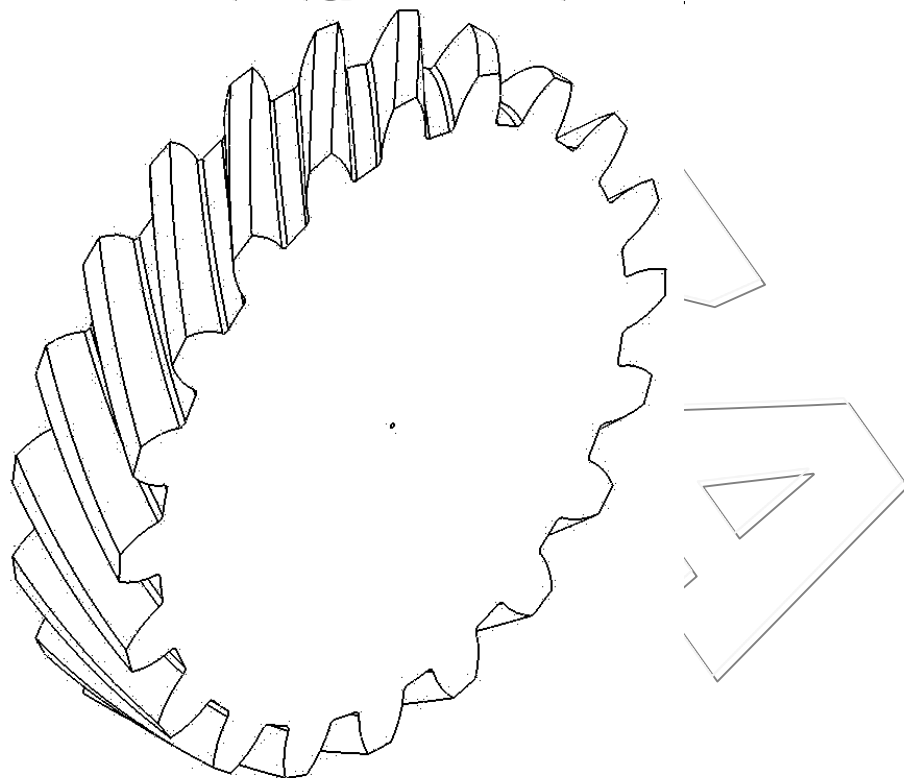


Figura 70: Generica ruota dentata cilindrica a denti elicoidali

Tali ruote dentate presentano i seguenti vantaggi e le seguenti caratteristiche:

- Il contatto tra due generici denti è graduale: inizia in un punto, continua su dei segmenti e termina ancora in un punto. Ciò implica minori urti e quindi un incremento del rendimento.
- L'arco di ingranamento risulta incrementato della quantità $l \cdot \tan(\beta_b)$; questo porta ad un aumento dell'arco di azione di $\frac{l \cdot \tan(\beta_b)}{\cos(\alpha)}$; questo porta un vantaggio nella condizione di continuità del moto.

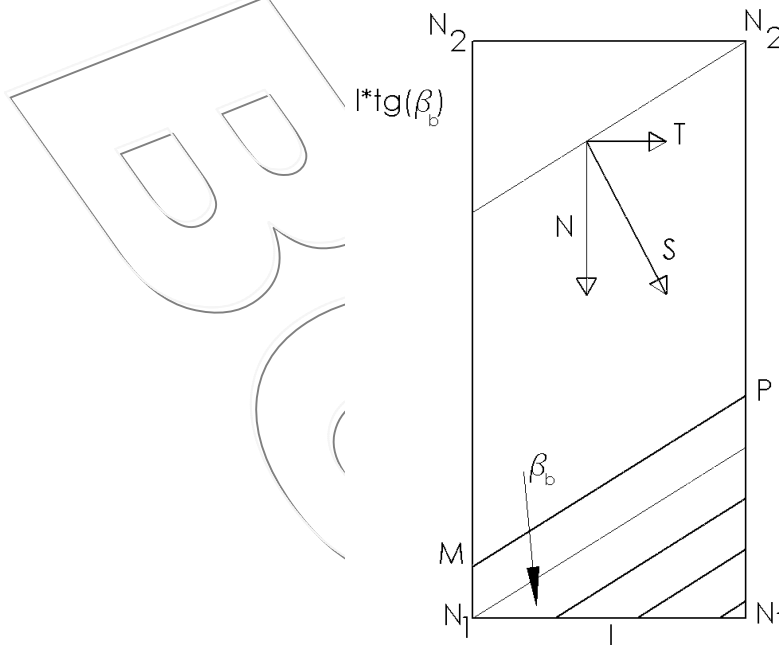


Figura 71:

Forze agenti su una ruota a denti elicoidali

- Trascurando le forze d'attrito l'azione S che si trasmettono due denti è ortogonale a segmento MP e può essere scomposta in due componenti: una N normale agli assi dei cilindri primitivi e una T parallela agli assi dei cilindri primitivi. Solo la forza N trasmette coppia, la forza T deve essere equilibrata dai cuscinetti montati sull'albero, per questo motivo l'albero di una ruota dentata a denti elicoidali deve essere supportato da almeno un cuscinetto capace di equilibrare forze assiali (es. cuscinetti orientabili a sfere o a rulli conici).

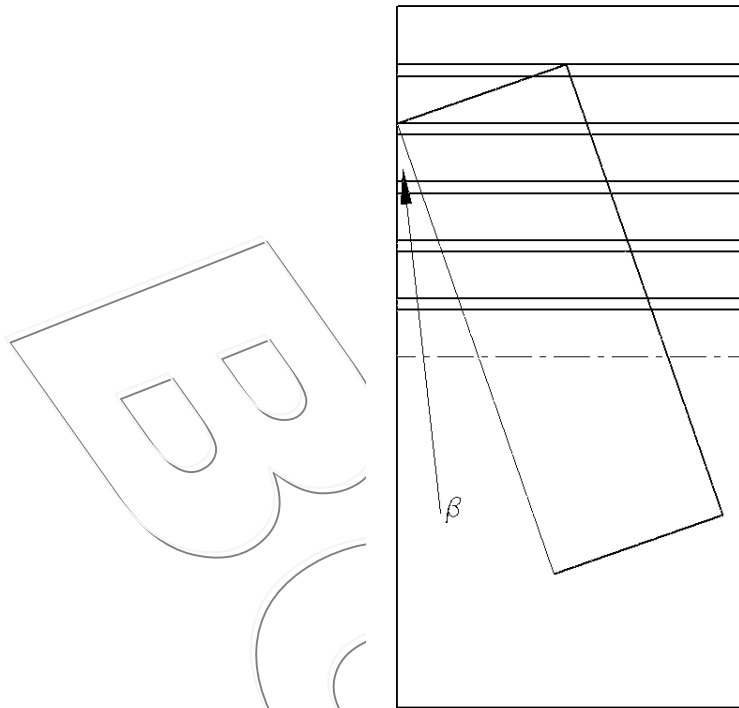


Figura 72: Definizione dentiera elicoidale

Se uno dei due cilindri degenera in un piano si ottiene la *dentiera elicoidale*, la quale può essere vista come una dentiera a denti dritti di cui si considera una parte, delimitata da due piani paralleli inclinati di un angolo β rispetto alla generatrice dei denti. L'angolo β è l'inclinazione dell'elica misurata sul cilindro primitivo. Il fatto che una dentiera elicoidale sia ricavabile da una dentiera a denti dritti porta al vantaggio che le ruote a denti elicoidali possono essere realizzate utilizzando le stesse dentiere utensili delle ruote a denti dritti inclinate di un angolo β .

Esiste però una relazione tra gli angoli β e β_b .

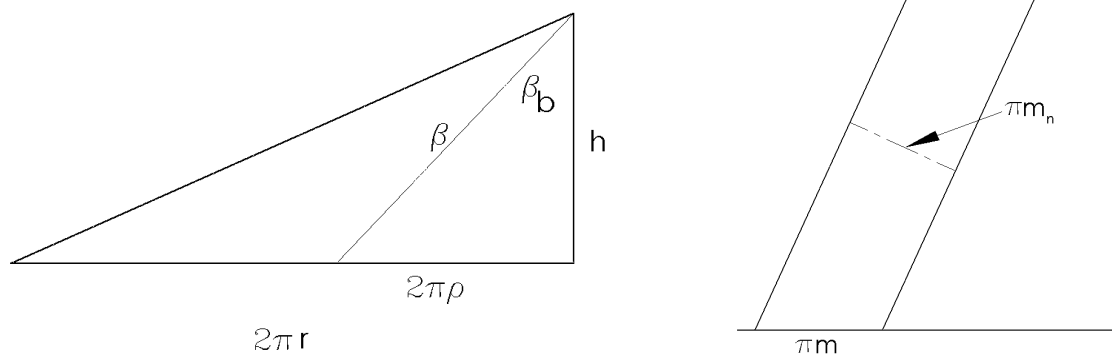


Figura 73: Relazione tra β e β_b tra passo periferico e passo normale

Sia h il passo dell'elica, h risulta lo stesso sia se misurato sul cilindro primitivo, sia se misurato sul cilindro di base; allora con riferimento alla figura 73 è possibile scrivere:

$$h = \frac{2\pi\rho}{\operatorname{tg}(\beta_b)}$$

$$h = \frac{2\pi r}{\operatorname{tg}(\beta)}$$

eliminando h si ha:

$$\frac{2\pi\rho}{\operatorname{tg}(\beta_b)} = \frac{2\pi r}{\operatorname{tg}(\beta)}$$

semplificando si ha:

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{r}{\rho} \operatorname{tg}(\beta_b)$$

ricordando che:

$$\rho = r \cdot \cos(\alpha)$$

si può scrivere, infine, la relazione cercata:

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{\operatorname{tg}(\beta_b)}{\cos(\alpha)}$$

Esiste anche una relazione tra modulo normale (m_n) e modulo periferico (m); riferendoci alla figura 73 si può scrivere:

$$m_n = m \cdot \cos(\beta)$$

7.10. TRASMISSIONE DEL MOTO TRA ASSI INCIDENTI

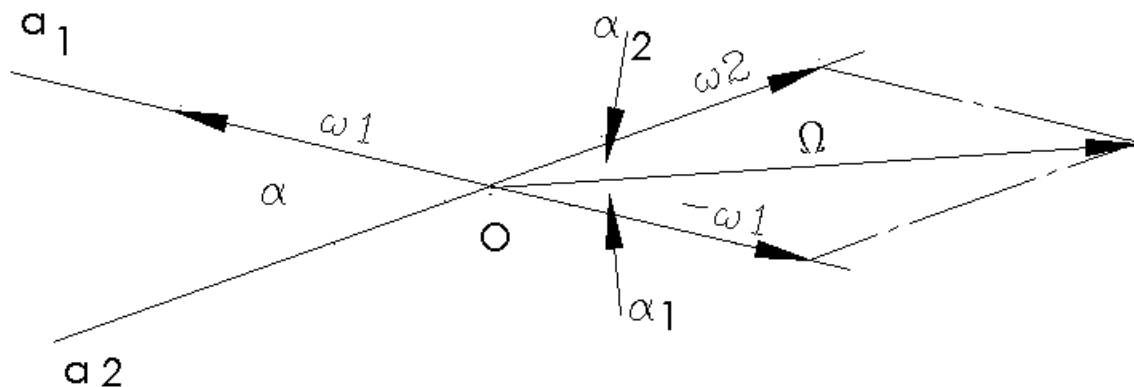


Figura 74: Trasmissione del moto fra assi incidenti

Riferendoci alla figura 74 consideriamo due assi a_1 e a_2 , tra loro incidenti nel punto O , consideriamo anche due generici corpi rigidi ruotanti, il primo con velocità ω_1 attorno all'asse a_1 e il secondo ruotante con velocità angolare ω_2 attorno all'asse a_2 . Vogliamo determinare le primitive del moto relativo dell'asse 2 rispetto all'asse 1. Per far ciò introduciamo l'ipotesi che il rapporto tra le velocità angolari dei due corpi sia costante, ovvero:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \cos t$$

Se imprimiamo a tutto il sistema una rotazione $-\omega_1$, il moto risultante sarà ancora una rotazione, con velocità angolare Ω , il cui valore analitico sarà dato da:

$$\Omega = \omega_1 \cdot \cos(\alpha_1) + \omega_2 \cdot \cos(\alpha_2)$$

Varranno inoltre anche le seguenti relazioni:

$$\omega_1 \cdot \sin(\alpha_1) = \omega_2 \cdot \sin(\alpha_2)$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \cos t$$

Dal momento che si è fatta l'ipotesi $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \cos t$, segue:

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \cos t \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \cos t$$

ed essendo costante anche la somma dei due angoli si arriva infine a:

$$\alpha_1 = \cos t$$

$$\alpha_2 = \cos t$$

quindi le primitive del moto relativo sono due coni rotondi di vertice comune O e aventi aperture ω_1 e ω_2 . Si può quindi pensare di prendere, come superfici coniugate, dei tronchi di cono ottenendo così ruote di frizione coniche. Tali ruote di frizione presenteranno però gli stessi inconvenienti visti nel caso di trasmissione per assi paralleli.

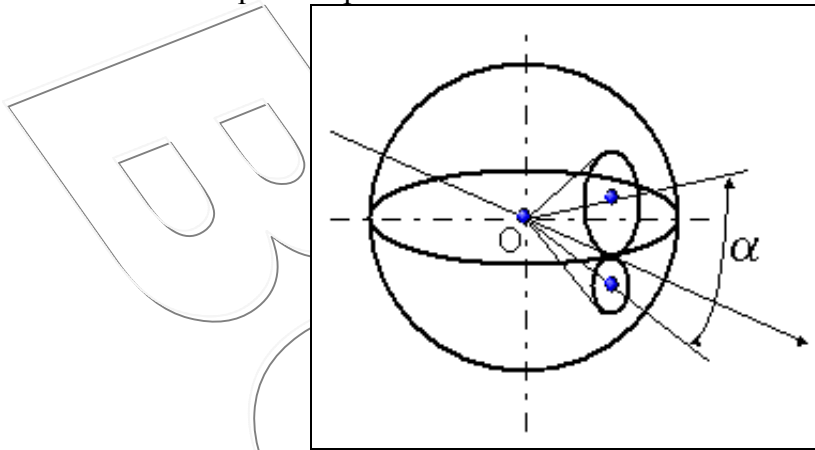


Figura 75: Definizione ruote dentate coniche

Un sistema di ruote dentate coniche può essere definito intersecando i coni primitivi con una sfera di centro O (figura 75) ; le superfici dei denti si ottengono proiettando da O due profili coniugati sferici.

Un sistema di dentature che utilizzi il metodo dell'epiciclo avrà come profili coniugati delle evolventi sferiche ottenute come traiettorie di un generico punto P della circonferenza massima che rotola sulle circonferenze di base.

Un caso particolare si ha quando uno dei due coni degenera in un piano ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), in questo caso la ruota prende il nome di dentiera *piano-conica* e contrariamente al caso della dentiera a denti diritti non avrà la superficie dei denti piana ma questa avrà curvatura opposta nella costa e nel fianco.

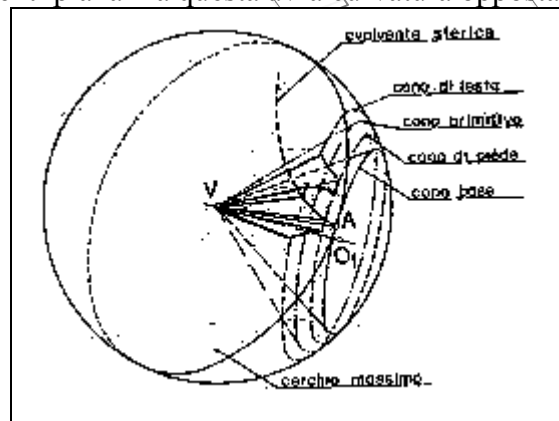


Figura 76: Generazione ruote coniche a denti diritti

Se si applica il metodo dell'epiciclo utilizzando le curve ε e μ (che in questo caso coincidono con due circonferenze massime della sfera) si otterrà un profilo coniugato non coincidente con l'evolvente sferica. In questo caso però le superfici della dentiera piano-conica saranno piane (figura 77).

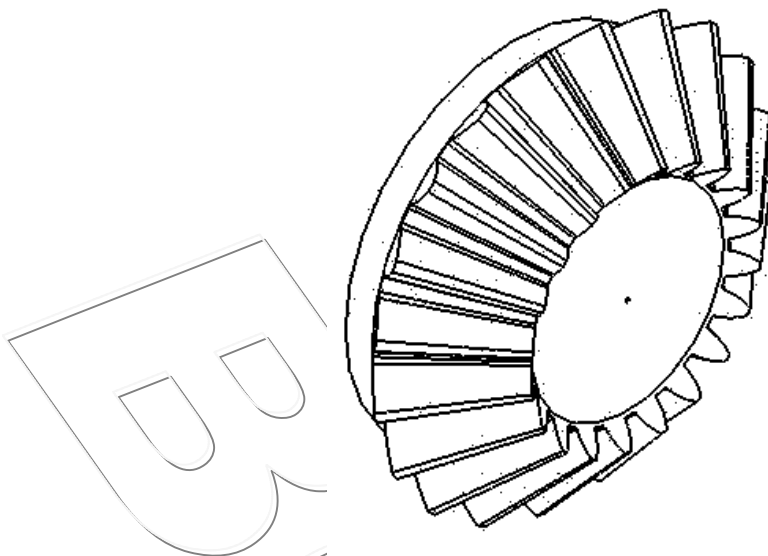


Figura 77: Generica ruota conica

7.11. RUOTE DENTATE: COSTRUZIONE E MATERIALI IMPIEGATI

Le prime ruote dentate sono state realizzate in ghisa, utilizzando un processo di fusione ma oggi questo procedimento è stato abbandonato in quanto porta ad ottenere coppie di ruote molto rumorose e utilizzabili solo per velocità contenute.

Dentature molto precise possono essere ottenute per *brocciatura* ma l'alto costo del processo tecnologico le consiglia solo in casi molto particolari.

Oggigiorno si realizzano ingranaggi di grande precisione utilizzando procedimenti di sinterizzazione (*metallurgia delle polveri*) che hanno il vantaggio di poter essere impiegati anche nella produzione in serie.

Nel caso i carichi a cui debba reggere la coppia di ruote siano contenuti si possono utilizzare ruote in materiale plastico, realizzate per *stampaggio*.

Oltre che mediante lavorazioni per asportazione di truciolo si possono realizzare dentature anche attraverso *deformazione plastica* (ad esempio *rullatura*); questi sono applicati a ruote ricavate direttamente sull'albero (*pignoni*).

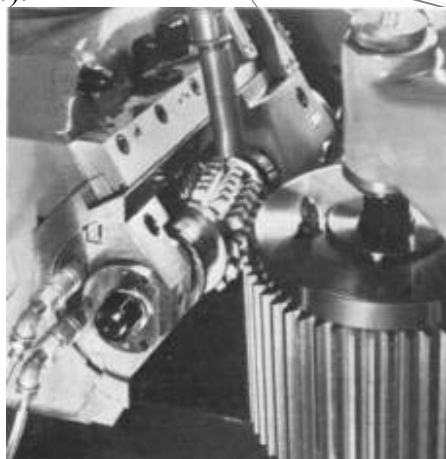


Figura 78: Realizzazione di ruote dentate tramite asportazione di trucioli

Normalmente è conveniente realizzare le dentature per asportazione di truciolo, utilizzando apposite *macchine dentatrici*, partendo da elementi di rotazione ottenuti o finiti per tornitura. Nel caso si tratti di produzione in serie il semilavorato di partenza è ottenuto mediante stampaggio o direttamente dalla barra, questo per avere costi di produzione contenuti.

Il taglio dei denti viene eseguito quasi sempre attraverso metodi per involuppo: durante il taglio la ruota utensile (detta anche *dentiera utensile*) e la ruota in lavorazione ingranano fra loro, vi sono poi anche i moti di avvicinamento e di taglio.

Uno dei problemi delle dentature è rappresentato dalle deformazioni determinate dai trattamenti termici a cui è sottoposto il materiale impiegato nella produzione. Per ovviare il mezzo più efficace è la rettifica finale dei denti, ma si deve tener presente che questo è un procedimento costoso. Un metodo meno costoso per eliminare le tensioni residue, normalmente utilizzato in campo automobilistico, è la *sbaratura*. Tale lavorazione viene effettuata prima dei trattamenti termici, mediante un'apposita *ruota utensile sbaratrice* la quale asporta un sottilissimo strato superficiale. Analizziamo ora i principali acciai impiegati nella costruzione delle ruote dentate. Le caratteristiche che questi devono avere sono:

- **Elevata resistenza all'usura e alla fatica hertziana (pitting)**
- **Elevata resistenza alla fatica per flessione alla base dei denti**
- **Elevata resistenza all'urto**
- **Buona lavorabilità per asportazione di truciolo**
- **Attitudine ai trattamenti termici superficiali**

Le famiglie di acciai comunemente impiegate sono:

- **Acciai da cementazione**
- **Acciai per tempra superficiale**
- **Acciai da nitrurazione**

Tutti e tre questi trattamenti termici producono strati superficiali di elevata durezza, che accrescono la resistenza all'usura.

La cementazione seguita dalla tempra è il trattamento più usato per ottenere la necessaria durezza superficiale della dentatura. Essa consiste in un arricchimento superficiale di carbonio, per cui dopo il procedimento di tempra il dente presenta una superficie dura, mantenendo un cuore tenero. Altro trattamento usato è la carbonitrurazione. Gli acciai usati in prevalenza sono:

- **Acciai al CrNi**
- **Acciai al NiCrMo**
- **Acciai al MnCr**
- **Acciai al CrMo**

Sono però largamente usati anche acciai da bonifica, con trattamento finale di tempra superficiale, il loro impiego è consigliato per ruote di grande diametro, quando i trattamenti di cementazione e tempra produrrebbero eccessive deformazioni.

Alcuni degli acciai da bonifica utilizzati sono:

- **40NiCrMo3**
- **41CrMo4**
- **C43**
- **C48**

Nel caso si voglia prediligere la resistenza ad usura rispetto alla resistenza a flessione si può utilizzare l'indurimento per nitrurazione. Questo è ottenuto mediante la formazione di uno strato di nitruri di alluminio, cromo, vanadio e nitruri di ferro.

7.12. SCELTA E VERIFICA DEI RUOTE DENTATE

Chiudiamo questa sezione con un esempio numerico relativo alla scelta e al dimensionamento di due ruote dentate. I dati del problema sono:

- $P = 4000 \text{ W}$ potenza del motore
- $N = 1500 \text{ RPM}$ velocità di rotazione
- $\tau = 1/3$ rapporto di trasmissione

La prima cosa da fare è cercare un valore dell'interasse ottimale per il funzionamento delle due ruote. Solitamente tale valore viene determinato per tentativi, noi faremo l'ipotesi che il valore ottimale dell'interasse sia:

- $i = 100 \text{ mm}$

Una volta noto il valore di i si può scrivere il seguente sistema nelle incognite R_1 e R_2 , raggi delle due ruote:

$$R_1 + R_2 = i$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \tau$$

$$R_1 = 25 \text{ mm}$$

$$R_2 = 75 \text{ mm}$$

da cui si ricava:

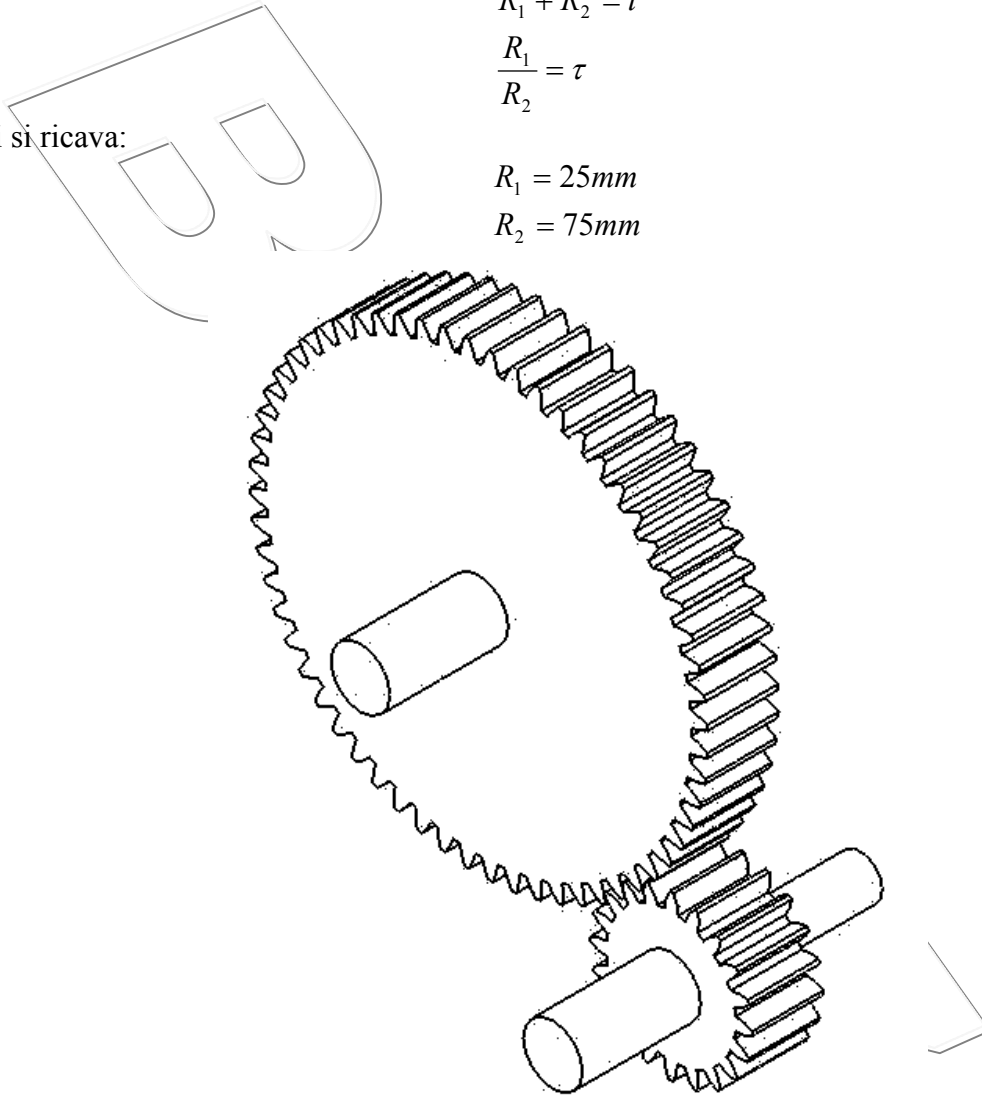


Figura 79: Coppia di ruote dentate da dimensionare

Passiamo adesso a determinare il numero dei denti di ciascuna ruota dentata. Per fare questo dovremo tener conto delle condizioni di non interferenza tra i profili e la condizione di non interferenza al taglio tra ruota dentata e dentiera utensile. Supponiamo di utilizzare ruote aventi denti con proporzionamento normale e con angolo di pressione pari a 20° .

La condizione di non interferenza tra i profili è esprimibile con la relazione:

$$z_1 \geq \frac{2\tau}{\sqrt{1 + \tau(2 + \tau)\sin^2(\alpha)} - 1}$$

e si applica alla ruota di raggio minore, con i dati a noi assegnati si ottiene:

$$z_1 \geq 15$$

La condizione di non interferenza a taglio è esprimibile con la relazione:

$$z_1 \geq \frac{2}{\sin^2(\alpha)}$$

e porta a:

$$z_1 \geq 18$$

Fissiamo quindi $z_1=18$ e calcoliamo il modulo:

$$m = \frac{2R_1}{z_1} = \frac{2 \cdot 25}{18} = 2.8mm$$

questo valore del modulo non rientra fra quelli normalizzati, scegliamo quindi il valore normalizzato che più si avvicina:

$$m = 2.5mm$$

Scelto m si ricava il numero dei denti delle due ruote dentate:

$$z_1 = \frac{2R_1}{m} = \frac{2 \cdot 25}{2.5} = 20$$

$$z_2 = \frac{z_1}{\tau} = 60$$

Una volta determinate le caratteristiche geometriche delle due ruote passiamo alle verifiche a flessione ed a usura.

La coppia C_1 agente sulla ruota motrice è data da:

$$C_1 = P \cdot \frac{60}{2\pi n} = 25N \cdot m$$

la forza scambiata da due denti è scomponibile in una azione radiale F ed in una azione tangenziale T :

$$T = \frac{C_1}{R_1} = 1000N$$

$$F = T \cdot \tan(\alpha) = 364N$$

Per il calcolo della resistenza a flessione (convenzionalmente si trascurano azioni di taglio e sforzo normale) si suppone il dente assimilabile ad una trave incastrata con carico a sbalzo, si fa inoltre l'ipotesi cautelativa che vi sia una sola coppia di denti in presa.

La formula utilizzata per la verifica è la *formula di Lewis* espressa da:

$$T \leq \sigma_{amm} \cdot y \cdot m \cdot b$$

in cui:

- y è detto *coefficiente di Lewis* e si trova tabellato in funzione del numero di denti e dell'angolo di pressione. Nel nostro caso si ha: $y = 0.341$
- σ_{amm} è la tensione ammissibile del materiale impiegato per realizzare le ruote. Nel nostro caso scegliamo un acciaio legato da bonifica con un valore della tensione ammissibile pari a 200 N/mm^2 . Per tener conto del sovraccarico dinamico si introduce un coefficiente di riduzione della tensione ammissibile, dato da:

$$\delta = \frac{A}{A + v}$$

dove:

$$v = \frac{2\pi n}{60} R_1 = 3.9 \frac{m}{s}$$

è il valore della velocità periferica della prima ruota; mentre A è un coefficiente che può essere pari a 6 o 3 rispettivamente per ingranaggi precisi o poco precisi. Nel nostro caso assumiamo $A = 6$, si ha così:

$$\delta = 0.6$$

- b è lo spessore della ruota dentata.

Introducendo questi valori nella formula di Lewis si ricava:

$$b \geq 10mm$$

Una volta determinato lo spessore minimo che garantisce la resistenza a flessione passiamo alla verifica ad usura. La formula da utilizzare è:

$$T \leq p_{amm}^2 \cdot f \cdot m \cdot b$$

dove:

- p_{amm} è il valore ammissibile della pressione nel contatto tra i denti; per l'acciaio scelto in precedenza si può porre:

$$p_{amm} = 500 \frac{N}{mm^2}$$

- f è un coefficiente pari a:

$$f = \frac{\sin(2\alpha)}{0.7 \cdot E} \cdot \frac{z_1 \cdot z_2}{(z_1 + z_2)}$$

nell'ipotesi che entrambe le ruote siano realizzate con lo stesso materiale. E è il modulo di Young dell'acciaio e vale $2 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$. Nel nostro caso si ha che:

$$f = 8.6 \cdot 10^{-5} \frac{mm^2}{N}$$

Introducendo questi valori nella formula della verifica ad usura si ricava:

$$b \geq 19mm$$

Dovendo la ruota essere in grado di resistere ad entrambi i tipi di sollecitazioni si prende come valore minimo dello spessore:

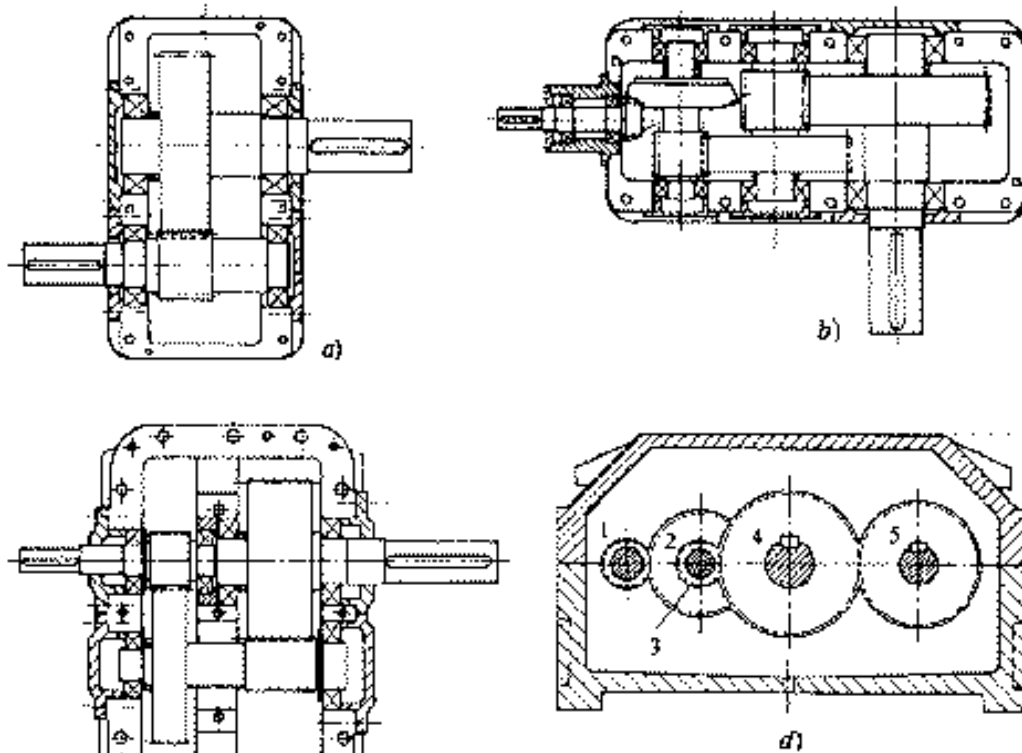
$$b = 19mm$$

8. Rotismi

Sono meccanismi formati da ruote dentate e coppie rotoidali, si dividono in:

- Ordinari: se gli assi delle ruote sono fissi rispetto al telaio;
- Epicicloidali: se uno o più assi sono mobili rispetto al telaio.

8.1. Rotismi ordinari



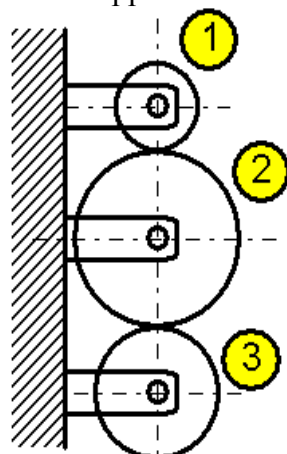
Esempi di schemi di rotismi ordinari.

Figura 80: Esempi di rotismi ordinari

Definiamo il rapporto di trasmissione di un rotismo ordinario come il rapporto tra le velocità angolari del cedente e del movente poiché un rotismo è composto da n ruote in serie si ha:

$$\tau = \frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\omega_3}{\omega_2} \frac{\omega_4}{\omega_3} \dots \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}$$

e cioè τ è dato dal prodotto dei rapporti di trasmissione delle coppie di ruote consecutive.



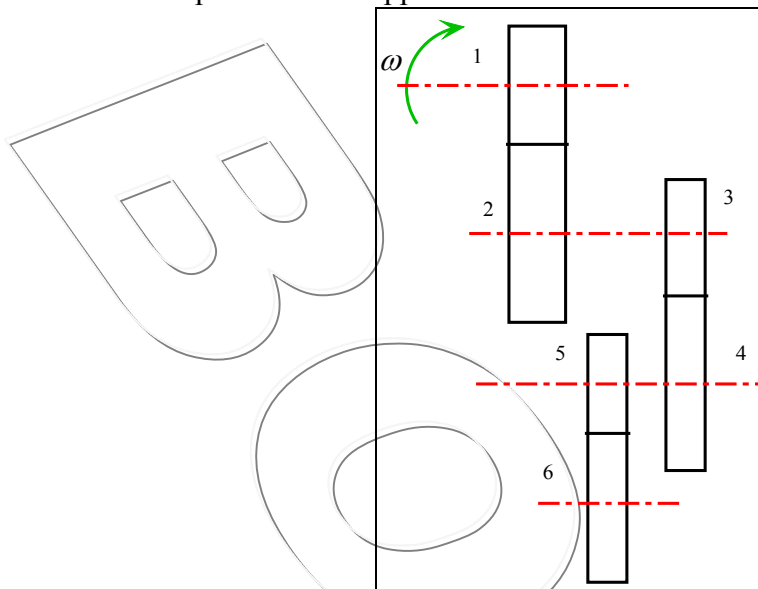
$$\tau_{12} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}$$

$$\tau_{23} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_3}$$

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\omega_3}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau_{12} \tau_{23}$$

Figura 81: Rapporto di trasmissione in un rotismo con 3 ruote

! e cioè τ è dato dal prodotto dei rapporti di trasmissione delle ruote che ingranano tra loro.



Consideriamo il rotismo riportato in figura 82, numeriamo le ruote con l'ordine in cui si susseguono dal movente (1) al cedente ($n=6$)

Poiché $\omega_2 = \omega_3$; $\omega_4 = \omega_5$; e poiché ogni rapporto intermedio può essere espresso in funzione del numero di denti, si ha:

Se una ruota è allo stesso tempo motrice e condotta, ingrana cioè contemporaneamente con le due ruote adiacenti si chiama ruota oziosa; non influisce sul rapporto di trasmissione, cambia il verso di rotazione rispetto al caso di accoppiamento diretto (rotismo d in figura 80).

8.2. Rotismi epicicloidali

114

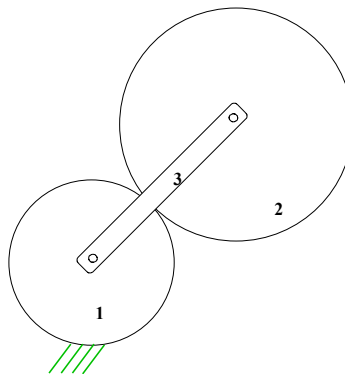


Figura 83: Schema cinematico del più semplice rotismo epicicloidale

In generale in un rotismo epicicloidale non esiste il membro fisso, anzi sono meccanismi a **due gradi di libertà**. In ogni caso sono meccanismi caratterizzati dall'aver alcuni assi delle ruote **mobili rispetto al telaio**.

Non si può quindi parlare di rapporto di trasmissione, ma si definisce una relazione tra la velocità angolari delle ruote estreme e la velocità angolare del membro a cui sono vincolati gli assi mobili detto portatreno o portasatellite. Si imprime a tutto il meccanismo una velocità angolare opposta a quella del portatreno, con questo artificio il portatreno resta fermo e il meccanismo è ridotto a un rotismo ordinario. Le velocità della prima e dell'ultima ruota diventano :

$$\tau_o = \frac{\omega_n - \omega_p}{\omega_1 - \omega_p} \quad \text{Formula di Willis}$$

! τ_o NON è il rapporto di trasmissione del rotismo epicicloidale, ma il **rapporto di trasmissione del rotismo reso ordinario**.

Si possono avere i seguenti casi:

1. ruota 1 ferma
2. ruota n ferma
3. meccanismo abbia due gradi di libertà

1) $\omega_1 = 0$ la formula di Willis diventa : $\tau_o = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_p}$ e quindi:

$$\text{portatrenomotore : } \frac{\omega_n}{\omega_p} = 1 - \tau_o; \quad \text{ruota n motrice : } \frac{\omega_p}{\omega_n} = \frac{1}{1 - \tau_o};$$

2) $\omega_n = 0$ la formula di Willis diventa : $\frac{1}{\tau_o} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_p}$ e quindi:

$$\text{portatrenomotore : } \frac{\omega_1}{\omega_p} = \frac{\tau_o - 1}{\tau_o}; \quad \text{ruota 1 motrice : } \frac{\omega_p}{\omega_1} = \frac{\tau_o}{\tau_o - 1};$$

3) se il rotismo ha due gradi di libertà la formula di Willis può essere scritta:

$$\omega_p = \omega_1 \frac{\tau_o}{\tau_o - 1} - \omega_n \frac{1}{\tau_o - 1};$$

Diamo di seguito alcuni esempi per capire l'applicazione della formula. Consideriamo il rotismo in figura 83, in cui il portatreno è il movente

$$\frac{\omega_2}{\omega_p} = 1 - \tau_o$$

per determinare τ_o , fissiamo il portatreno e valutiamo il rapporto di trasmissione del rotismo reso ordinario con la ruota 1 movente e la 2 cedente attraverso il numero di denti, $\tau_o = -\frac{z_1}{z_2}$

! il meno è dovuto al fatto che le due ruote ruotano in verso opposto.

Sostituendo τ_o si trova il rapporto tra le velocità angolare del satellite e quella del portasatellite:

$$\frac{\omega_2}{\omega_p} = \frac{z_1 + z_2}{z_2}$$

Consideriamo ora il rotismo epicicloidale in figura 84.

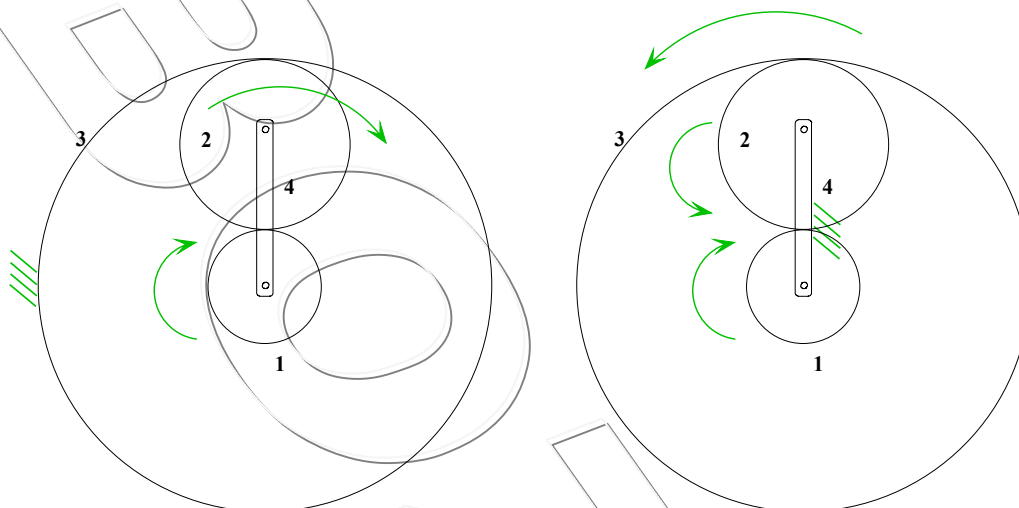


Figura 84: Schema del rotismo epicicloidale (sinistra) e del corrispondente rotismo reso ordinario (destra)

$$\frac{\omega_p}{\omega_1} = \frac{\tau_o}{\tau_o - 1};$$

se fisso il portatreno, $\tau_o = -\frac{z_1}{z_3}$ per cui: $\frac{\omega_p}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_1 + z_3}$.

Il rapporto di trasmissione del rotismo reso ordinario (sempre in figura 84, stessa catena cinematica!) con cedente ruota 3 e movente ruota 1 vale in valore assoluto:

$$\tau_o = \frac{z_1}{z_3}$$

Si può quindi notare che il rotismo epicicloidale permette di realizzare un rapporto tra cedente e movente più piccolo del rotismo ordinario, inoltre nell'epicicloidale la ruota a dentatura interna è fissa, quindi risulta una costruzione più compatta.

I rotismi con due gradi di libertà sono in generale dei meccanismi con un movente e due cedenti, sono chiamati anche **rotismi differenziali**, come quelli riportati in figura 85.

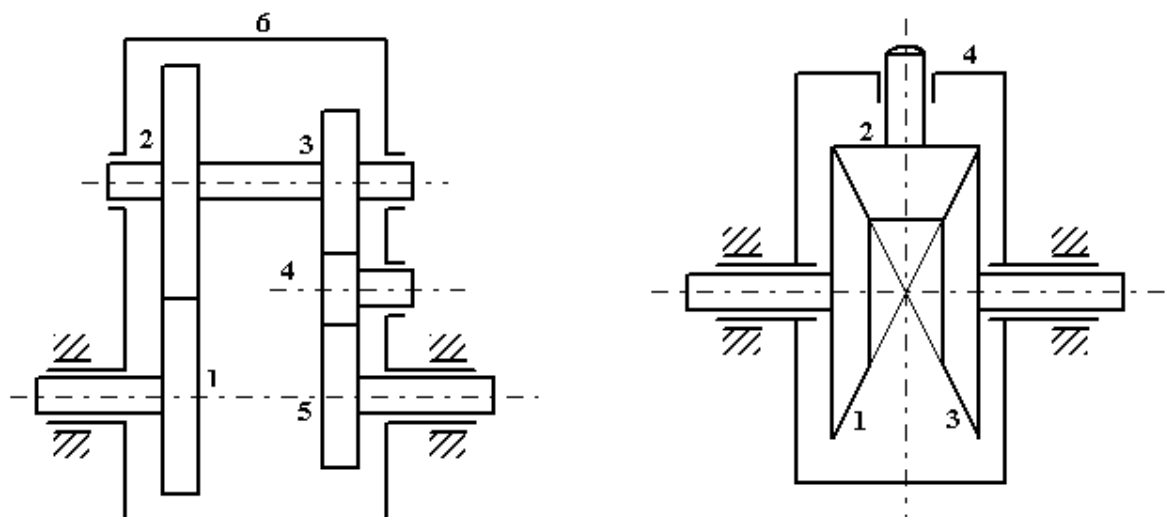


Figura 85: Rotismi epicicloidali differenziali

Nel rotismo 1 il movente è il portasatellite e i due cedenti sono la ruota 1 e la ruota 5, vale la relazione:

$$\tau_o = -\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_5}$$

Se $z_1 = z_2$; $z_3 = z_5$; si ha $\tau_o = -1$

formula di Willis $\tau_o = \frac{\omega_5 - \omega_p}{\omega_1 - \omega_p} \Rightarrow \omega_p = \frac{\omega_5 + \omega_1}{2}$

Anche per il rotismo 2 vale quindi $\tau_o = -1$

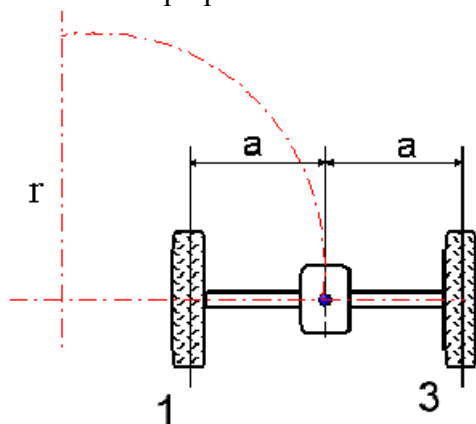
formula di Willis $\tau_o = \frac{\omega_3 - \omega_p}{\omega_1 - \omega_p} \Rightarrow \omega_p = \frac{\omega_3 + \omega_1}{2}$

In entrambi i casi quindi la velocità angolare del portasatellite non è altro che la media aritmetica tra le velocità angolari delle due ruote cedenti.

Consideriamo il differenziale automobilistico di figura 86.

In rettilineo le due ruote estreme hanno la stessa velocità angolari, $\omega_3 = \omega_1 \Rightarrow \omega_p = \omega_3 = \omega_1$, il portasatellite ruota con la stessa velocità angolare delle ruote, e il rotismo si comporta come un membro rigido.

In curva invece la ruota interna compie meno strada avrà perciò una velocità minore, quella esterna allo stesso tempo percorre una strada maggiore e quindi ha velocità più alta.



$$\begin{cases} V_1 = \omega(r-a) \\ V_3 = \omega(r+a) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} V_1 = R\omega_1 \\ V_3 = R\omega_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{\omega(r-a)}{R} \\ \omega_3 = \frac{\omega(r+a)}{R} \end{cases}$$

Figura 86: Condizioni necessaria per un perfetto rotolamento senza strisciamento

La ruota 3 tende ad accelerare, la ruota 1 a decelerare ma vale sempre $\omega_p = \frac{\omega_3 + \omega_1}{2}$

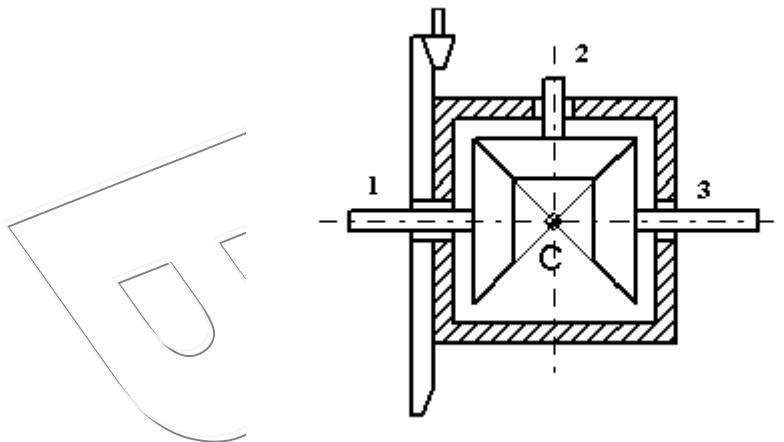


Figura 87: Differenziale automobilistico

8.3. Momenti agenti su un rotismo

Siano M_1, M_n, M_p i momenti agenti sulla prima e sull'ultima ruota e sul portasatellite, prescindendo dalle perdite di potenza per attrito, si ha:

$$M_1\omega_1 + M_n\omega_n + M_p\omega_p = 0$$

Supponiamo di imprimere al meccanismo una velocità opposta a quella del portasatellite:

$$M_1(\omega_1 - \omega_p) + M_n(\omega_n - \omega_p) = 0 \Rightarrow \frac{M_1}{M_n} = -\tau_o$$

Se invece imprimiamo una velocità opposta a quella della ruota n si

$$\text{ha: } M_1(\omega_1 - \omega_n) + M_p(\omega_p - \omega_n) = 0 \Rightarrow \frac{M_1}{M_p} = \frac{\tau_o}{1 - \tau_o}$$

Poiché i rapporti tra i momenti dipendono solo dalla catena cinematica, le relazioni trovate valgono sia nel caso di rotismo ordinari sia per rotismi epicicloidali.

Cosa succede per il differenziale a ruote coniche di figura 87?

$$\text{Poiché } \tau_o = -1 \text{ si ha: } M_1 = M_3 = -\frac{M_p}{2}$$

I momenti sulle due ruote estreme sono uguali, il differenziale trasmette alle due ruote motrici di un'autovettura coppie motrici uguali.

9. Dinamica delle macchine alternative

9.1. Masse ridotte della biella in un manovellismo

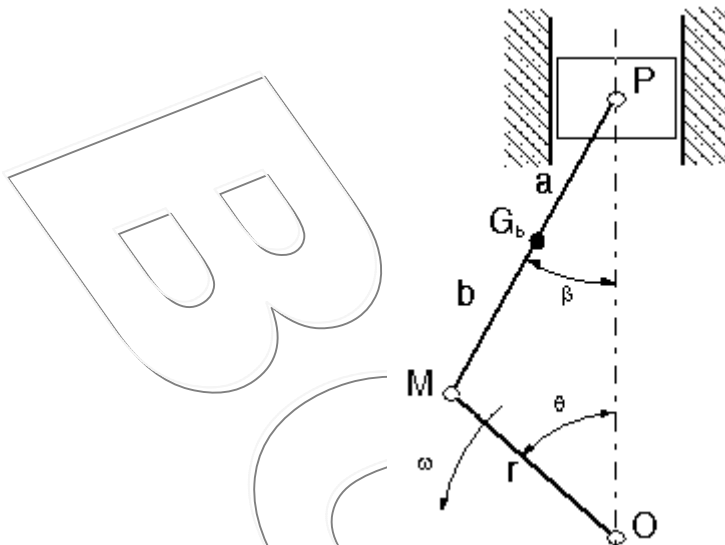


Figura 88: Manovellismo di spinta centrato: parametri geometrici.

In Figura 88 è riportato lo schema di un manovellismo di spinta centrato. Il punto G_b rappresenta il baricentro della biella PM , indichiamo con a e b le distanze del baricentro dai punti P ed M rispettivamente. Sia m_b la massa della biella e J_b il suo momento di inerzia rispetto ad un asse baricentrico ortogonale al piano del disegno e passante per il baricentro.

Per semplificare la trattazione della dinamica del manovellismo, utilizziamo il concetto di masse di sostituzione: si sostituisce la biella con tre masse concentrate m_P , m_M ed m_{Gb} posizionate rispettivamente sul piede di biella P , sul bottone di manovella M e sul baricentro della biella G_b .

Affinché il nuovo sistema sia equivalente al precedente dal punto di vista della dinamica (quindi che abbia la stessa energia cinetica) si dovrà avere:

$$\begin{cases} m_P + m_M + m_{Gb} = m_b \\ m_P a + m_M b = 0 \\ m_P a^2 + m_M b^2 = J_b \end{cases} \quad (1)$$

La prima equazione garantisce l'uguaglianza tra la massa della biella e quella del nuovo sistema a masse concentrate, la seconda garantisce l'uguaglianza tra le posizioni dei baricentri dei due sistemi e la terza l'uguaglianza tra i momenti di inerzia.

Risolvendo il sistema (si tratta di un semplice sistema algebrico di tre equazioni in tre incognite), e indicando con l la lunghezza della biella ($a+b=l$) si ottiene:

$$\begin{cases} m_P = \frac{J_b}{al} \\ m_M = \frac{J_b}{bl} \\ m_{Gb} = m_b - \frac{J_b}{ab} \end{cases} \quad (2)$$

Si osserva che i valori delle masse di sostituzione dipendono ovviamente dalla geometria della biella, nel caso in cui questa possa essere rappresentata con un parallelepipedo di lunghezza l e larghezza c risulta:

$$\begin{cases} m_P = m_M = \frac{1}{12} m_b \frac{l^2 + c^2}{\frac{l^2}{2}} = \frac{m_b}{6} \left(1 + \frac{c^2}{l^2} \right) \cong \frac{m_b}{6} \\ m_{Gb} = m_b - 2 \frac{m_b}{6} = \frac{2}{3} m_b \end{cases} \quad (3)$$

La biella può essere anche sostituita da un sistema costituito da due masse m_P ed m_M , posizionate nei punti M e P e da un momento di inerzia fittizio¹¹ J_0 . Per calcolare i valori delle due masse e del momento di inerzia impostiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} m_P + m_M = m_b \\ m_P a + m_M b = 0 \\ m_P a^2 + m_M b^2 + J_0 = J_b \end{cases} \quad (4)$$

Anche in questo caso si tratta di un semplice sistema algebrico di tre equazioni in tre incognite, dalla cui risoluzione si ottiene:

$$\begin{cases} m_P = m_b \frac{b}{l} \\ m_M = m_b \frac{a}{l} \\ J_0 = J_b - m_b ab \end{cases} \quad (5)$$

Nel caso in cui la biella possa essere rappresentata per mezzo di un parallelepipedo si ottiene:

$$\begin{cases} m_P = m_b \frac{b}{l} \\ m_M = m_b \frac{a}{l} \\ J_0 = -m_b \frac{l^2}{6} \end{cases} \quad (6)$$

Si osserva che in questo caso il momento di inerzia fittizio J_0 risulta negativo.

¹¹ lo definiamo momento di inerzia *fittizio* nel senso che ad esso non corrisponde una effettiva distribuzione di massa, si tratta di un parametro di tipo algebrico, che può assumere anche valore negativo, cosa che non si può mai verificare per i momenti d'inerzia "reali".

9.2. Energia cinetica del manovellismo

In un manovellismo di spinta,

- il pistone si muove di moto traslatorio alternato;
- la manovella ruota intorno al punto O ;
- la biella durante il moto compie una rototraslazione.

Pertanto:

- **L'energia cinetica del pistone** sarà data da:

$$T_p = \frac{1}{2} m_p v_p^2 \quad (7)$$

avendo indicato con m_p la massa del pistone e con v_p la sua velocità. Analizzando la cinematica del manovellismo di spinta¹² è possibile verificare che:

$$v_p = r\omega \left(\sin \theta + \frac{\lambda}{2} \sin 2\theta \right) \cong r\omega \sin \theta \quad (8)$$

per cui l'energia cinetica del pistone sarà data da:

$$T_p = \frac{1}{2} m_p r^2 \omega^2 \sin^2 \theta \quad (10)$$

- **L'energia cinetica della manovella** sarà data da:

$$T_m = \frac{1}{2} J_m \omega^2 \quad (11)$$

essendo J_m il momento d'inerzia della manovella rispetto all'asse di rotazione, passante per O e ω la velocità angolare.

- Per calcolare **l'energia cinetica della biella** utilizziamo il sistema equivalente calcolato in precedenza, costituito da due masse concentrate e dal momento di inerzia J_0 :

$$T_b = \frac{1}{2} m_M r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_P v_P^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\beta}^2 \quad (12)$$

il primo termine è dato dalla massa concentrata m_M , posizionata sul punto M , la sua velocità sarà quindi pari a ωr , il secondo termine è dovuto alla massa m_P , posizionata sul punto P e quindi caratterizzata da una velocità v_P uguale a quella del pistone, il terzo termine infine è dovuto al momento di inerzia J_0 , con $\dot{\beta}$ indichiamo la velocità angolare della manovella.

Per il teorema dei seni risulta:

$$\frac{\sin \beta}{r} = \frac{\sin \theta}{l}$$

$$\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \theta = \lambda \sin \theta \quad (13)$$

Derivando entrambi i membri rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{\beta} \cos \beta = \lambda \omega \cos \theta$$

$$\dot{\beta} = \lambda \omega \frac{\cos \theta}{\cos \beta} \cong \lambda \omega \cos \theta \quad (14)$$

Il termine dell'energia potenziale che dipende dal momento di inerzia J_0 può quindi essere riscritto in questo modo:

$$J_0 \dot{\beta}^2 = J_0 \lambda^2 \omega^2 \cos^2 \theta = J_0 \lambda^2 \omega^2 (1 - \sin^2 \theta) =$$

$$= J_0 \lambda^2 \omega^2 - J_0 \lambda^2 \omega^2 \sin^2 \theta \quad (15)$$

¹² Per la dimostrazione dell'equazione (8) si rimanda al capitolo sui sistemi articolati

Il primo termine della (15) può essere considerato insieme all'energia cinetica della manovella e della massa m_M (energia cinetica delle masse rotanti), mentre il secondo può essere considerato insieme alla massa del pistone e alla massa m_P .

In definitiva, l'energia cinetica del sistema è data da:

$$T = \frac{1}{2} (J_m + m_M r^2 + J_0 \lambda^2) \omega^2 + \frac{1}{2} \left(m_p + m_P - J_0 \frac{\lambda^2}{r^2} \right) v_p^2 \quad (16)$$

La (16) può essere riscritta mettendo in evidenza il termine dovuto alle masse rotanti e quello dovuto alle masse alterne:

$$T = T_r + T_a \quad (17.1)$$

$$T_r = \frac{1}{2} (J_m + m_M r^2 + J_0 \lambda^2) \omega^2 \quad (17.2)$$

$$T_a = \frac{1}{2} \left(m_p + m_P - J_0 \frac{\lambda^2}{r^2} \right) v_p^2 \quad (17.3)$$

Si osserva che il termine dovuto alle masse rotanti risulta costante se la velocità di rotazione ω è costante.

Riscriviamo la (16) esplicitando la velocità angolare della manovella:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left[(J_m + m_M r^2 + J_0 \lambda^2) + \left(m_p + m_P - J_0 \frac{\lambda^2}{r^2} \right) \frac{v_p^2}{\omega^2} \right] \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[(J_m + m_M r^2 + J_0 \lambda^2) + \left(m_p + m_P - J_0 \frac{\lambda^2}{r^2} \right) \lambda^2 \sin^2 \theta \right] \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} [J_r + J_a(\theta)] \omega^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Avendo indicato con J_r e J_a (che risulta funzione di θ):

$$J_r = (J_m + m_M r^2 + J_0 \lambda^2) \quad (19.1)$$

$$J_a(\theta) = \left(m_p + m_P - J_0 \frac{\lambda^2}{r^2} \right) \lambda^2 \sin^2 \theta \quad (19.2)$$

Si osserva che, anche se la velocità angolare della manovella è costante, l'energia cinetica non è costante. Questi meccanismi non possono pertanto funzionare a regime assoluto (con energia cinetica costante), ma solamente a regime periodico.

Scriviamo quindi l'equazione di Lagrange, prendendo θ come variabile lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = M(\theta, t) \quad (20)$$

Esplicitiamo le derivate a primo membro:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left[\frac{1}{2} [J_r + J_a(\theta)] \dot{\theta}^2 \right]}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{2} [J_r + J_a(\theta)] \ddot{\theta} \quad (21.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial J_a(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}^2 \quad (21.2)$$

A secondo membro è presente il momento delle forze esterne non conservative, ridotto alla coordinata lagrangiana θ , supponiamo che sul manovellismo agisca una forza F sul pistone (nei motori alternativi è la forza sviluppata dalla combustione nel cilindro) e una coppia resistente τ sulla manovella (Figura 89).

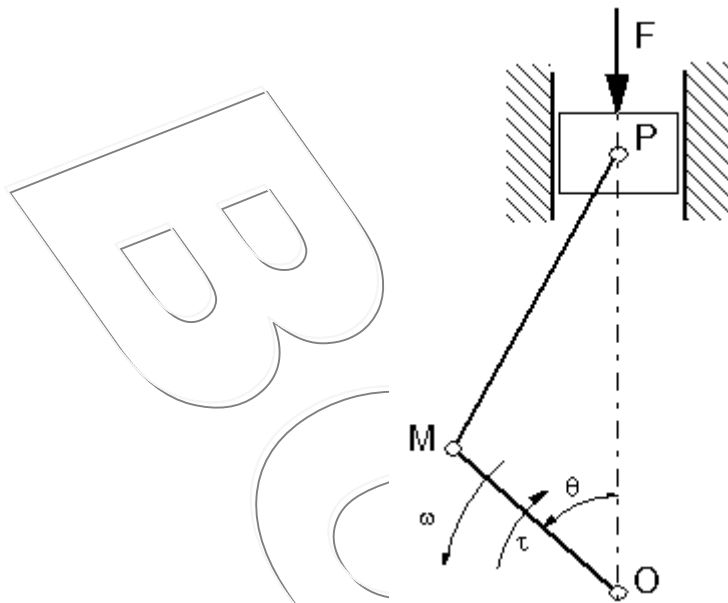


Figura 89: Manovellismo di spinta centrato, forze e coppie agenti sul sistema.

Per ridurre la forza F alla coordinata lagrangiana θ ricordiamo che:

$$F v_p = C_{rid} \omega$$

$$C_{rid} = F \frac{v_p}{\omega} \quad (22)$$

Il rapporto $\frac{v_p}{\omega}$ può essere determinato con la costruzione grafica riportata in Figura 90. Per maggiori dettagli sulla costruzione grafica si rimanda al capitolo sui sistemi articolati.

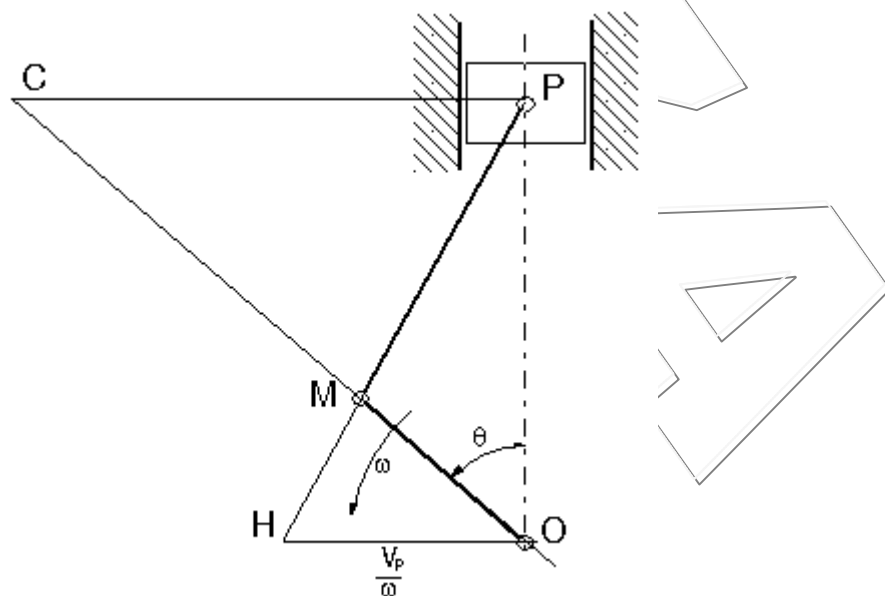


Figura 90: Manovellismo di spinta centrato, costruzione grafica della velocità del piede di biella.

Riassumendo, l'equazione di moto del manovellismo risulta:

$$(J_r + J_a)\ddot{\theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_a}{\partial \theta} = F \frac{v_p}{\dot{\theta}} - \tau \quad (23)$$

L'equazione di moto risulta non lineare per la presenza del termine J_a , che dipende dall'angolo di rotazione θ e del termine $\frac{1}{2} \frac{\partial J_a}{\partial \theta}$.

9.3. Bilanciamento delle macchine alternative monocilindriche

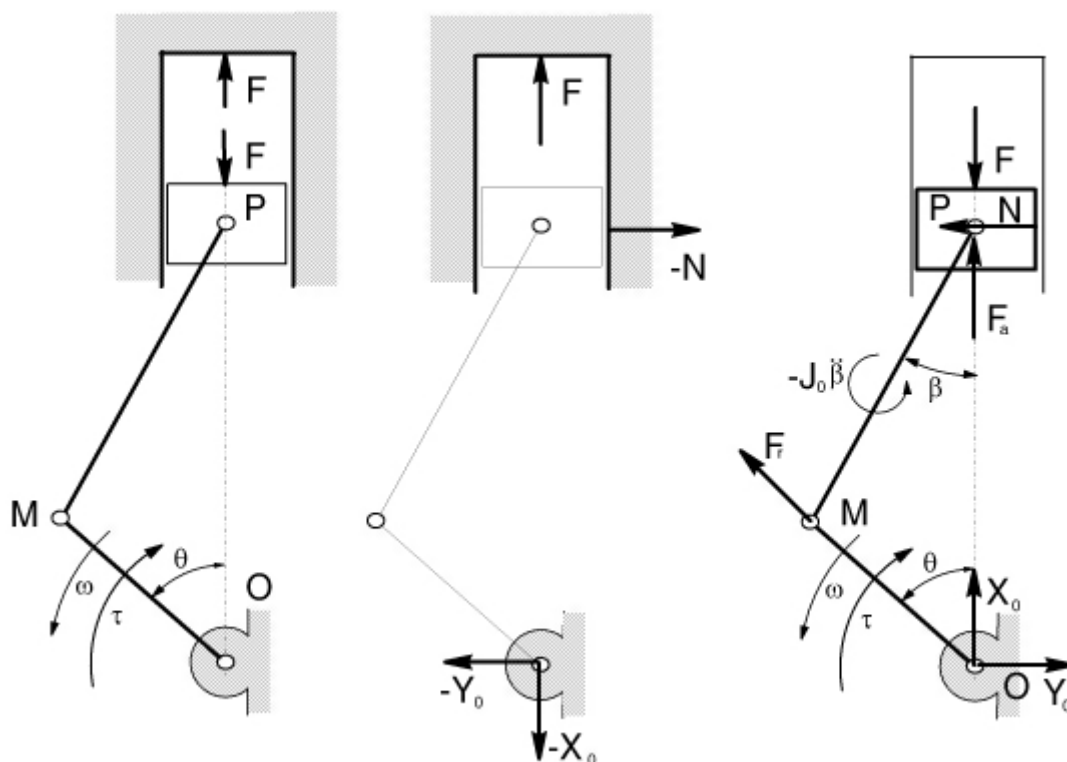


Figura 91: Motore alternativo monocilindrico, forze e coppie agenti sul sistema a) forza nel cilindro e coppia resistente, b) forze che agiscono sul telaio, c) forze che agiscono sul manovellismo

Le macchine alternative sono caratterizzate da alcuni elementi che si muovono di moto rotatorio (le manovelle), altre di moto traslatorio alternato (i pistoni) e altri di moto rototraslatorio (le bielle). Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che l'energia cinetica del sistema non è costante quando la velocità angolare della manovella è costante e questi sistemi non possono funzionare a regime assoluto.

Il telaio è soggetto a forze caratterizzate da un andamento periodico e che quindi possono generare vibrazioni potenzialmente in grado di alterare la funzionalità e l'integrità della macchina (possono provocare, ad esempio, sollecitazioni di fatica).

Obiettivo del BILANCIAMENTO delle macchine alternative è quello di ridurre più possibile oppure, nella migliore delle ipotesi annullare, le forze di tipo alternativo che dal cinematismo si scaricano sul telaio.

Un motore si dice quindi bilanciato quando sul telaio non si scaricano forze di tipo periodico dal cinematismo.

Consideriamo quindi un motore alternativo monocilindrico, funzionante a regime (con velocità ω di rotazione della manovella costante). Analizziamo le forze che agiscono sul manovellismo (figura 91 c)):

- una forza $-F$ esercitata dalla pressione nel cilindro sulla testa del pistone;

- la coppia resistente τ applicata sulla manovella;
- la reazione N del cilindro sul pistone, in assenza di attrito è ortogonale alla superficie del cilindro;
- la reazione della coppia rotoidale in O , che si scompone in una componente X_0 lungo l'asse del cinematismo e in una Y_0 ad essa ortogonale;
- la forza di inerzia delle masse della manovella, diretta come MO e con modulo pari a:

$$F_{rm} = m_m c \omega^2 \quad (24)$$

avendo indicato con c la distanza del baricentro della manovella dal centro di rotazione O e con m_m la massa della manovella;

- la forza di inerzia del pistone, diretta come l'asse del cinematismo e con modulo pari a:

$$F_{ap} = m_p a_p \quad (25)$$

avendo indicato con m_p la massa del pistone e con a_p la sua accelerazione;

- la forza di inerzia della biella, utilizzando la schematizzazione descritta nei paragrafi precedenti (due masse concentrate m_M e m_P ed un momento di inerzia J_0), può essere calcolata come somma di tre termini:

- una componente, diretta secondo l'asse del manovellismo, con modulo pari a:

$$F_{ab} = m_p a_p \quad (26)$$

- una componente, diretta lungo OM , con modulo pari a:

$$F_{rb} = m_M r \omega^2 \quad (27)$$

- una coppia pari a:

$$C_b = -J_0 \ddot{\beta} \quad (28)$$

Indichiamo con il termine **forze rotanti** la somma:

$$F_r = F_{rm} + F_{rb} = (m_m c + m_M r) \omega^2 \quad (29)$$

e con il termine **forze alterne** la somma:

$$F_a = F_{ap} + F_{ab} = (m_p + m_p) a_p \quad (30)$$

Scriviamo l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse del manovellismo:

$$X_0 - F + F_a + F_r \cos \theta = 0 \quad (31)$$

Dall'equilibrio in direzione ortogonale all'asse di rotazione risulta invece:

$$Y_0 + N + F_r \sin \theta = 0 \quad (32)$$

Dall'equilibrio alla rotazione si ottiene:

$$-\tau - J_0 \ddot{\beta} + N \cdot PO = 0 \quad (33)$$

Esplicitiamo quindi le forze e coppie che si scaricano sul telaio (figura 91 b)):

- lungo l'asse del manovellismo abbiamo una forza pari a:

$$F - X_0 \quad (34)$$

- in direzione ortogonale all'asse abbiamo invece:

$$-Y_0 - N \quad (35)$$

- la coppia risultante scaricata sul telaio (calcolata rispetto al punto O) risulta:

$$-N \cdot PO \quad (36)$$

Utilizzando i risultati delle equazioni (31), (32) e (33) le forze e coppie che si scaricano sul telaio si possono scrivere così:

- lungo l'asse del manovellismo:

$$F - X_0 = F_a + F_r \cos \theta \quad (37)$$

- in direzione ortogonale all'asse:

$$-Y_0 - N = F_r \sin \theta \quad (38)$$

- coppia risultante:

$$-N \cdot PO = -\tau - J_0 \ddot{\beta} \quad (39)$$

Analizziamo in dettaglio la forza alterna, definita nella (30):

$$F_a = (m_p + m_p) a_p$$

ricordiamo, dall'analisi della cinematica del manovellismo di spinta, che l'accelerazione del pistone può essere approssimata per mezzo della seguente espressione:

$$a_p = r \omega^2 (\cos \theta + \lambda \cos 2\theta) \quad (40)$$

Per cui la forza alterna sarà data da:

$$F_a = (m_p + m_p) r \omega^2 (\cos \theta + \lambda \cos 2\theta) \quad (41)$$

Definiamo quindi la **forza alterna del primo ordine**:

$$F_a^I = (m_p + m_p) r \omega^2 \cos \theta \quad (42)$$

e la **forza alterna del secondo ordine**:

$$F_a^{II} = (m_p + m_p) r \omega^2 \lambda \cos 2\theta \quad (43)$$

Risulta ovviamente che:

$$F_a = F_a^I + F_a^{II}$$

Per il bilanciamento del motore, si considerano:

- le forze rotanti, le cui componenti in direzione dell'asse e in direzione ortogonale all'asse risultano funzioni di tipo sinusoidale, alla stessa frequenza della rotazione della manovella;
- le forze alterne, che si compongono di due parti, la prima caratterizzata da frequenza pari a quella di rotazione della manovella (**forze alterne del primo ordine**), e la seconda caratterizzata da frequenza doppia rispetto a quella di rotazione della manovella (**forze alterne del secondo ordine**).

Gli altri termini non vengono di solito considerati nel bilanciamento perché:

- la coppia resistente τ varia in generale durante il funzionamento, ma con gradualità e non è in generale di tipo oscillante, per cui non provoca sollecitazioni affaticanti per il sistema;
- la coppia di inerzia della biella $-J_0 \ddot{\beta}$ ha solitamente entità limitata.

Analizziamo quindi come ridurre o eliminare le forze rotanti e le forze alterne.

9.4. Forza rotante

Per eliminare la forza rotante dobbiamo fare in modo che risulti:

$$m_m c + m_M r = 0 \quad (44)$$

In altre parole che il momento statico della massa di sostituzione della biella e di quella della manovella, rispetto all'asse di rotazione della manovella sia nullo. Questo risultato può essere raggiunto spostando il baricentro della manovella dalla parte opposta rispetto ad O del bottone di manovella M (vedi figura 92) e facendo in modo che la distanza del baricentro da O sia pari a:

$$c' = \frac{m_M}{m_m} r \quad (45)$$

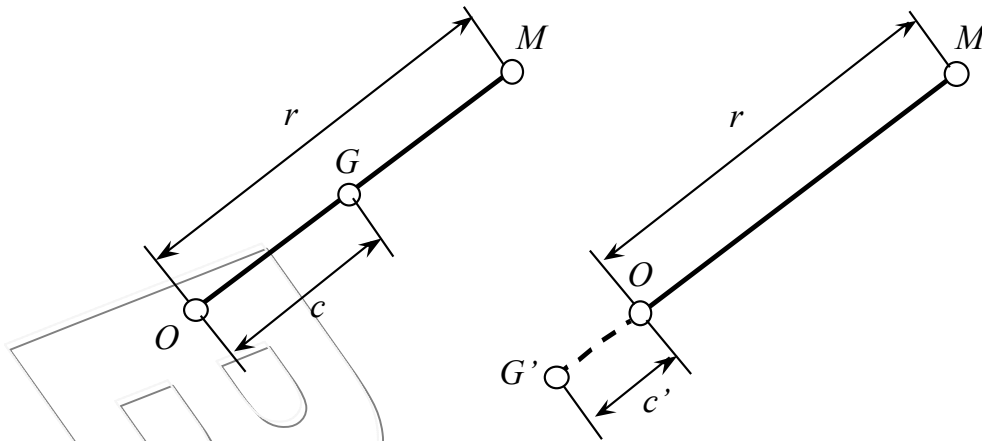


Figura 92: Bilanciamento delle forze rotanti a) sistema non bilanciato: il baricentro è interno al segmento OM b) il sistema è bilanciato se il nuovo baricentro G' è a distanza

$$c' = \frac{m_M}{m_m} r \text{ da } O$$

La forza rotante può essere bilanciata inserendo opportuni contrappesi (spesso integrati sull'albero motore, vedi Figura 93), con una distribuzione di massa tale da soddisfare l'equazione (45).

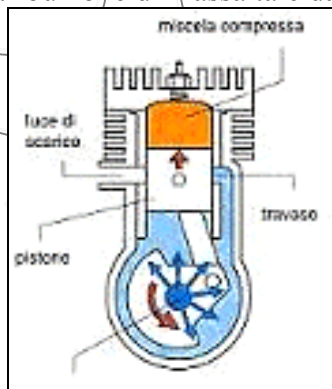


Figura 93: Schema di un motore monocilindrico, nell'albero motore, sono evidenti i contrappesi inseriti per bilanciare le forze rotanti.

9.5. Forze alterne

Consideriamo le forze alterne del primo ordine:

$$F_a^I = (m_p + m_p) r \omega^2 \cos \theta \quad (42)$$

Questa forza può essere vista come la risultante di due forze $\vec{F}_a^{IC}$ e $\vec{F}_a^{ID}$ con modulo pari a:

$$|\vec{F}_a^{IC}| = |\vec{F}_a^{ID}| = \frac{1}{2} (m_p + m_p) r \omega^2 \quad (46)$$

rotanti, con velocità pari a ω e $-\omega$ rispettivamente intorno ad O (vedi Figura 94) e coincidenti per $\theta = 0$.

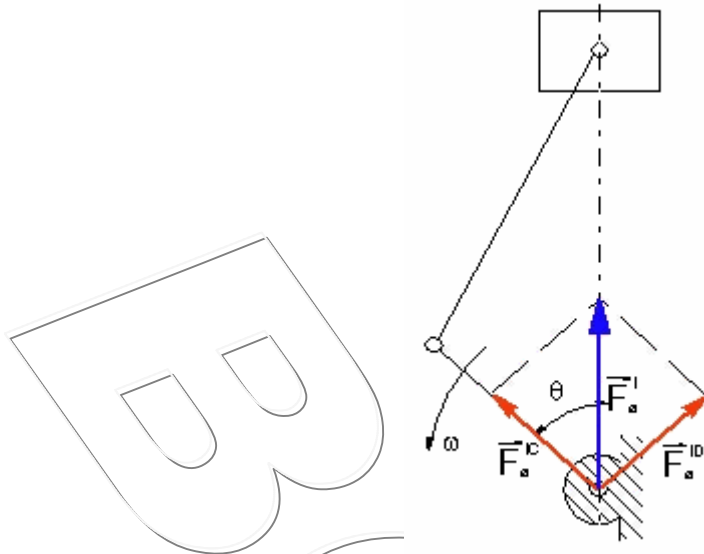


Figura 94: Scomposizione della forza alternata nella componente rotante $\vec{F}_a^{IC}$ e in quella controrotante $\vec{F}_a^{ID}$

La componente rotante $\vec{F}_a^{IC}$ può essere considerata insieme alla forza rotante definita nell'equazione (29) e quindi dimensionando in modo opportuno il contrappeso sull'albero motore. Per eliminare la componente controrotante occorrerebbe un contrappeso controrotante. Tale soluzione comporta un albero aggiuntivo, che ruota con velocità opposta a quella dell'albero motore, incrementando così la complessità progettuale, gli ingombri e i costi del motore. Nei motori monocilindrici, soprattutto se di grossa cilindrata (come ad esempio quelli impiegati nelle moto da enduro), l'impiego del contralbero è indispensabile, a causa delle elevate masse in gioco.

La forza alternata del secondo ordine ha modulo pari a:

$$F_a^{II} = (m_p + m_p) r \omega^2 \lambda \cos 2\theta \quad (43)$$

e può essere vista come la somma di due forze $\vec{F}_a^{IIC}$ e $\vec{F}_a^{IID}$ con modulo pari a:

$$|\vec{F}_a^{IIC}| = |\vec{F}_a^{IID}| = \frac{1}{2} (m_p + m_p) r \omega^2 \lambda \quad (47)$$

rotanti con velocità pari a 2ω e -2ω .

Il bilanciamento della forza alternata del secondo ordine richiederebbe dei contrappesi su alberi rotanti a velocità doppia rispetto a quella dell'albero motore. Il suo modulo risulta comunque limitato rispetto a quello della forza del primo ordine (dato che è moltiplicato per λ , che assume valori minori di 1, tipicamente circa 1:2.5). La sua frequenza risulta invece doppia rispetto a quella della forza del primo ordine.

9.6. Bilanciamento delle macchine alternative pluricilindriche

Consideriamo un motore con N cilindri in linea (gli assi dei cilindri sono tra loro paralleli e allineati).

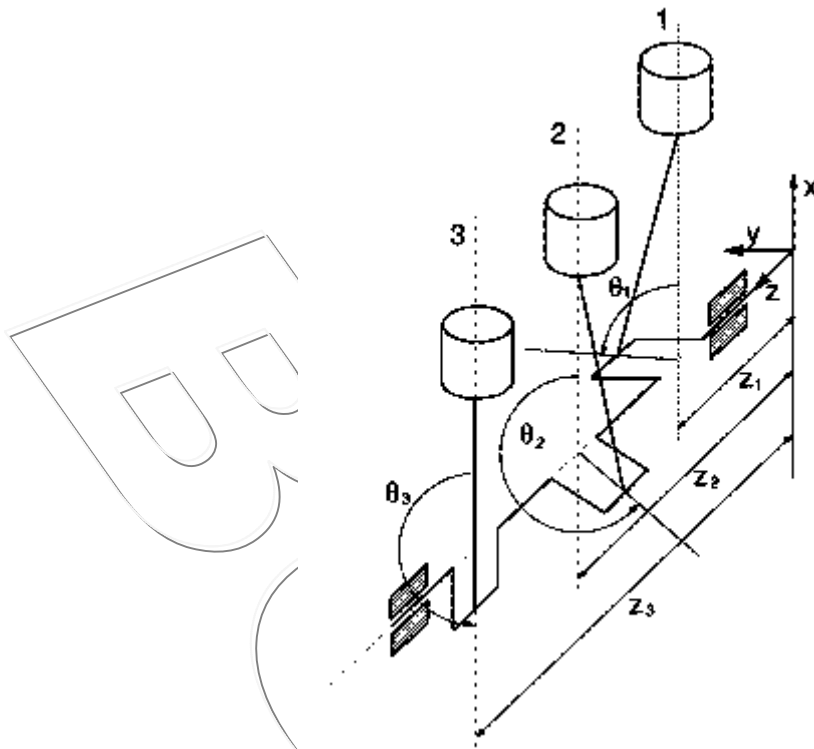


Figura 95: Motore alternativo pluricilindrico

Analizziamo le forze che agiscono sul motore.

- In direzione x agisce una parte della forza rotante e le forza alterna:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n [m_{rot} r \omega^2 \cos \theta_i + m_{alt} r \omega^2 (\cos \theta_i + \lambda \cos 2\theta_i)] \quad (48)$$

- In direzione y agisce una parte della forza rotante:

$$Y = \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n m_{rot} r \omega^2 \sin \theta_i \quad (49)$$

Analizziamo i momenti agenti sul sistema:

- In direzione x (momento di imbardata):

$$M_x = \sum_{i=1}^n Y_i z_i \quad (50)$$

- In direzione y (momento di beccheggio):

$$M_y = \sum_{i=1}^n X_i z_i \quad (51)$$

- In direzione z (momento di rollio):

$$M_z = -\sum_{i=1}^n J_0 \ddot{\theta}_i = -\sum_{i=1}^n J_0 \lambda \omega^2 \sin \theta_i \quad (52)$$

Il motore è equilibrato se:

$$X = Y = 0 \quad (53)$$

$$M_x = M_y = M_z = 0 \quad (54)$$

Se ogni manovella è bilanciata, ovvero se per ognuna il baricentro è posizionato in modo che:

$$c = \frac{m_M}{m_m} r$$

(equazione(45)), i termini dovuti alle masse rotanti si annullano.

Tuttavia non è necessario che tutte le manovelle vengano bilanciate singolarmente: in pratica basta contrappesare opportunamente solo due di esse (solitamente la prima e l'ultima). Eliminando le forze rotanti, si annullano quindi tutte le forze lungo y , il momento lungo x , parte della forza lungo x e parte del momento lungo y . Rimangono quindi ancora da bilanciare le seguenti forze:

$$X_{alt} = \sum_{i=1}^n [m_{alt} r \omega^2 (\cos \theta_i + \lambda \cos 2\theta_i)] \quad (55)$$

$$M_{y_{alt}} = \sum_{i=1}^n [m_{alt} r \omega^2 (\cos \theta_i + \lambda \cos 2\theta_i) z_i] \quad (56)$$

In seguito verificheremo che le condizioni che garantiscono il bilanciamento delle forze alterne del primo ordine automaticamente garantiscono anche il bilanciamento delle forze rotanti.

Affinché anche le forze alterne del primo ordine siano equilibrate è necessario che:

$$\sum_{i=1}^n \cos \theta_i = 0 \quad (57)$$

Affinché anche le forze alterne del secondo ordine siano equilibrate è necessario che:

$$\sum_{i=1}^n \cos 2\theta_i = 0 \quad (58)$$

Affinché anche i momenti generati dalle forze alterne del primo ordine siano equilibrati è necessario che:

$$\sum_{i=1}^n z_i \cos \theta_i = 0 \quad (59)$$

Affinché anche i momenti generati dalle forze alterne del secondo ordine siano equilibrati è necessario che:

$$\sum_{i=1}^n z_i \cos 2\theta_i = 0 \quad (60)$$

Gli sfasamenti tra le manovelle devono essere tali da rendere più uniforme possibile la coppia durante tutto l'arco di un giro. Indichiamo con δ_i lo sfasamento dell' i -esima manovella rispetto alla prima, in modo da avere:

$$\theta_i = \theta_1 + \delta_i$$

Per un motore a due tempi dovrà risultare:

$$\delta_i - \delta_{i-1} = \frac{2\pi}{N} \quad \text{oppure anche} \quad \delta_i = (i-1) \frac{2\pi}{N} \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N \quad (N \text{ numero dei cilindri}) \quad (61)$$

Mentre per un motore a quattro tempi:

$$\delta_i - \delta_{i-1} = \frac{4\pi}{N} \quad \text{oppure anche} \quad \delta_i = (i-1) \frac{4\pi}{N} \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N \quad (N \text{ numero dei cilindri}) \quad (62)$$

Le condizioni per il bilanciamento del motore si possono quindi riscrivere in questo modo:

$$\sum_{i=1}^n \cos(\theta_1 + \delta_i) = \cos \theta_1 \sum_{i=1}^n \cos \delta_i - \sin \theta_1 \sum_{i=1}^n \sin \delta_i = 0 \quad (63)$$

$$\sum_{i=1}^n \cos 2(\theta_1 + \delta_i) = \cos 2\theta_1 \sum_{i=1}^n \cos 2\delta_i - \sin 2\theta_1 \sum_{i=1}^n \sin 2\delta_i = 0 \quad (64)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i \cos(\theta_1 + \delta_i) = \cos \theta_1 \sum_{i=1}^n z_i \cos \delta_i - \sin \theta_1 \sum_{i=1}^n z_i \sin \delta_i = 0 \quad (65)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i \cos 2(\theta_1 + \delta_i) = \cos 2\theta_1 \sum_{i=1}^n z_i \cos 2\delta_i - \sin 2\theta_1 \sum_{i=1}^n z_i \sin 2\delta_i = 0 \quad (66)$$

Il motore risulta quindi bilanciato se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\sum_{i=1}^n \cos \delta_i = 0 \quad (67)$$

$$\sum_{i=1}^n \sin \delta_i = 0 \quad (68)$$

$$\sum_{i=1}^n \cos 2\delta_i = 0 \quad (69)$$

$$\sum_{i=1}^n \sin 2\delta_i = 0 \quad (70)$$

¹³ Nella equazione (61), così come in quella (62) si intende esplicitare la necessità, per motivi di funzionamento termodinamico e di continuità del moto, che le fasi dei vari cilindri del motore si susseguano con una certa regolarità (ad es. è chiaro che non è bene che lo scoppio avvenga simultaneamente in tutti i cilindri). Tuttavia non è assolutamente necessario che l'indice i sia collegato alla effettiva disposizione dei cilindri lungo l'albero a camme (ovvero, gli sfasamenti dei vari manovellismi si calcolano con le (61) o (62), ma poi la disposizione ottimale dei vari cilindri lungo l'albero a gomiti viene decisa esclusivamente sulla base delle esigenze meccaniche di bilanciamento).

$$\sum_{i=1}^n z_i \cos \delta_i = 0 \quad (71)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i \sin \delta_i = 0 \quad (72)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i \cos 2\delta_i = 0 \quad (73)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i \sin 2\delta_i = 0 \quad (74)$$

Si osserva che imponendo l'annullamento delle forze alterne del primo ordine (condizioni (67) e (68) automaticamente si impone anche l'annullamento delle forze rotanti. Infatti la componente lungo x della forza rotante è pari a:

$$X_{rot} = \sum_{i=1}^n [m_{rot} r \omega^2 \cos \theta_i] = m_{rot} r \omega^2 \left(\cos \theta_1 \sum_{i=1}^n \cos \delta_i - \sin \theta_1 \sum_{i=1}^n \sin \delta_i \right) \quad (75)$$

Mentre la componente lungo y delle forze rotanti è pari a:

$$Y_{rot} = \sum_{i=1}^n [m_{rot} r \omega^2 \sin \theta_i] = m_{rot} r \omega^2 \left(\cos \theta_1 \sum_{i=1}^n \sin \delta_i + \sin \theta_1 \sum_{i=1}^n \cos \delta_i \right) \quad (76)$$

Si osserva quindi che se le relazioni (67) (68) sono verificate, automaticamente risulta anche:

$$X_{rot} = 0$$

$$Y_{rot} = 0$$

Analizziamo quindi alcuni esempi di motori alternativi monocilindrici.

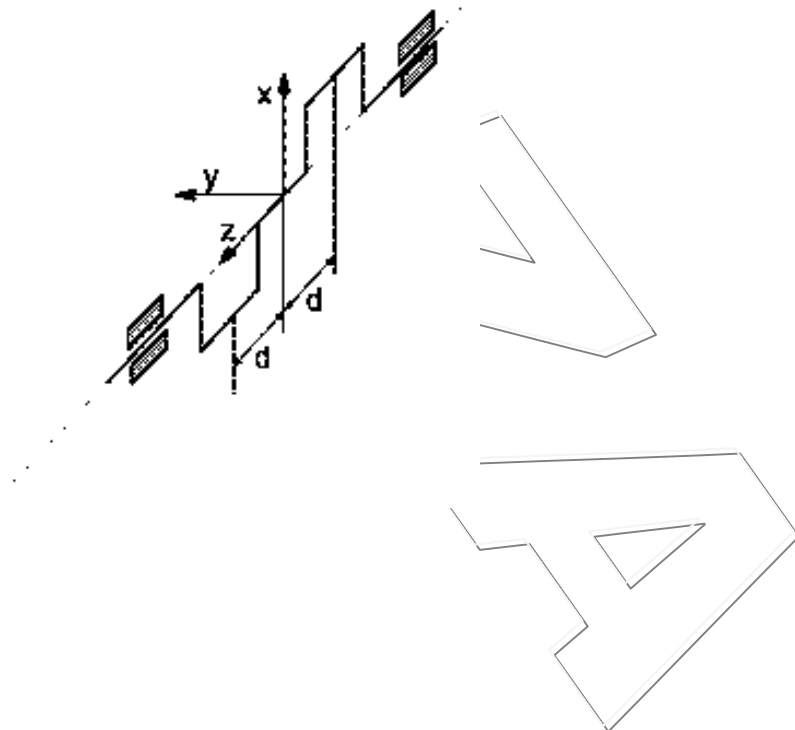
9.6.1. Motore con 2 cilindri a 2 tempi

Dalla relazione (61) otteniamo:

$$\delta_1 = 0$$

$$\delta_2 = \pi$$

Le due manovelle sono quindi sfalsate tra loro di un angolo pari a π (vedi figura 96).



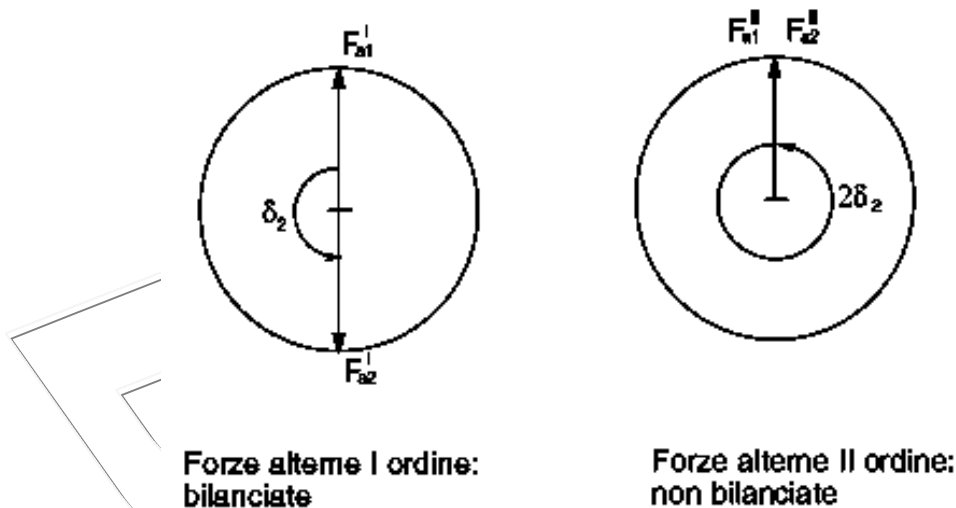


Figura 96: Motore bicilindrico a due tempi: disposizione delle manovelle.

Analizziamo le forze alterne del primo ordine:

$$\sin \delta_1 + \sin \delta_2 = \sin 0 + \sin \pi = 0 + 0 = 0$$

$$\cos \delta_1 + \cos \delta_2 = \cos 0 + \cos \pi = 1 - 1 = 0$$

Le forze alterne del primo ordine risultano quindi bilanciate.

Analizziamo le forze alterne del secondo ordine:

$$\sin 2\delta_1 + \sin 2\delta_2 = \sin 0 + \sin 2\pi = 0 + 0 = 0$$

$$\cos 2\delta_1 + \cos 2\delta_2 = \cos 0 + \cos 2\pi = 1 + 1 = 2$$

Le forze alterne del secondo ordine risultano quindi non bilanciate.

Analizziamo il momento delle forze alterne del primo ordine:

$$z_1 \sin \delta_1 + z_2 \sin \delta_2 = -d \sin 0 + d \sin \pi = 0 + 0 = 0$$

$$z_1 \cos \delta_1 + z_2 \cos \delta_2 = -d \cos 0 + d \cos \pi = -d - d = -2d$$

Il momento delle forze alterne del primo ordine risulta quindi non bilanciato.

Analizziamo infine il momento delle forze alterne del secondo ordine:

$$z_1 \sin 2\delta_1 + z_2 \sin 2\delta_2 = -d \sin 0 + d \sin 2\pi = 0 + 0 = 0$$

$$z_1 \cos 2\delta_1 + z_2 \cos 2\delta_2 = -d \cos 0 + d \cos 2\pi = -d + d = 0$$

Il momento delle forze alterne del secondo ordine risulta quindi bilanciato.

9.6.2. Motore con 2 cilindri a 4 tempi

Dalla relazione (61) otteniamo:

$$\delta_1 = 0$$

$$\delta_2 = 2\pi$$

Le due manovelle sono quindi sfasate tra loro di un angolo pari a 2π (vedi figura 97).

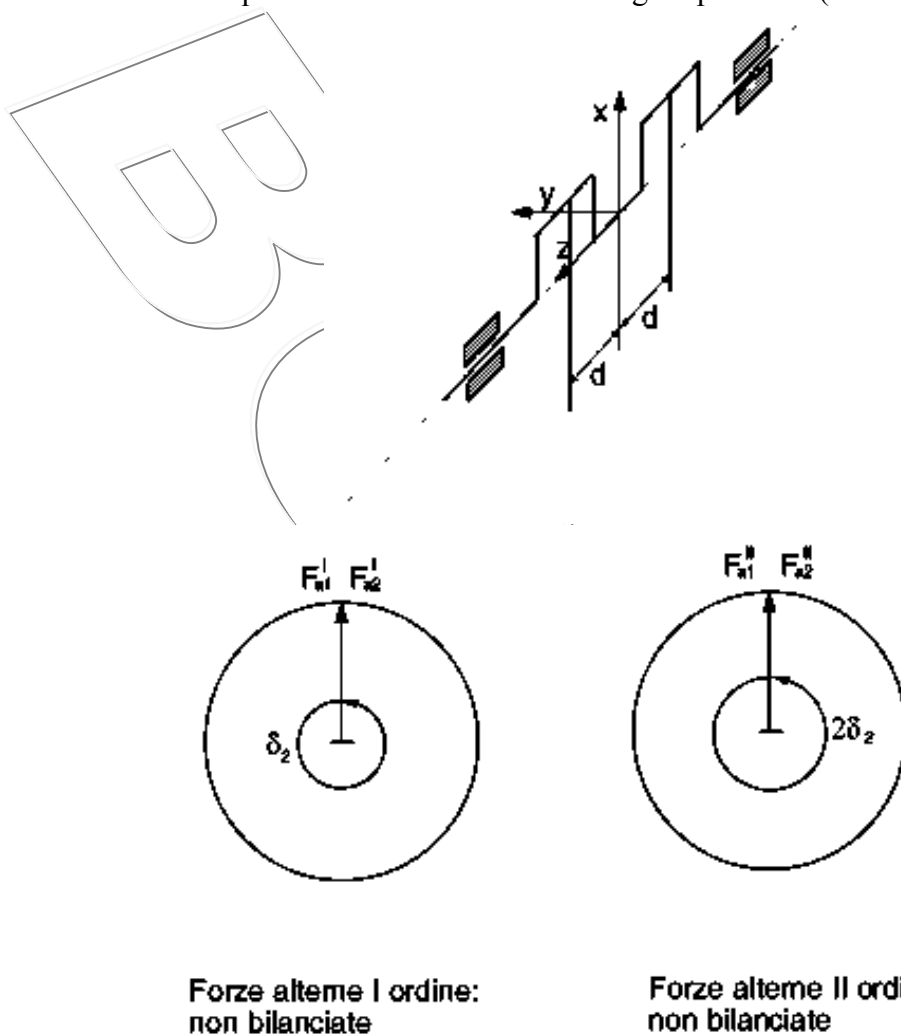


Figura 97: Motore bicilindrico a quattro tempi: disposizione delle manovelle.

Analizziamo le forze alterne del primo ordine:

$$\sin \delta_1 + \sin \delta_2 = \sin 0 + \sin 2\pi = 0 + 0 = 0$$

$$\cos \delta_1 + \cos \delta_2 = \cos 0 + \cos 2\pi = 1 + 1 = 2$$

Le forze alterne del primo ordine risultano quindi non bilanciate.

Analizziamo le forze alterne del secondo ordine:

$$\sin 2\delta_1 + \sin 2\delta_2 = \sin 0 + \sin 4\pi = 0 + 0 = 0$$

$$\cos 2\delta_1 + \cos 2\delta_2 = \cos 0 + \cos 4\pi = 1 + 1 = 2$$

Le forze alterne del secondo ordine risultano quindi non bilanciate.

Analizziamo il momento delle forze alterne del primo ordine:

$$z_1 \sin \delta_1 + z_2 \sin \delta_2 = -d \sin 0 + d \sin 2\pi = 0 + 0 = 0$$

$$z_1 \cos \delta_1 + z_2 \cos \delta_2 = -d \cos 0 + d \cos 2\pi = -d + d = 0$$

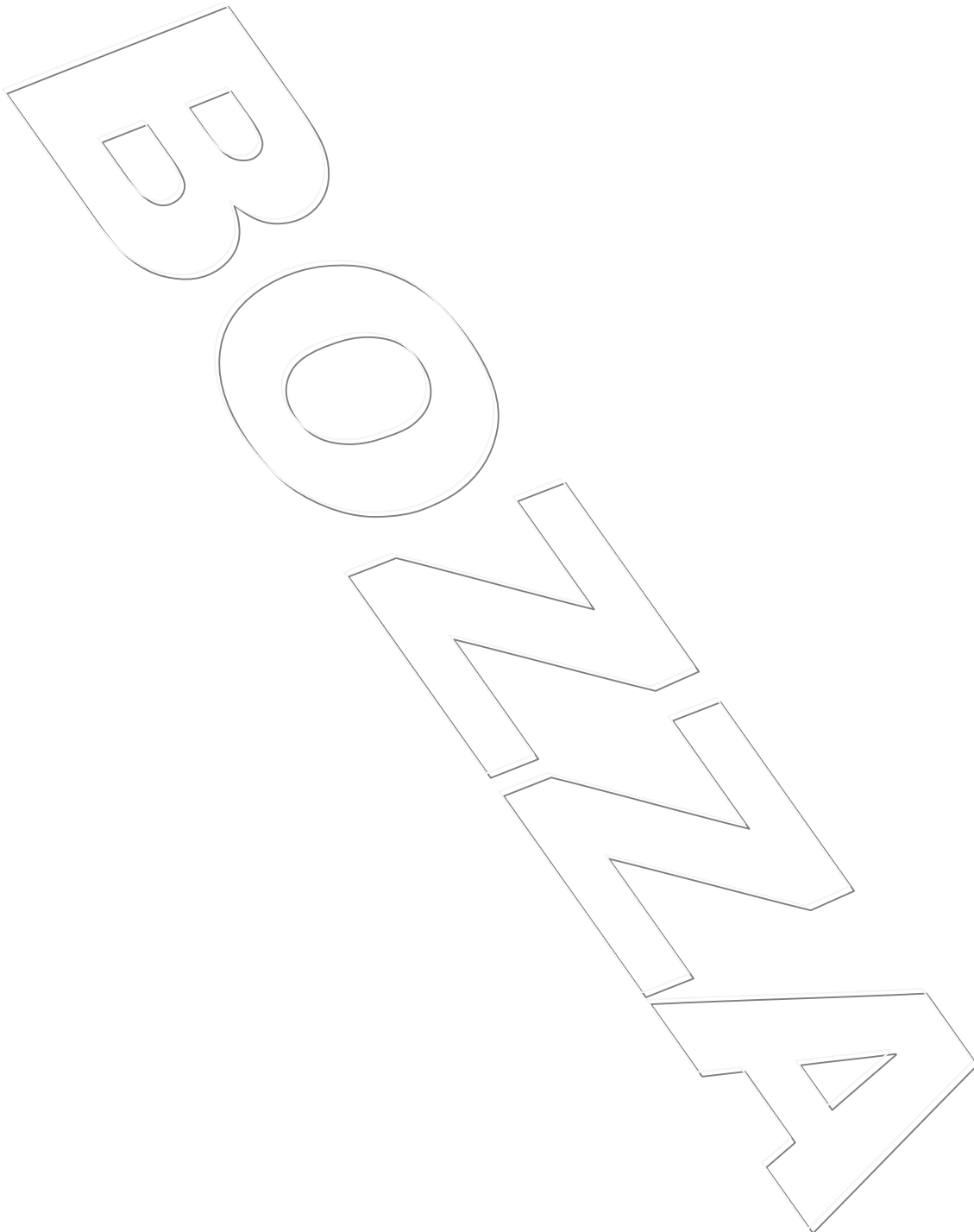
Il momento delle forze alterne del primo ordine risulta quindi bilanciato.

Analizziamo infine il momento delle forze alterne del secondo ordine:

$$z_1 \sin 2\delta_1 + z_2 \sin 2\delta_2 = -d \sin 0 + d \sin 4\pi = 0 + 0 = 0$$

$$z_1 \cos 2\delta_1 + z_2 \cos 2\delta_2 = -d \cos 0 + d \cos 4\pi = -d + d = 0$$

Il momento delle forze alterne del secondo ordine risulta quindi bilanciato.



9.6.3. Motore con 3 cilindri a 2 tempi

Dalla relazione (61) otteniamo:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= 0 \\ \delta_2 &= \frac{2}{3}\pi \\ \delta_3 &= \frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

Le tre manovelle sono quindi sfasate tra loro di un angolo pari a $\frac{2}{3}\pi$ (vedi figura 98).

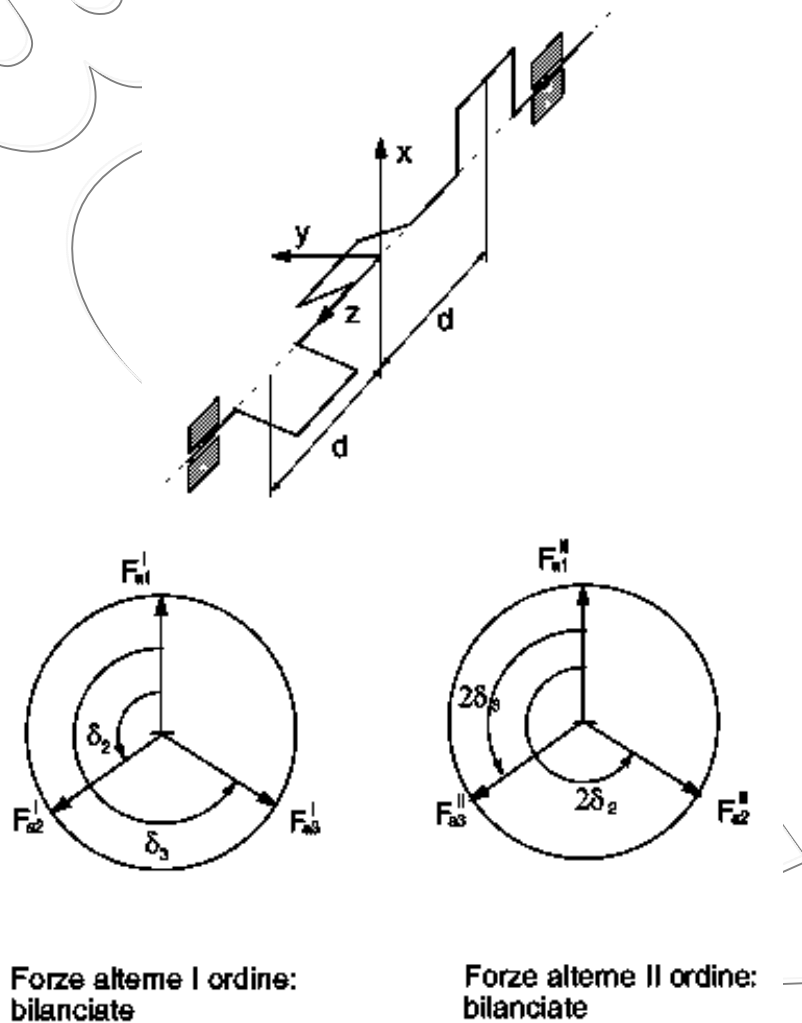


Figura 98: Motore con tre cilindri a due tempi: disposizione delle manovelle.

Analizziamo le forze alterne del primo ordine:

$$\sin \delta_1 + \sin \delta_2 + \sin \delta_3 = \sin 0 + \sin \frac{2}{3}\pi + \sin \frac{4}{3}\pi = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos \delta_1 + \cos \delta_2 + \cos \delta_3 = \cos 0 + \cos \frac{2}{3}\pi + \cos \frac{4}{3}\pi = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Le forze alterne del primo ordine risultano quindi bilanciate.

Analizziamo le forze alterne del secondo ordine:

$$\sin 2\delta_1 + \sin 2\delta_2 + \sin 2\delta_3 = \sin 0 + \sin \frac{4}{3}\pi + \sin \frac{8}{3}\pi = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos 2\delta_1 + \cos 2\delta_2 + \cos 2\delta_3 = \cos 0 + \cos \frac{4}{3}\pi + \cos \frac{8}{3}\pi = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Le forze alterne del secondo ordine risultano quindi bilanciate.

Analizziamo il momento delle forze alterne del primo ordine:

$$z_1 \sin \delta_1 + z_3 \sin \delta_3 = -d \sin 0 + d \sin \frac{4}{3}\pi = 0 + d \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 \cos \delta_1 + z_3 \cos \delta_3 = -d \cos 0 + d \cos \frac{4}{3}\pi = -d + \frac{d}{2} = -\frac{d}{2}$$

Il momento delle forze alterne del primo ordine risulta quindi non bilanciato.

Analizziamo infine il momento delle forze alterne del secondo ordine:

$$z_1 \sin 2\delta_1 + z_3 \sin 2\delta_3 = -d \sin 0 + d \sin \frac{8}{3}\pi \neq 0$$

$$z_1 \cos 2\delta_1 + z_3 \cos 2\delta_3 = -d \cos 0 + d \cos \frac{8}{3}\pi \neq 0$$

Il momento delle forze alterne del secondo ordine risulta quindi non bilanciato.

9.6.4. Motore con 4 cilindri a 2 tempi

Dalla relazione (61) si verifica che le manovelle sono sfalsate tra loro di un angolo pari a $\frac{\pi}{2}$ (vedi figura 99):

$$\begin{aligned}\delta_1 &= 0 \\ \delta_2 &= \frac{\pi}{2} \\ \delta_3 &= \pi \\ \delta_4 &= \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

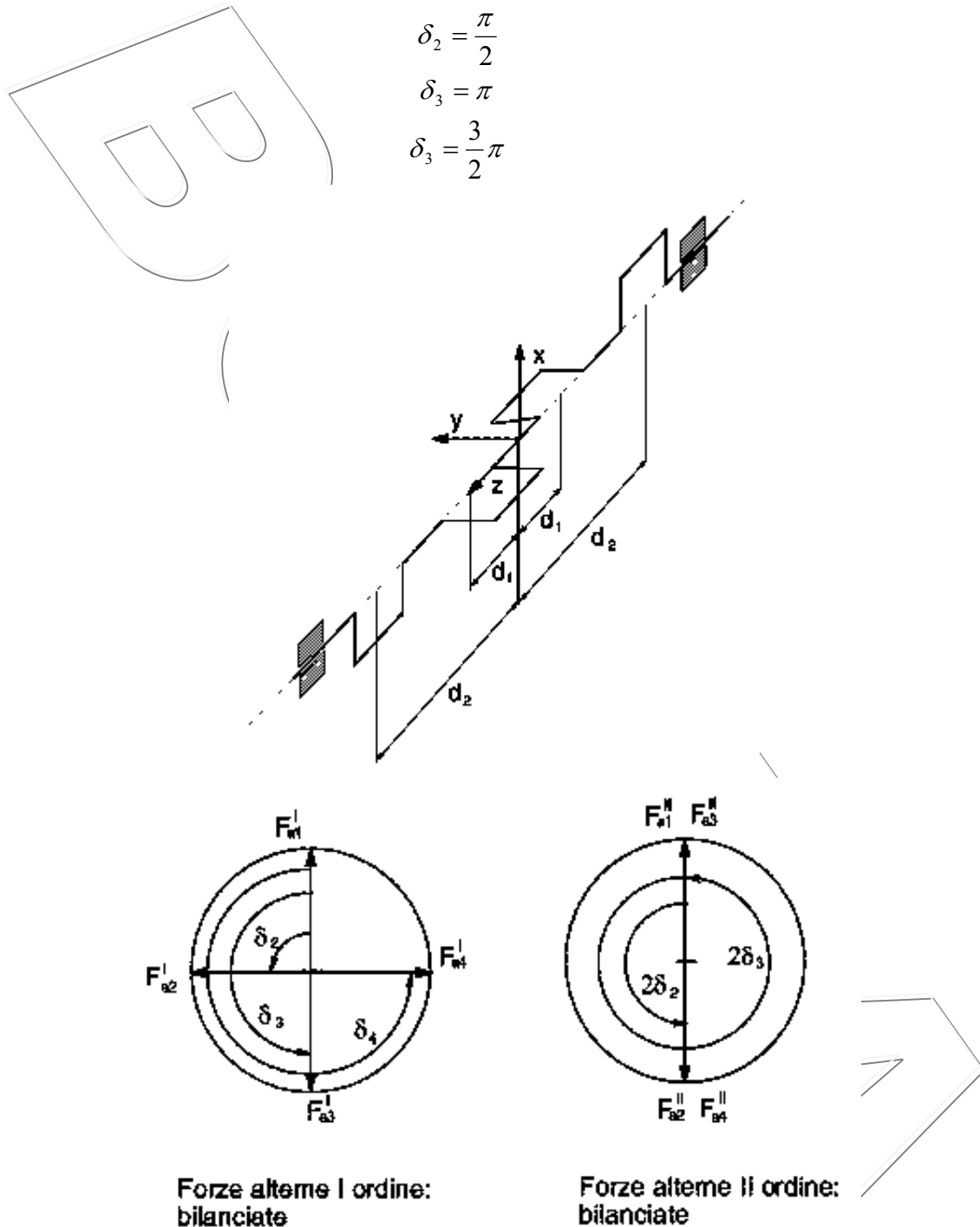


Figura 99: Motore con quattro cilindri a due tempi: disposizione delle manovelle.

Analizziamo le forze alterne del primo ordine:

$$\begin{aligned}\sin \delta_1 + \sin \delta_2 + \sin \delta_3 + \sin \delta_4 &= 0 \\ \cos \delta_1 + \cos \delta_2 + \cos \delta_3 + \cos \delta_4 &= 0\end{aligned}$$

Le forze alterne del primo ordine risultano quindi bilanciate.

Analizziamo le forze alterne del secondo ordine:

$$\sin 2\delta_1 + \sin 2\delta_2 + \sin 2\delta_3 + \sin 2\delta_4 = 0$$

$$\cos 2\delta_1 + \cos 2\delta_2 + \cos 2\delta_3 + \cos 2\delta_4 = 0$$

Le forze alterne del secondo ordine risultano quindi bilanciate.

Analizziamo il momento delle forze alterne del primo ordine:

$$z_1 \sin \delta_1 + z_2 \sin \delta_2 + z_3 \sin \delta_3 + z_4 \sin \delta_4 = 0$$

$$z_1 \cos \delta_1 + z_2 \cos \delta_2 + z_3 \cos \delta_3 + z_4 \cos \delta_4 \neq 0$$

Il momento delle forze alterne del primo ordine risulta quindi non bilanciato.

Analizziamo infine il momento delle forze alterne del secondo ordine:

$$z_1 \sin 2\delta_1 + z_2 \sin 2\delta_2 + z_3 \sin 2\delta_3 + z_4 \sin 2\delta_4 = 0$$

$$z_1 \cos 2\delta_1 + z_2 \cos 2\delta_2 + z_3 \cos 2\delta_3 + z_4 \cos 2\delta_4 = 0$$

Il momento delle forze alterne del secondo ordine risulta quindi bilanciato.

9.6.5. Motore con 4 cilindri a 4 tempi

Dalla relazione (61) si verifica che le manovelle sono sfasate tra loro di un angolo pari a π (vedi figura 100):

$$\delta_1 = 0$$

$$\delta_2 = \pi$$

$$\delta_3 = 2\pi$$

$$\delta_4 = 3\pi$$

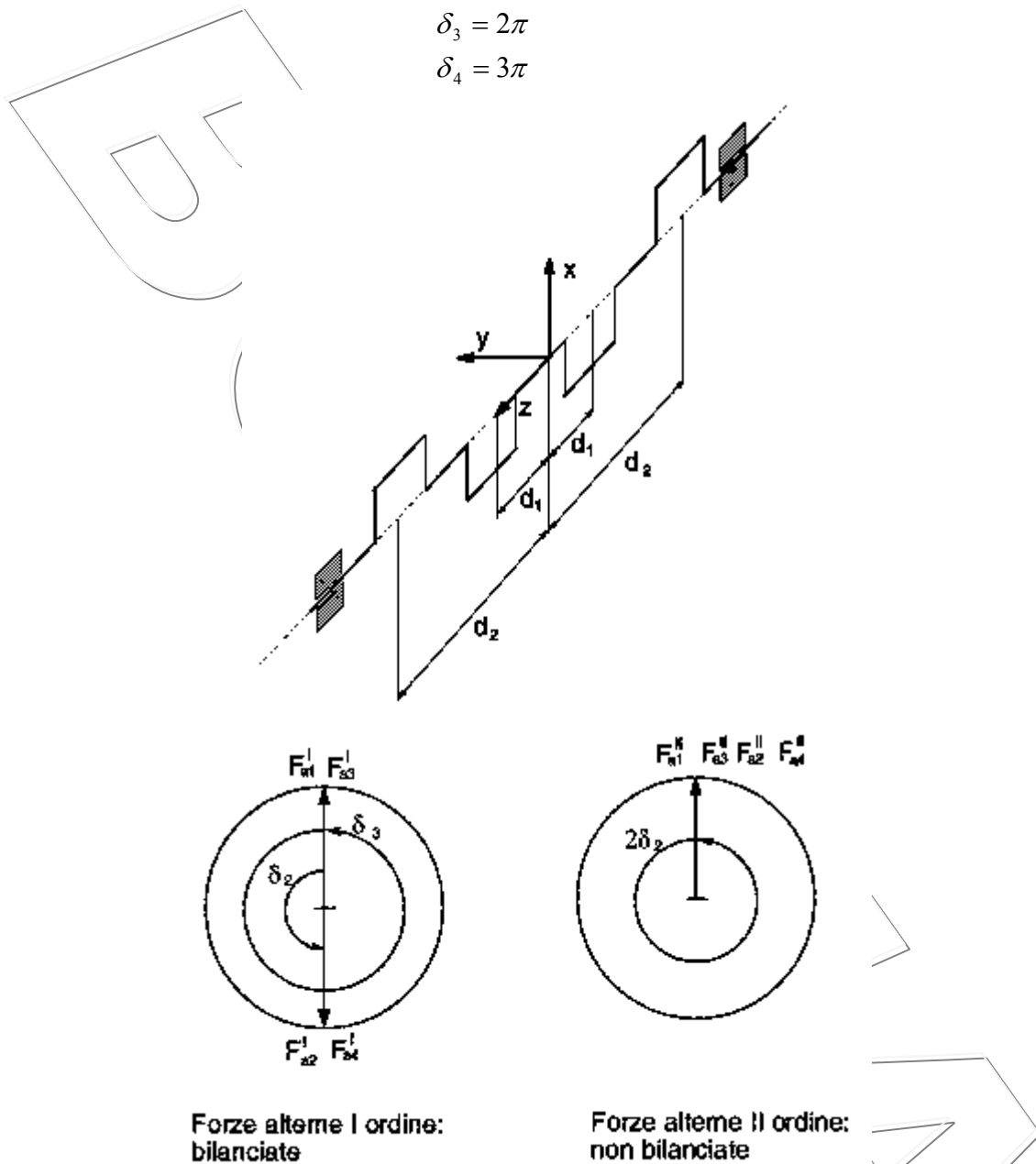


Figura 100: Motore con quattro cilindri a quattro tempi: disposizione delle manovelle.

Analizziamo le forze alterne del primo ordine:

$$\sin \delta_1 + \sin \delta_2 + \sin \delta_3 + \sin \delta_4 = 0$$

$$\cos \delta_1 + \cos \delta_2 + \cos \delta_3 + \cos \delta_4 = 0$$

Le forze alterne del primo ordine risultano quindi bilanciate.

Analizziamo le forze alterne del secondo ordine:

$$\sin 2\delta_1 + \sin 2\delta_2 + \sin 2\delta_3 + \sin 2\delta_4 = 0$$

$$\cos 2\delta_1 + \cos 2\delta_2 + \cos 2\delta_3 + \cos 2\delta_4 \neq 0$$

Le forze alterne del secondo ordine non risultano quindi bilanciate.
 Analizziamo il momento delle forze alterne del primo ordine:

$$z_1 \sin \delta_1 + z_2 \sin \delta_2 + z_3 \sin \delta_3 + z_4 \sin \delta_4 = 0$$

$$z_1 \cos \delta_1 + z_2 \cos \delta_2 + z_3 \cos \delta_3 + z_4 \cos \delta_4 = 0$$

Il momento delle forze alterne del primo ordine risulta quindi bilanciato.

Analizziamo infine il momento delle forze alterne del secondo ordine:

$$z_1 \sin 2\delta_1 + z_2 \sin 2\delta_2 + z_3 \sin 2\delta_3 + z_4 \sin 2\delta_4 = 0$$

$$z_1 \cos 2\delta_1 + z_2 \cos 2\delta_2 + z_3 \cos 2\delta_3 + z_4 \cos 2\delta_4 = 0$$

Il momento delle forze alterne del secondo ordine risulta quindi bilanciato.

Osservazione:

E' immediato verificare che nei motori in cui il piano medio risulta piano di simmetria (motore con due cilindri a quattro tempi, motore con quattro cilindri a quattro tempi) i momenti delle forze alterne, sia del primo che del secondo ordine si annullano.

Esercizio proposto

Verificare che in un motore a quattro tempi, con 6 cilindri in linea risulta:

- Forze alterne del primo ordine bilanciate;
- Forze alterne del secondo ordine bilanciate;
- Momento delle forze alterne del primo ordine bilanciato;
- Momento delle forze alterne del secondo ordine bilanciato.

Esercizio proposto

Verificare che in un motore a quattro tempi, con 8 cilindri in linea risulta:

- Forze alterne del primo ordine bilanciate;
- Forze alterne del secondo ordine bilanciate;
- Momento delle forze alterne del primo ordine bilanciato;

Momento delle forze alterne del secondo ordine bilanciato.

10. Dinamica di sistemi lineari con 1 Grado di libertà

In questa parte del Corso verrà studiato il comportamento libero e forzato di sistemi meccanici lineari caratterizzati da un solo grado di libertà.

Le equazioni che regolano la dinamica di tali sistemi sono dunque equazioni differenziali lineari, a coefficienti costanti di secondo ordine¹⁴ (i termini dell'equazione contengono solo la funzione incognita e le due derivate elevate ad esponente 1 – ad es. x^2 , e^x , $\sqrt{x}$ non sono termini lineari).

Nel caso in cui il sistema non sia sottoposto a forzanti ($f(t)=0$), si analizzerà il *comportamento libero* del sistema. Qualora invece vi siano forzanti ($f(t) \neq 0$), si parlerà di *comportamento forzato*.

Nell'ambito del comportamento forzato di un sistema è necessario fare una ulteriore distinzione. In effetti infatti la risposta forzata di un qualsiasi sistema lineare è costituita dalla somma di due funzioni che rappresentano l'una il cosiddetto *transitorio* e l'altra il *comportamento a regime*.

- Il transitorio è quella parte del comportamento del sistema che tende ad estinguersi con il passare del tempo in funzione dello *smorzamento* del sistema.

¹⁴ Le equazioni differenziali che regolano la dinamica del sistema saranno del tipo $A\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Cx(t) = f(t)$ con A , B e C costanti e $f(t)$ funzione nota. La soluzione dell'equazione differenziale è la funzione incognita $x(t)$.

- Il comportamento a regime del sistema è viceversa quella parte del comportamento che non si estingue (ed anzi rimane inalterata se la forzante è periodica) finché la forzante non cessi oppure vari il suo contributo.

Per quanto riguarda le azioni forzanti, ci si riferirà sempre a *forzanti di tipo armonico*¹⁵ in quanto, come già visto nel modulo di analisi armonica, tutte le funzioni di interesse tecnico (forzanti periodiche e transitorie) possono essere espresse in termini di sommatorie o integrali di funzioni armoniche. Poiché inoltre le equazioni sono esclusivamente lineari, è possibile sfruttare il principio di sovrapposizione degli effetti, per cui lo studio esclusivo di tale tipo di funzione forzante non risulta riduttivo. Nel caso di una forzante non armonica, si scompone quindi la forzante stessa nelle sue componenti armoniche ($f_1, f_2, \dots, f_i$) e si trovano le soluzioni delle equazioni del sistema sottoposto alle singole componenti armoniche ($x_1, x_2, \dots, x_i$); la soluzione generale è la somma delle soluzioni del sistema sottoposto alle singole componenti armoniche $x = x_1 + x_2 + \dots + x_i$.

Nel caso in cui le equazioni differenziali non fossero lineari, per la conoscenza completa del comportamento del sistema, è necessario fare ricorso a tecniche più avanzate. Tuttavia, per ottenere una prima stima del comportamento del sistema, potrebbe essere utile effettuare una linearizzazione del sistema attraverso lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo termine. Il comportamento del sistema linearizzato sarà tanto più simile a quello del sistema originale (non lineare), quanto più piccola sarà l'entità degli spostamenti nell'intorno della posizione di equilibrio.

10.1. Posizione di equilibrio

Nello studio della dinamica, e quindi delle vibrazioni di un sistema, le forzanti costanti (o la componente costante – valor medio – della forzante) non vengono generalmente considerate in quanto *nei sistemi lineari* queste determinano esclusivamente la posizione di equilibrio del sistema, ma non le vibrazioni nell'intorno della stessa.

E' per tale motivo che in tutte le applicazioni che seguiranno si trascura la forza peso (se si ritiene costante la accelerazione di gravità g , la forza peso è infatti costante e pari a mg). Le implicazioni di quanto detto sopra saranno esplicitate nel seguito.

10.2. Equazioni di moto nei sistemi lineari.

Le equazioni di moto dei sistemi vibranti con uno o più gradi di libertà discendono direttamente dalle Equazioni Cardinali della Dinamica. Tuttavia una forma assai più comune delle suddette, che si applica a corpi rigidi che si muovono di moto puramente traslatorio¹⁶ è quella nota comunemente come Legge di Newton, che discende direttamente dalle Equazioni Cardinali, applicando il Principio di D'Alambert¹⁷:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}.$$

$\mathbf{F}$ rappresenta la risultante delle forze (esterne) applicate al corpo in analisi, m la sua massa, $\mathbf{a}$ la sua accelerazione assoluta (rispetto a un riferimento inerziale: fisso, o mobile con velocità costante rispetto ad un riferimento fisso).

La precedente è una equazione vettoriale nello spazio cartesiano a 3 dimensioni ($\mathbf{F}$ ed $\mathbf{a}$ sono vettori). Se ci si limita al caso di moti piani, allora anche $\mathbf{F}$ ed $\mathbf{a}$ sono vettori sul medesimo piano del

¹⁵ Per indicare una funzione armonica, si farà da qui in poi riferimento alla notazione esponenziale già introdotta nel modulo di Analisi Armonica. L'introduzione della notazione esponenziale, e quindi dei numeri complessi, semplifica notevolmente la risoluzione delle equazioni differenziali, inoltre sottoporre il sistema alla forzante $f_0 = A \cdot \cos(\omega t)$, è del tutto equivalente (e quindi fornisce la medesima soluzione, sia i termini di ampiezza che di fase) a sottoporre il sistema alla forzante $\underline{f}_0 = A \cdot e^{i\omega t}$.

¹⁶ Se il moto non è puramente traslatorio questa equazione è ancora valida, ma descrive esclusivamente il moto del baricentro del corpo. Per lo studio completo del moto del corpo è necessario introdurre altre equazioni che permettono di descrivere il moto di rotazione del corpo attorno al suo baricentro.

¹⁷ In pratica il Principio si sintetizza nel fatto di poter utilizzare anche per la dinamica le stesse leggi della statica, avendo la cura di introdurre le cosiddette azioni di inerzia o forze apparenti.

moto, e se si esprimono tramite le rispettive componenti in un sistema di riferimento (x,y) – $\mathbf{F} \equiv (F_x, F_y)$, $\mathbf{a} \equiv (a_x, a_y)$ -, l'equazione vettoriale precedente può essere sostituita dalle due equazioni scalari:

$$F_x = m \cdot a_x;$$

$$F_y = m \cdot a_y.$$

Ovviamente, se il moto oltre che essere traslatorio è anche rettilineo, se si prende l'asse x del sistema di riferimento parallelo alla traiettoria di un qualunque punto del corpo, allora lo studio del moto del sistema può essere effettuato tramite la risoluzione dell'unica equazione scalare:

$$F_x = m \cdot a_x.$$

Poiché inoltre la accelerazione assoluta del corpo a_x altro non è che la derivata seconda della sua posizione x rispetto al tempo (si ricorda che la derivazione di una funzione rispetto al tempo si indica aggiungendo un punto sopra la funzione stessa), e considerando tra le forze esterne solo quelle che hanno componenti lungo la direzione x , la precedente può essere riscritta nella più consueta forma:

$$F = m\ddot{x}.$$

Nella suddetta formula (solo formalmente identica alla formula $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ presentata in precedenza), a primo membro il termine F rappresenta la risultante delle forze esterne aventi sul sistema in direzione x .

Poiché si è premesso che l'equazione differenziale che consentirà lo studio del moto del sistema dovrà risultare lineare (nella funzione incognita $x(t)$), all'interno del termine F potremmo trovare esclusivamente:

- Funzioni di qualunque tipo ma dipendenti esclusivamente dal tempo $F(t)$, che chiameremo *forzanti*;
- Forze elastiche;
- Forze smorzanti.

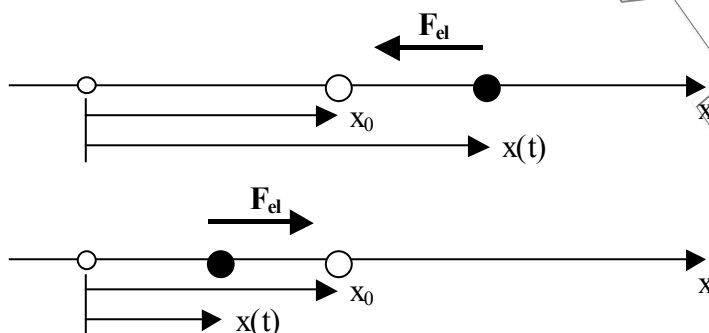
Delle forzanti si è già parlato: possono esservi (e quindi si studia il moto forzato del sistema), oppure no (e si studia quindi il moto libero). Pur essendo teoricamente di forma qualsiasi (deterministiche o aleatorie, periodiche o aperiodiche, transitorie, ecc...) sfruttando i risultati dell'Analisi Armonica e le proprietà derivanti dalla linearità delle equazioni, ci si limiterà allo studio di forzanti armoniche (del tipo $f = f_0 e^{i\omega t}$).

10.3. Forze elastiche

Le forze elastiche sono *forze conservative* che tendono ad opporsi alle cause che le determinano. E' per tale motivo che vengono anche dette forze di richiamo. Si parlerà di forza elastica come di una forza che ha un modulo proporzionale (tramite la costante di elasticità generalmente indicata con k) allo spostamento del corpo rispetto alla sua posizione di equilibrio. Il verso della forza (e quindi il suo segno), sarà quello che contribuirà a far ritornare il corpo nella sua posizione di equilibrio.

Indicando con x l'asse lungo cui avviene il moto, se si indica con x_0 la posizione di equilibrio (statico) del corpo, la forza elastica varrà quindi:

$$F_{el}(t) = -k(x(t) - x_0).$$



Tuttavia, se si prende la posizione di equilibrio (statico) come origine del sistema di riferimento, allora $x_0=0$, e quindi si ottiene la più classica forma:

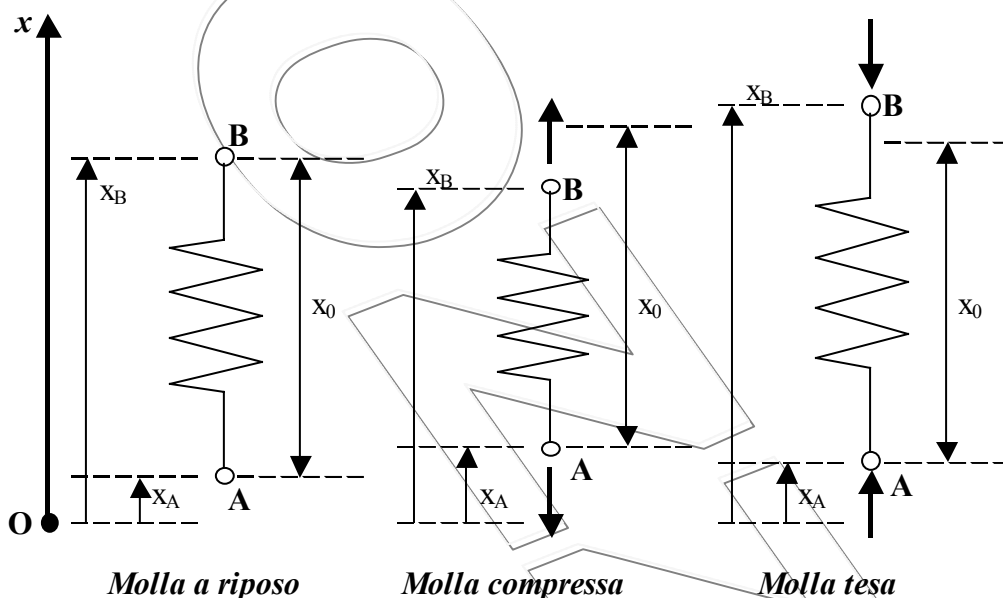
$$F_{el} = -kx.^{18}$$

Va tuttavia rimarcato che in questo caso (diversamente da quanto scritto in precedenza), la variabile $x(t)$ rappresenta lo *spostamento del corpo rispetto alla posizione di equilibrio*, e non più semplicemente la posizione del corpo rispetto ad un riferimento qualsiasi.

Il caso più comune di forza elastica è quello della forza sviluppata da una molla a spirale (a patto che non sia né troppo compressa né troppo allungata). E' proprio da questo componente che trae origine il simbolo grafico convenzionale per tale tipo di forze.



Da quanto detto in precedenza risulta chiaro che la forza sviluppata da un tale elemento è proporzionale tramite la costante di elasticità k (N/m) alla distanza tra gli estremi indicati con le lettere A e B.



La molla possiede una propria lunghezza a riposo indicata in questo caso con x_0 . Le forze generate dalla molla e scambiate con i corpi ad essa connessi in corrispondenza degli estremi hanno versi opposti a seconda che la distanza tra gli estremi A e B sia superiore (molla tesa) o inferiore (molla compressa) alla lunghezza a riposo.

E' facile verificare che la forza scambiata in corrispondenza dell'estremo B varrà:

$$F_{el\ B} = -k(x_B - x_A - x_0).$$

Poiché inoltre si è già detto che le componenti costanti non influenzano la dinamica del sistema, solo per quello che riguarda il comportamento dinamico, è anche possibile scrivere:

$$F_{el\ B} = -k(x_B - x_A).$$

Inoltre solo nel caso in cui l'estremo A sia fisso (x_A costante) è possibile scrivere

$$F_{el\ B} = -k x_B.$$

Soltanto nel caso in cui con s si intenda la deformazione della molla rispetto alle sue condizioni a riposo, è sempre possibile indicare la forza elastica di una molla tramite:

¹⁸ In ogni caso si è già detto come le forze costanti (o le componenti costanti delle forze) non determinano variazioni del comportamento dinamico del sistema, ma solo della sua posizione di equilibrio. Se si osserva quindi la forma più completa della forza elastica $F_{el}(t) = -k(x(t) - x_0)$, si ha anche che $F_{el}(t) = -k x(t) + k x_0$. La seconda parte della forza elastica ($k x_0$) risulta quindi costante e può essere trascurata se interessa esclusivamente l'analisi del comportamento dinamico del sistema. Se viceversa interessa anche la determinazione della posizione di equilibrio, anche la parte costante deve essere considerata.

$$F_{el B} = -k s.$$

E' infine utile ricordare che una forza elastica è anche conservativa: per deformare la molla è necessario compiere lavoro (fornire energia) che viene accumulata come energia potenziale (di deformazione). Tale energia può essere trasformata in energia cinetica (durante il moto) e viene restituita integralmente se si riporta la molla alla sua lunghezza di riposo in condizioni di velocità nulla.

10.4. Forze smorzanti: smorzamento viscoso

A differenza delle forze elastiche, le forze smorzanti sono forze dissipative, che consumano energia. E' proprio a causa dell'inevitabile presenza di forze di questo tipo che un corpo, una volta posto in movimento e lasciato muoversi senza ulteriori apporti energetici, è inesorabilmente destinato a fermarsi dopo un tempo più o meno lungo.

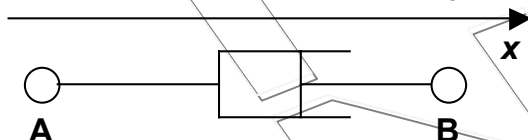
Se gli spostamenti sono di tipo armonico si osserva che, in corrispondenza del massimo (o minimo) spostamento la forza smorzante è nulla; la forza smorzante massima (in modulo), si ha invece quando gli spostamenti sono nulli. Le forze smorzanti sono caratterizzate dal fatto di essere in quadratura con gli spostamenti del sistema. Facendo riferimento alla notazione vettoriale, le forze smorzanti sono sempre sfasate di 90° ($\pi/2$) rispetto alle forze elastiche (che sono in controfase con gli spostamenti – sfasati di π , proporzionali a meno di una costante negativa).

L'unica forza smorzante che verrà presa in considerazione (e che permette di soddisfare l'ipotesi di linearità dell'equazione di moto) è lo **smorzamento viscoso**.

Si definisce forza di smorzamento viscoso, una forza il cui modulo è direttamente proporzionale (tramite la costante c detta coefficiente di smorzamento viscoso – Ns/m) alla velocità di deformazione.

Le forze di smorzamento viscoso modellano assai bene le forze che agiscono su un corpo che si muove con velocità relativamente basse all'interno di un fluido.

Un elemento a cui è ben applicabile tale modello è uno smorzatore oleodinamico, come quello presente nelle sospensioni automobilistiche. Da tale elemento trae origine il simbolo convenzionale di una forza di tale tipo.



Poiché anche tale forza tende ad opporsi alla variazione della velocità di deformazione, ed in analogia a quanto già detto per la forza elastica, se si indica con s la distanza tra gli occhielli A e B dello smorzatore, la forza di smorzamento viscoso vale quindi

$$F_{sm vis} = -c \dot{s},$$

oppure anche

$$F_{sm vis} = -c(v_B - v_A) = -c(\dot{x}_B - \dot{x}_A).$$

Se l'occhiello A è fisso, e se si indica con x la posizione dell'occhiello B, la forza che lo smorzatore applica al corpo adiacente in corrispondenza dell'occhiello B vale:

$$F_{sm vis B} = -c \dot{x}.$$

Se si fa l'ipotesi di spostamenti armonici del tipo $x = x_0 e^{i\omega t}$, si ha allora:

$$\dot{x} = i\omega(x_0 e^{i\omega t}).$$

Poiché inoltre è anche $i = e^{i\pi/2}$ e $(-1) = e^{i\pi}$,

$$\dot{x} = i\omega(x_0 e^{i\omega t}) = e^{i\pi/2} \omega(x_0 e^{i\omega t}) = \omega x_0 e^{i(\omega t + \pi/2)};$$

quindi

$$F_{sm vis B} = -c \omega x_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} = e^{i\pi} c \omega x_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} = c \omega x_0 e^{i(\omega t + 3/2\pi)} = c \omega x_0 e^{i(\omega t - \pi/2)};$$

da cui si osserva che la forza di smorzamento viscoso è sfasata di $3/2\pi$ (ovvero anche di $\pi/2$ in ritardo), e quindi in quadratura rispetto agli spostamenti.

Si osservi inoltre che a parità di ampiezza di spostamenti (a parità di x_0), la forza smorzante aumenta linearmente con la pulsazione degli spostamenti stessi.

Se quindi il sistema compie vibrazioni caratterizzate da frequenze molto basse (spostamenti quasi-statici), a volte può anche essere accettabile trascurare tali forze. Se viceversa gli spostamenti sono caratterizzati da frequenze piuttosto elevate, non considerare tali forze può portare ad errori del tutto inaccettabili.

Si aggiunge infine che non è possibile definire un limite unico per differenziare le frequenze “alte” o “basse”: il tutto dipende dall’insieme delle caratteristiche del sistema, tra cui massa e rigidità.

10.5. Equazioni di moto

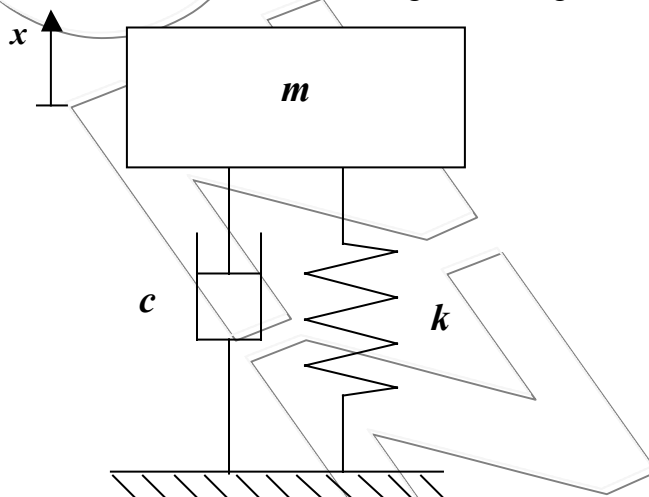
In sostanza, le più generiche equazioni di moto a cui un sistema con un solo grado di libertà potrebbe essere ricondotto sono del tipo:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + f(t);$$

Dallo studio delle soluzioni delle precedenti equazioni differenziali lineari possono essere determinati il comportamento libero (se $f(t)=0$) ovvero quello forzato (se $f(t)\neq 0$) di un qualsiasi sistema con un solo grado di libertà.

10.5.1. Comportamento libero di un sistema con 1 GdL con smorzamento viscoso

Un sistema di tale tipo può essere schematizzato attraverso il seguente disegno:



Un corpo rigido di massa m è collegato a un basamento fisso tramite una molla di costante di rigidità k e uno smorzatore viscoso di costante c . Il corpo rigido può solo compiere traslazioni nella direzione verticale per cui, per descriverne il moto, si sceglie di utilizzare un sistema di riferimento inerziale monoassiale x , rivolto verso l’alto, e con origine in corrispondenza del baricentro del corpo nella posizione di equilibrio del sistema, supposta nota.

In questo caso, poiché non sono presenti forzanti e uno degli estremi sia dello smorzatore che della molla sono fissi (al basamento), l’equazione che regola le vibrazioni del sistema è:

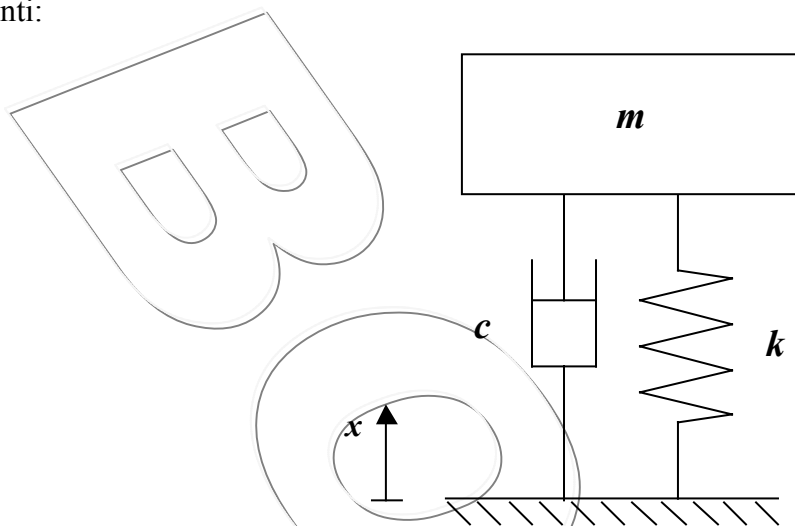
$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}, \text{ ovvero } m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$

Prima osservazione: è chiaro che la soluzione $x(t)=0$ soddisfa l’equazione differenziale, il che giustifica il fatto, noto a tutti, che un corpo non sottoposto ad alcuna forzante può rimanere fermo nella sua posizione di equilibrio.

Tuttavia vedremo che questa non è l’unica soluzione possibile, in quanto non è detto che all’istante iniziale (per $t=0$) il corpo si trovi nella posizione di equilibrio ($x=0$) e con velocità nulla ($\dot{x}=0$). Se infatti la posizione iniziale oppure la velocità sono non nulle, è evidente che il sistema si muoverà, tendendo peraltro a ritornare sempre nella sua posizione di equilibrio.

Il modo con cui il sistema, ovvero il corpo di massa m , cercherà di ritornare nella sua posizione di equilibrio, sarà completamente individuato attraverso lo studio dell'equazione differenziale lineare $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$.

Seconda osservazione: qualora il sistema di riferimento non avesse origine in corrispondenza del baricentro del corpo rigido, e qualora la posizione di equilibrio statico del sistema (sotto l'azione del solo peso) non fosse a priori nota, le equazioni del sistema ed il relativo schema potrebbero essere le seguenti:



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x - x_0) = -mg$$

con x_0 lunghezza a riposo della molla e g accelerazione di gravità.

Con una piccola trasformazione algebrica si ottiene la seguente equazione:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -mg + kx_0,$$

il cui primo membro è esattamente identico alla equazione precedente, mentre al secondo membro l'equazione presenta un termine forzante costante. E' noto a tutti che la soluzione di una equazione differenziale completa è sostituita dalla somma delle infinite soluzioni della equazione omogenea ($m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$), la stessa che si sarebbe dovuta risolvere con il sistema di riferimento baricentrico e trascurando la forza peso), con una unica soluzione dell'equazione completa ($m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -mg + kx_0$).

E' altresì evidente che la soluzione

$$x(t) = x_0 - \frac{mg}{k} = \text{costante}$$

soddisfa perfettamente l'equazione differenziale (si osservi che se $x(t) = \text{costante}$ allora $\ddot{x} = \dot{x} = 0$).

Da ciò si evince che, considerando un sistema di riferimento generico e non trascurando la forza peso (e come questa, tutte le forze costanti), si ottengono le stesse soluzioni che avremmo potuto trovare con un riferimento baricentrico e trascurando la forza peso, a meno di una costante additiva.

Tale termine costante (un termine che quindi non viene generalmente tenuto in considerazione nello studio dinamico del sistema), altro non è che la posizione di equilibrio del sistema sottoposto alla forza peso. In pratica tale termine ci dice che le vibrazioni del punto in cui si connettono massa e molla, avverranno nell'intorno di una posizione posta di mg/k metri al di sotto della posizione in cui si troverebbe lo stesso punto della molla in condizioni di assenza di peso (in condizioni di riposo).

La grandezza mg/k viene generalmente indicata come *deflessione statica della molla*. Tale grandezza si può trovare ancor più facilmente facendo riferimento alle equazioni della statica applicate alla molla, per cui devono farsi equilibrio la forza elastica generata dalla molla e la forza peso agente sulla stessa ($kx = mg$ da cui $x = mg/k$).

10.6. Moto libero

Per conoscere come si possa muovere un sistema con 1 GdL in assenza di forzanti, è sufficiente risolvere la semplice equazione differenziale ordinaria, del secondo ordine, omogenea.

L'equazione è dunque:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$

E' noto che se una funzione $x(t)$ è effettivamente una soluzione dell'equazione differenziale, questa, introdotta nell'equazione stessa insieme alle sue derivate, deve dar luogo ad una identità.

Dalle teoria delle equazioni differenziali ordinarie lineari e omogenee, risulta che tutte soluzioni dell'equazione omogenea sono una combinazione lineare secondo due costanti arbitrarie reali (che chiameremo A e B), delle due funzioni

$$x_1 = e^{\lambda_1 t} \text{ e } x_2 = e^{\lambda_2 t}$$

quindi

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t},$$

in cui λ_1 e λ_2 sono le due soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0^{19}.$$

Sfruttando le ben note formule risolutive si ha che:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk}.$$

A questo punto si presentano 3 possibilità in funzione del valore del radicando ($c^2 - 4mk$).

Primo caso: $c^2 - 4mk = 0$

In questo caso, assai difficile da realizzarsi nella pratica, è utile da analizzare solo per via del suo "carattere di confine". In tale caso si ha che vi è due radici reali coincidenti (una unica radice reale doppia), peraltro negative, che valgono:

$$\lambda = -\frac{c}{2m}.$$

In questo caso quindi la soluzione generale è

$$x(t) = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}$$

con A e B costanti arbitrarie (che saranno determinate solo tramite le condizioni iniziali).

Poiché λ è negativa la soluzione è una funzione monotona decrescente (essendo somma di due funzioni esponenziali negative). Si può quindi concludere che il moto libero di un sistema con smorzamento viscoso per cui $c^2 = 4mk$ è un transitorio aperiodico: il sistema quindi tende a ritornare nella sua posizione di equilibrio senza alcuna oscillazione.

La costante di smorzamento viscoso c che determina, a parità di massa e rigidità, una soluzione di tale tipo viene detta costante di *smorzamento critico* del sistema. Risulta quindi:

$$c_c = 2\sqrt{km}.$$

Secondo caso: $c^2 - 4mk > 0$

In questo caso, che si verifica quindi quando lo smorzamento del sistema è elevato, ovvero maggiore dello *smorzamento critico*, si ha che l'equazione caratteristica ammette due soluzioni reali negative in quanto risulta sempre:

$$c > \sqrt{c^2 - 4mk}.$$

In questo caso quindi la soluzione generale è:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

¹⁹ In effetti se l'equazione caratteristica ha una soluzione doppia ($\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$), la soluzione generale è una combinazione delle due funzioni $x_1 = e^{\lambda t}$ e $x_2 = te^{\lambda t}$.

con A e B costanti arbitrarie.

Poiché entrambe le funzione esponenziali sono negative, la soluzione totale è ancora una volta una funzione monotona decrescente. Anche in questo caso si può concludere che il moto libero di un sistema con smorzamento viscoso per cui $c^2 > 4mk$ è un transitorio aperiodico: il sistema quindi tende a ritornare nella sua posizione di equilibrio senza alcuna oscillazione.

Terzo caso: $c^2 - 4mk < 0$

In questo caso, che si verifica quindi quando lo smorzamento del sistema è limitato, ovvero inferiore dello *smorzamento critico*, si ha che l'equazione caratteristica non ammette soluzioni reali. Tuttavia, introducendo i numeri complessi, e in particolare l'unità immaginaria i , è possibile scrivere

$$\sqrt{c^2 - 4mk} = \sqrt{-1 \cdot (4mk - c^2)} = \sqrt{-1} \sqrt{(4mk - c^2)} = i \sqrt{(4mk - c^2)},$$

espressione in cui il radicando risulta positivo, ed è quindi possibile calcolarne la radice quadrata.

In questo caso quindi le soluzioni dell'equazione caratteristica risultano:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk} = -\frac{c}{2m} \pm i \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2}$$

In questo caso quindi la soluzione generale è:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{\left(-\frac{c}{2m} + i \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2}\right)t} + Be^{\left(-\frac{c}{2m} - i \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2}\right)t}$$

con A e B costanti arbitrarie.

La soluzione, con facili passaggi, può quindi essere riscritta come:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} \cdot \left[Ae^{\left(i \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2}\right)t} + Be^{-\left(i \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2}\right)t} \right].$$

La parte dell'ultimo membro tra parentesi quadre, sfruttando formulazioni simili alle Formule di Eulero²⁰ (in cui si ricade direttamente se $A=B$), può essere inoltre riscritta nella seguente forma:

$$\left[Ae^{\left(i \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2}\right)t} + Be^{-\left(i \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2}\right)t} \right] = X_0 \sin\left(\frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2} t + \varphi\right),$$

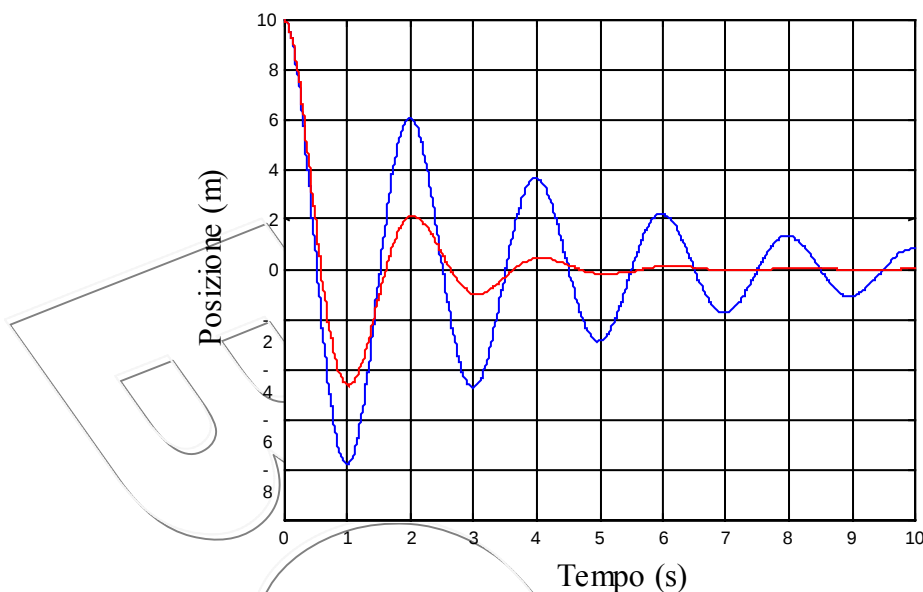
in cui le due costanti X_0 e φ dipendono esclusivamente dalle due costanti arbitrarie A e B , e quindi sono arbitrarie anch'esse. Naturalmente tali costanti potranno essere determinate con la conoscenza delle condizioni iniziali (posizione e velocità della massa nell'istante $t=0$).

A questo punto la soluzione generale dell'equazione differenziale può essere espressa nella sua forma definitiva:

$$x(t) = X_0 e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} \cdot \sin\left(\frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2} t + \varphi\right),$$

in cui, si può notare, sono scomparsi i numeri complessi, utilizzati solo come strumento per la risoluzione dell'equazione differenziale.

²⁰ Vedi modulo di Analisi Armonica.



Dalla forma matematica della soluzione si possono quindi trarre le seguenti conclusioni:

- Il moto libero è un moto oscillatorio smorzato;
- L'ampiezza delle oscillazioni, determinata dal termine $X_0 e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}$, è decrescente con il tempo in dipendenza dalla massa e dallo smorzamento del sistema. Poiché l'ampiezza tende a zero con il tempo, si evince che il sistema compie oscillazioni smorzate (che diminuiscono di ampiezza con il tempo) nell'intorno della posizione di equilibrio;
- Mentre l'ampiezza e la fase delle oscillazioni dipendono dalle condizioni iniziali, la pulsazione del moto libero è una costante dipendente unicamente dalle caratteristiche del sistema. Essa prende il nome di **pulsazione propria** del sistema:

$$\omega_p = \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2} = \sqrt{\frac{4mk}{4m^2} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{c^2}{4mk}\right)} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{4km}}.$$

Si osservi appena che è evidente che la soluzione per cui $X_0=0$ (derivante dal caso in cui $A=B=0$) soddisfa l'equazione; questa soluzione, detta *soluzione banale*, ci conferma il fatto, di comune esperienza, che un sistema non sottoposto a forze può rimanere fermo.

10.6.1. Parametri adimensionali

Le forme precedentemente introdotte per determinare il valore della pulsazione propria, apparentemente inutilmente complesse, risultano tuttavia utili se si desidera riscrivere le caratteristiche del moto in funzione dei cosiddetti **parametri adimensionali**²¹ del sistema vibrante. Si definiscono infatti:

1. la *pulsazione naturale*, indicata con ω_n , e che assume il valore $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$;
2. il *fattore di smorzamento viscoso*, indicato con ξ , che assume il valore di $\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$.

La *pulsazione naturale* è un numero (dotato di dimensioni fisiche) dipendente esclusivamente dalla massa e dalla rigidità del sistema. Se proprio si vuole attribuire a questo numero un significato fisico, e lo si dimostrerà nel seguito, si può dire che la pulsazione propria di un sistema è pari alla

²¹ In effetti la pulsazione naturale ω_n non è rigorosamente adimensionale (ha dimensioni dell'inverso di un tempo), ma tale denominazione ha una origine puramente storica.

pulsazione propria (e anche alla *pulsazione di risonanza*, che verrà introdotta nel seguito) di un sistema simile a quello preso in esame, ma privo di smorzamento ($c=0$).

Il *fattore di smorzamento viscoso*, come risulta evidente dalla stessa definizione, è un numero puro che indica il rapporto tra lo smorzamento effettivamente presente nel sistema, e quello critico. Se si ricorda il significato dello smorzamento critico, si evince che solo sistemi caratterizzati da un fattore di smorzamento viscoso minore di 1, sono caratterizzati da un comportamento libero di tipo oscillante.

Introducendo tali parametri (che sono apparentemente complessi, ma caratterizzano completamente il moto libero del sistema al pari delle costanti m , k e c , con il vantaggio di essere solo 2 invece di 3), la soluzione del moto libero del sistema può essere riscritta come:

$$x(t) = X_0 e^{-\xi \omega_n t} \cdot \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi);$$

e quindi la pulsazione propria varrà:

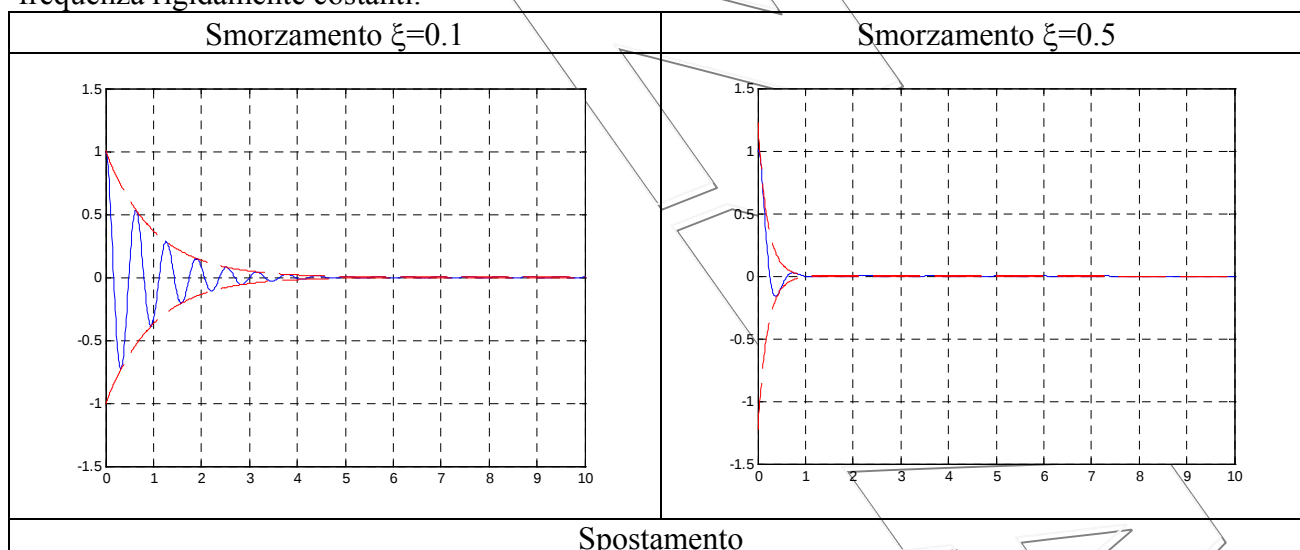
$$\omega_p = \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{4km}} = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Dalla precedente si può anche notare, come già anticipato in precedenza, che qualora il sistema sia privo di smorzamento (se $c=0$, allora è anche $\xi=0$), i valori numerici della pulsazione propria e della pulsazione naturale coincidono²².

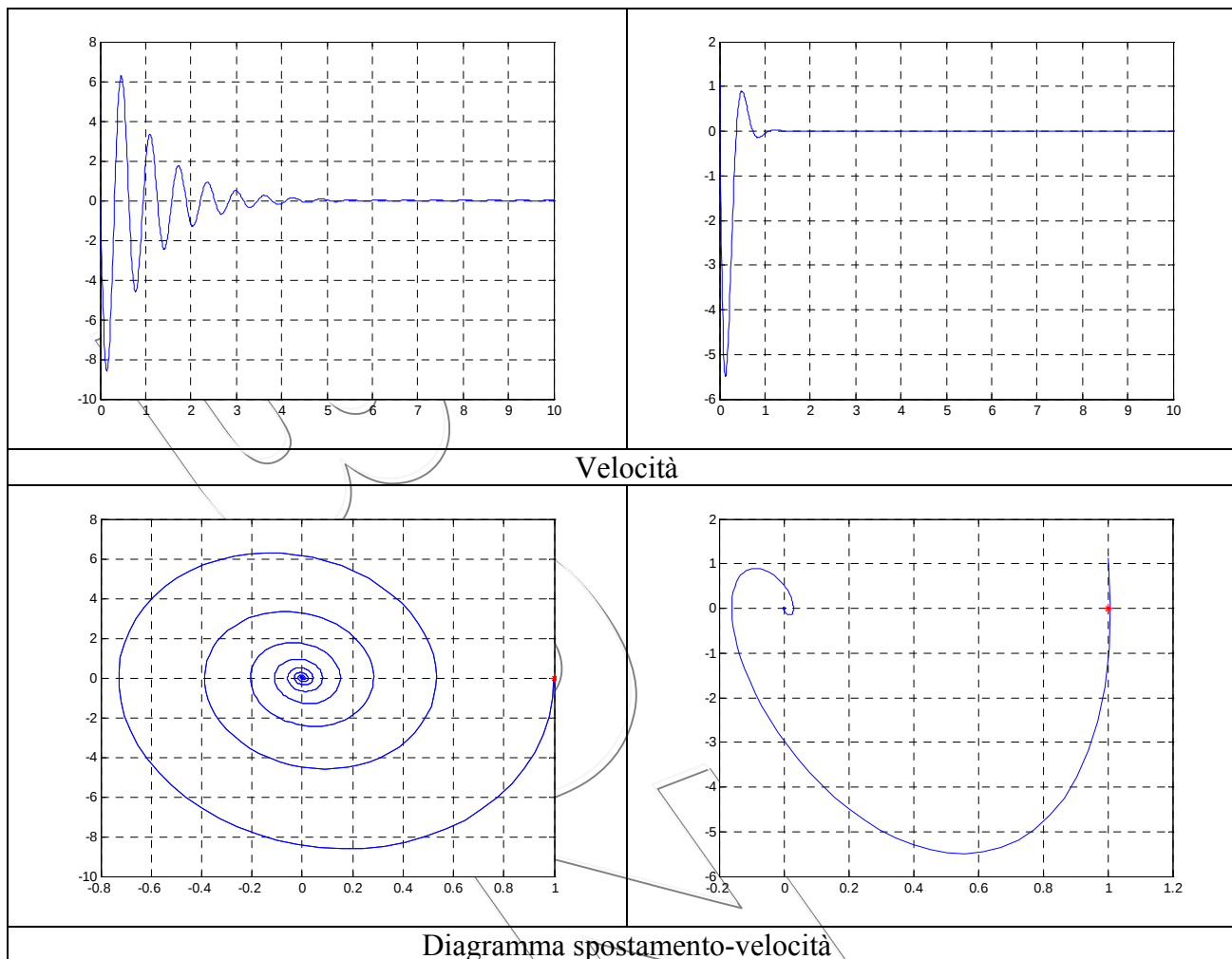
Sempre nel caso in cui il sistema fosse privo di smorzamento, allora la soluzione del moto libero del sistema è:

$$x(t) = X_0 \cdot \sin(\omega_n t + \varphi),$$

da cui si ritrova il fatto che, in assenza di forze smorzanti, un sistema spostato dalla sua posizione di equilibrio continuerà a vibrare all'infinito attorno a tale posizione, con vibrazioni ad ampiezza e frequenza rigidamente costanti.



²² Coincidono solo i valori numerici, ma non il significato: la pulsazione propria è una grandezza che caratterizza completamente il moto libero del sistema (è l'unica pulsazione a cui il sistema può vibrare). La pulsazione naturale è invece solo un valore numerico.



10.6.2. Decremento logaritmico

La conoscenza dello smorzamento è sempre il fattore più critico per la modellazione di un sistema meccanico: mentre per la misura (o la stima) della massa e della rigidità esistono più tecniche, e di elevata precisione, spesso la identificazione del valore dello smorzamento con un errore massimo del 10% (inaccettabile per masse e rigidità) costituisce un risultato più che soddisfacente.

Tramite l'analisi del comportamento libero del sistema, note che siano la sua massa e la rigidità, è possibile ottenere comunque una buona stima di tale valore.

Si considerino due massimi consecutivi della soluzione del moto libero. Tali massimi si avranno in corrispondenza degli istanti in cui il seno raggiunge il suo valore massimo, ovvero il valore unitario²³.

Se si suppone che il primo massimo si avrà in corrispondenza dell'istante t_1 , allora il secondo massimo si avrà in corrispondenza del tempo:

$$t_2 = t_1 + T = t_1 + \frac{2\pi}{\omega_p} = t_1 + \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

in cui T è il periodo dell'oscillazione libera.

L'ampiezza della oscillazione in tali istanti varrà allora:

$$x(t_1) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t_1};$$

²³ In realtà la presenza dell'esponenziale negativa comporta uno spostamento dei massimi verso sinistra, rispetto all'istante in cui il seno assume il valore unitario. Tuttavia tale spostamento è quasi sempre di entità trascurabile, ed è tanto più piccolo quanto minore è lo smorzamento del sistema.

$$x(t_2) = X_0 e^{-\xi \omega_n t_2} = X_0 e^{-\xi \omega_n (t_1 + T)} = X_0 e^{-\xi \omega_n t_1} e^{-\xi \omega_n T}.$$

Effettuando il logaritmo naturale del rapporto di tali due ampiezze si ottiene dunque:

$$\ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right) = \ln\left(\frac{X_0 e^{-\xi \omega_n t_1}}{X_0 e^{-\xi \omega_n t_1} e^{-\xi \omega_n T}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{-\xi \omega_n T}}\right) = \ln(e^{\xi \omega_n T}) = \xi \omega_n T = \xi \omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Il logaritmo del rapporto delle ampiezze delle vibrazioni in corrispondenza di due massimi successivi (appunto detto *decremento logaritmico*) è quindi dipendente esclusivamente dal fattore di smorzamento viscoso. Noto quindi il valore del decremento (da prove sperimentali), è possibile ricavare il fattore di smorzamento viscoso con la precisione desiderata attraverso tecniche di calcolo numerico. Una volta calcolato il fattore di smorzamento viscoso ξ , noti i valori della massa e della rigidità, è possibile ricavare il valore della costante di smorzamento viscoso c .

Tuttavia, se il lo smorzamento del sistema è relativamente basso, allora il termine $\sqrt{1-\xi^2}$ può essere confuso con l'unità²⁴; in tale caso è possibile ottenere una più semplice espressione dello smorzamento del sistema (anche se approssimata):

$$\ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cong 2\pi\xi \Rightarrow \xi \cong \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right) \Rightarrow c \cong \frac{\sqrt{km}}{\pi} \ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right).$$

La misura del valore del decremento logaritmico semplice (rapporto delle ampiezze delle vibrazioni in corrispondenza di due massimi successivi) nei sistemi con poco smorzamento spesso è affetta da un notevole imprecisione. Infatti se il sistema è poco smorzato le ampiezze delle vibrazioni in corrispondenza di due massimi successivi sono molto simili tra loro, e gli errori che inevitabilmente si commettono quando si vanno ad effettuare le misure possono influenzare pesantemente il risultato.

In questo caso, invece di considerare due massimi successivi, è sufficiente considerare un punto di massimo in corrispondenza dell'istante t_1 , e un altro massimo in corrispondenza dell'istante t_n distanziato dal primo di n periodi. Il numero n che può ritenersi ottimale varia da caso a caso, ma per essere sicuri che gli errori di misura delle ampiezze non influenzino troppo il risultato, il rapporto $x(t_1)/x(t_n)$ dovrebbe essere decisamente superiore all'unità (già un valore pari a 3 è comunque più che soddisfacente).

In questo caso si avrà quindi che:

$$x(t_n) = X_0 e^{-\xi \omega_n t_n} = X_0 e^{-\xi \omega_n (t_1 + nT)} = X_0 e^{-\xi \omega_n t_1} e^{-\xi \omega_n nT};$$

ed anche:

$$\ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_n)}\right) = \ln\left(\frac{X_0 e^{-\xi \omega_n t_1}}{X_0 e^{-\xi \omega_n t_1} e^{-\xi \omega_n nT}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{-\xi \omega_n nT}}\right) = \ln(e^{\xi \omega_n nT}) = \xi \omega_n nT = \xi \omega_n n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi n \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

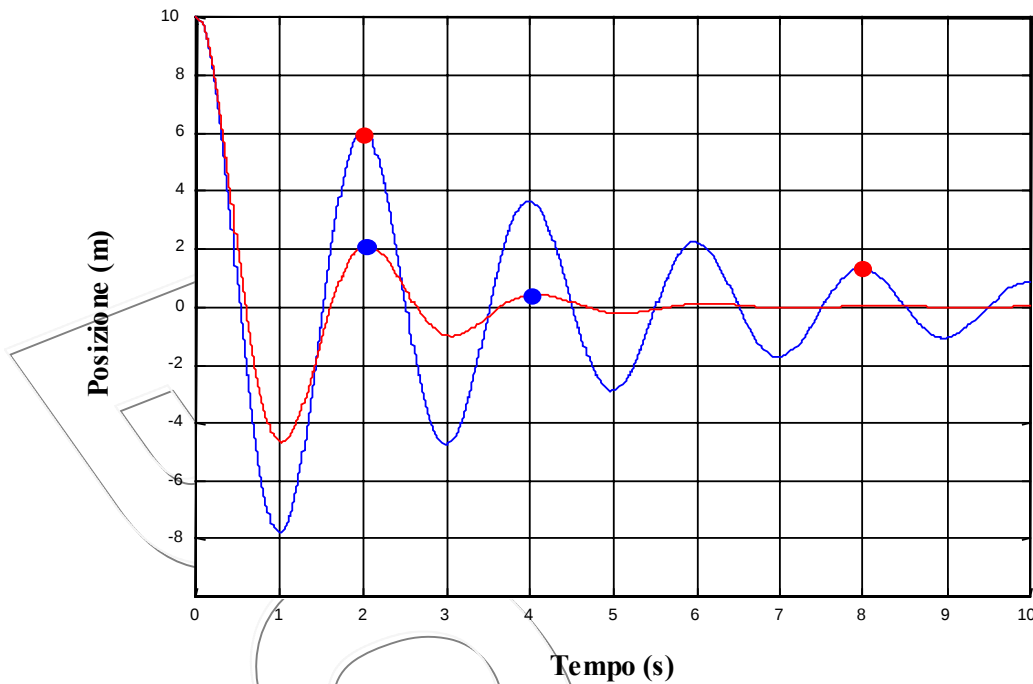
Naturalmente anche in questo caso, se lo smorzamento è sufficientemente basso, si avrà anche la formulazione approssimata:

$$\ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_n)}\right) = \frac{2\pi n \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cong 2\pi n \xi \Rightarrow \xi \cong \frac{1}{2\pi n} \ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_n)}\right) \Rightarrow c \cong \frac{\sqrt{km}}{n\pi} \ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_n)}\right).$$

²⁴ Sistemi meccanici con fattori di smorzamento pari a 0.2-0.3, sono di solito considerati notevolmente smorzati. Anche in questi casi comunque tale approssimazione è ampiamente giustificata infatti:

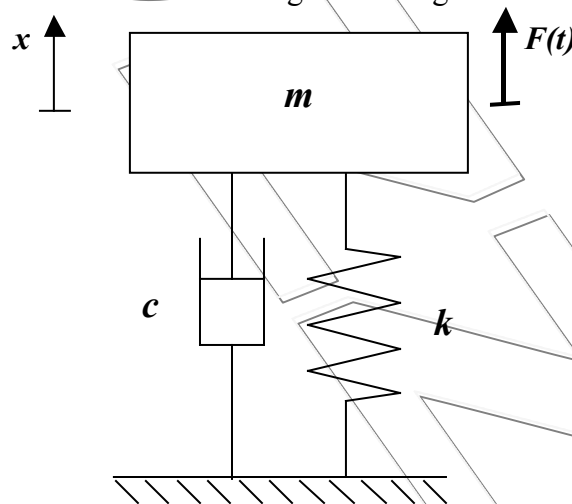
per $\xi=0.2$ $\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-0.2^2} = \sqrt{1-0.04} = \sqrt{0.96} = 0.9798$ (errore del 2.02 %)

per $\xi=0.3$ $\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-0.3^2} = \sqrt{1-0.09} = \sqrt{0.91} = 0.9539$ (errore del 4.61 %)



10.7. Moto forzato

Un sistema con un solo grado di libertà con smorzamento viscoso su cui agisce una forzante di tipo armonico può essere schematizzato attraverso il seguente disegno:



Un corpo rigido di massa m è collegato a un basamento fisso tramite una molla di costante di rigidità k e uno smorzatore viscoso di costante c . Il corpo rigido può solo compiere traslazioni nella direzione verticale e si sceglie di utilizzare un sistema di riferimento inerziale monoassiale x , rivolto verso l'alto, e con origine in corrispondenza del baricentro del corpo nella posizione di equilibrio del sistema.

In questo caso è presente una forzante armonica che supporremo di pulsazione generica ω e ampiezza generica F_0 . A seconda che si vogliano utilizzare i numeri complessi (la notazione esponenziale) oppure ci si voglia limitare ai numeri reali, la forzante può essere espressa nelle due forme seguenti:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t);$$

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t}.$$

In ogni caso, poiché il basamento è fisso, l'equazione che regola le vibrazioni del sistema è:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F(t), \text{ ovvero } m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t).$$

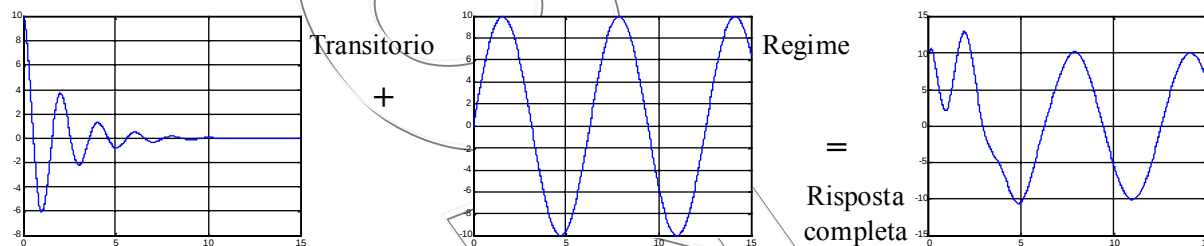
E' noto comunque che tutte le soluzioni di una equazione differenziale completa si ottengono sommando a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata, una qualsiasi soluzione della equazione completa.

Per quanto concerne l'equazione omogenea associata, ovvero:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0,$$

le sue soluzioni sono già state studiate in precedenza, laddove si è ricercato il comportamento libero del sistema. In tale occasione si è visto che le vibrazioni che soddisfano la precedente equazione sono smorzate; queste quindi (ad eccezione del caso in cui non vi sia alcuno smorzamento), in un tempo più o meno lungo tendono ad annullarsi. E' proprio per tale motivo che tale parte della soluzione del sistema forzato viene chiamata *soluzione di transitorio*, o più semplicemente **transitorio**.

Da quanto detto in precedenza si ha che nei primi istanti del moto del sistema, le vibrazioni sono ottenibili come somma del transitorio e della soluzione particolare. Con il passare del tempo il transitorio tende ad estinguersi, e quindi dopo un certo periodo (in dipendenza dallo smorzamento) le vibrazioni forzate sono costituite esclusivamente dalla soluzione particolare. Tale soluzione permarrà inalterata, senza estinguersi, finché non intervengano variazioni della forzante. Per tali motivi la soluzione particolare dell'equazione di moto costituisce il **comportamento a regime** del sistema.



Da adesso in poi quando si parlerà di *comportamento forzato*, si farà implicito riferimento al solo al *comportamento a regime*. Tuttavia deve sempre essere tenuto in mente la sottile differenza concettuale tra queste due espressioni, che si può evidenziare - anche in maniera eclatante - nei primi istanti di moto del sistema.

10.7.1. Moto forzato del sistema senza l'utilizzo dei numeri complessi

Per far comprendere l'utilità dell'utilizzo della notazione complessa (fasoriale), si ritiene interessante mostrare i passi che dovrebbero essere compiuti per risolvere con il metodo classico la semplice equazione differenziale ordinaria, del secondo ordine, che regola il moto forzato di un sistema ad 1 GdL con smorzamento viscoso.

L'equazione è dunque:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t).$$

E' noto che se una funzione $x(t)$ è effettivamente una soluzione dell'equazione differenziale, questa, introdotta nell'equazione stessa insieme alle sue derivate, deve dar luogo ad una identità.

Poiché la forzante è una funzione armonica con pulsazione ω , anche sfruttando le proprietà di linearità del sistema, è facile comprendere come si possa ragionevolmente supporre che anche le vibrazioni del sistema saranno armoniche alla medesima frequenza, ma probabilmente sfasate rispetto alla forzante a causa della presenza dello smorzamento.

Quindi non resta che verificare le condizioni per cui una funzione $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$ risulti effettivamente soluzione della equazione differenziale. Sulla base di queste considerazioni sarà possibile determinare l'ampiezza delle vibrazioni e lo sfasamento rispetto alla forzante, ovvero le 2 costanti X_0 e ϕ .

In ogni caso, se $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$ fosse effettivamente soluzione del sistema, risulterebbero anche:

$$\dot{x}(t) = -\omega X_0 \sin(\omega t + \phi) \quad ;$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 X_0 \cos(\omega t + \phi) .$$

Inserendo e precedenti all'interno dell'equazione differenziale si ha quindi:

$$m(-\omega^2 X_0 \cos(\omega t + \phi)) + c(-\omega X_0 \sin(\omega t + \phi)) + k(X_0 \cos(\omega t + \phi)) = F_0 \cos(\omega t) ,$$

ovvero

$$X_0((- \omega^2 m + k) \cdot \cos(\omega t + \phi) - \omega c \cdot \sin(\omega t + \phi)) = F_0 \cos(\omega t)$$

E' a questo punto necessario investigare le condizioni su X_0 e ϕ che rendono la precedente equazione verificata in ogni istante.

Per fare ciò è necessario ricorrere alle formule che esprimono il seno e coseno della somma degli angoli in funzione degli angoli stessi:

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t) \cdot \cos(\phi) - \sin(\omega t) \cdot \sin(\phi) ;$$

$$\sin(\omega t + \phi) = \sin(\omega t) \cdot \cos(\phi) + \cos(\omega t) \cdot \sin(\phi) .$$

Da queste si ottiene:

$$\begin{aligned} (-\omega^2 m + k) \cdot (\cos(\omega t) \cdot \cos(\phi) - \sin(\omega t) \cdot \sin(\phi)) - \omega c \cdot (\sin(\omega t) \cdot \cos(\phi) + \cos(\omega t) \cdot \sin(\phi)) = \\ = \frac{F_0}{X_0} \cos(\omega t); \end{aligned}$$

ovvero:

$$\left[(-\omega^2 m + k) \cos(\phi) - \omega c \cdot \sin(\phi) - \frac{F_0}{X_0} \right] \cdot \cos(\omega t) - \left[(-\omega^2 m + k) \cdot \sin(\phi) + \omega c \cdot \cos(\phi) \right] \sin(\omega t) = 0 .$$

Dalla precedente, per ottenere una identità ($\forall t$), si ricava:

$$\begin{cases} (-\omega^2 m + k) \cos(\phi) - \omega c \cdot \sin(\phi) = \frac{F_0}{X_0} \\ (-\omega^2 m + k) \cdot \sin(\phi) + \omega c \cdot \cos(\phi) = 0 \end{cases} ;$$

quadrando e sommando membro a membro si ottiene:

$$(-\omega^2 m + k)^2 + (\omega c)^2 = \left(\frac{F_0}{X_0} \right)^2 .$$

Effettuando infine la radice quadrata della relazione precedente si ottiene:

$$X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(-\omega^2 m + k)^2 + (\omega c)^2}} ;$$

ovvero una relazione che permette di conoscere l'ampiezza delle oscillazioni in funzione delle caratteristiche del sistema e dell'ampiezza e pulsazione della forzante.

Deve tuttavia essere individuata anche la fase ϕ delle oscillazioni. Utilizzando soltanto la seconda equazione del sistema si potrebbe ottenere direttamente:

$$\tan(\phi) = -\frac{\omega c}{k - \omega^2 m} \Rightarrow \phi = \arctan\left(-\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right) .$$

Tuttavia si ricordi che la funzione tangente è periodica di π , ciò significa che il valore dello sfasamento ϕ , utilizzando la precedente potrebbe essere individuato a meno di π , ovvero a meno del segno.

Per eliminare questa incertezza è necessario sfruttare entrambe le equazioni del sistema, ad esempio ricavando il coseno della fase (il coseno, a differenza della tangente, è periodica di 2π). Così facendo si otterrebbe:

$$\left[(-\omega^2 m + k) + \frac{\omega^2 c^2}{(-\omega^2 m + k)} \right] \cdot \cos(\phi) = \frac{F_0}{X_0} \Rightarrow \cos(\phi) = \frac{F_0}{X_0} \frac{(-\omega^2 m + k)}{(-\omega^2 m + k) + \omega^2 c^2}.$$

Sfruttando la precedente, da sola o associata a quella individuata in precedenza (la formula con il coseno potrebbe essere utilizzata solo per scegliere il segno di ϕ), è possibile determinare completamente modulo e fase delle vibrazioni del sistema.

10.7.2. Moto forzato del sistema con i numeri complessi

Anche in questo caso, sfruttando la linearità del sistema, è facile verificare che se la forzante è del tipo $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$, allora necessariamente per verificare identicamente l'equazione differenziale la soluzione dovrà essere del tipo $x(t) = X_0 e^{i\omega t}$ ²⁵. Ciò significa che le vibrazioni della massa dovranno avere la stessa pulsazione della forzante.

In ogni caso, se $x(t) = X_0 e^{i\omega t}$ è effettivamente la soluzione del sistema, risultano anche:

$$\dot{x}(t) = i\omega X_0 \cdot e^{i\omega t};$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 X_0 \cdot e^{i\omega t}.$$

Introducendo le precedenti nell'equazione differenziale si ottiene:

$$-m\omega^2 X_0 \cdot e^{i\omega t} + ic\omega X_0 \cdot e^{i\omega t} + kX_0 \cdot e^{i\omega t} = F_0 \cdot e^{i\omega t}$$

o anche:

$$[(-m\omega^2 + ic\omega + k)X_0 - F_0] \cdot e^{i\omega t} = 0.$$

Poiché la precedente deve essere verificata in ogni istante (visto anche che una funzione esponenziale non può mai annullarsi), allora dovrà essere:

$$(-m\omega^2 + ic\omega + k)X_0 - F_0 = 0;$$

ovvero anche:

$$X_0 = F_0 \frac{1}{(k - m\omega^2) + ic\omega}.$$

Si ottiene quindi che il modulo delle oscillazioni è direttamente proporzionale al modulo della forzante (come ci si doveva già aspettare vista la linearità del sistema); la costante di proporzionalità sarà data dal modulo della funzione fratta (complessa) a secondo membro. Anche la fase tra le oscillazioni e la forzante sarà ottenibile come la fase della stessa funzione complessa.

Sfruttandole proprietà dei numeri complessi si ha quindi che:

$$\begin{aligned} |X_0| &= \left| F_0 \frac{1}{(k - m\omega^2) + ic\omega} \right| = |F_0| \left| \frac{1}{(k - m\omega^2) + ic\omega} \right| = |F_0| \frac{1}{|(k - m\omega^2) + ic\omega|} = \\ &= |F_0| \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \\ \text{fase}(X_0) &= \text{fase} \left(F_0 \frac{1}{(k - m\omega^2) + ic\omega} \right) = \text{fase}(F_0) + \text{fase} \left(\frac{1}{(k - m\omega^2) + ic\omega} \right) = \\ &= \text{fase}(F_0) + \text{fase}(1) - \text{fase}((k - m\omega^2) + ic\omega) = \text{fase}(F_0) - \arctan \left(\frac{c\omega}{(k - m\omega^2)} \right) \end{aligned}$$

²⁵ In questo caso X_0 non è più necessariamente un numero reale, e quindi semplicemente l'ampiezza delle vibrazioni, ma può essere anche un numero complesso, dotato quindi di modulo (l'ampiezza delle vibrazioni) e fase (sfasamento delle vibrazioni rispetto alla forzante).

Se si suppone nulla la fase della forzante (e quindi F_0 è un numero reale positivo), si ha che $|F_0|=F_0$ e $\text{fase}(F_0)=0$, quindi le precedenti, ricavate con molta più facilità rispetto al caso in cui si sono utilizzati i soli numeri reali, forniscono gli stessi risultati trovati in precedenza.

10.8. Ricettanza

Da quanto visto sopra si è potuto dimostrare che, note le caratteristiche del sistema (m , k e c), e note anche quelle della forza armonica (F_0 e ω), è possibile trovare ampiezza e fase delle vibrazioni forzate (nella fase di comportamento a regime) tramite la seguente relazione:

$$X_0 = F_0 \frac{1}{(k - m\omega^2) + ic\omega}.$$

Dividendo entrambi i membri della precedente relazione per F_0 è possibile ottenere una *funzione complessa della variabile reale ω* che riveste una notevole importanza nello studio dei sistemi vibranti. Tale funzione, che rientra nella categoria più generale delle Funzioni di Risposta in Frequenza (FRFs - Frequency Response Functions) o anche delle Funzioni di Trasferimento (TFs - Transfer Functions), viene generalmente indicata con il simbolo $\alpha(\omega)$ e prende il nome di **Ricettanza** del sistema:

$$\alpha(\omega) = \frac{X_0}{F_0}(\omega) = \frac{1}{(k - m\omega^2) + ic\omega}.$$

Il significato fisico della ricettanza appare subito ovvio, infatti se si pensa di imporre al sistema vibrante una forzante armonica, di pulsazione generica ω e di modulo unitario ($F_0=1$), il modulo e la fase delle vibrazioni che ne conseguono nella fase di regime sono rappresentate infatti dalla ricettanza stessa.

L'utilità della ricettanza è ancora più evidente in quanto, sfruttando anche le proprietà di linearità, se sul sistema agisce una forza armonica di ampiezza F_0 e di pulsazione ω note, la ricettanza ci consente di trovare immediatamente la soluzione a regime del sistema, senza risolvere alcuna equazione differenziale.

L'ampiezza delle vibrazioni risultanti sarà pari a F_0 volte l'ampiezza della funzione di ricettanza calcolata in ω . Il modulo della ricettanza corrisponde infatti all'ampiezza delle vibrazioni se la forzante fosse unitaria, poiché quindi la forza effettivamente agente sul sistema è F_0 volte quella unitaria, anche le vibrazioni che ne conseguono sono F_0 volte quelle calcolate tramite la Ricettanza. La fase delle vibrazioni inoltre sarà semplicemente la fase della funzione di ricettanza calcolata in ω .

E tutto ciò qualunque siano F_0 e ω .

Inoltre, sfruttando in maniera più completa le proprietà di linearità del sistema, se la forzante $F(t)$ è di tipo generico (non necessariamente armonica), indicando con $F_0(\omega)$ la sua Trasformata di Fourier (o meglio, il suo contenuto in frequenza), allora si ha che effettuando semplicemente il prodotto tra la ricettanza e il contenuto in frequenza della forzante, si ottiene direttamente il contenuto in frequenza delle vibrazioni risultanti. In parole povere:

$$X_0(\omega) = \alpha(\omega)F_0(\omega).$$

Questa semplice operazione è in generale più che sufficiente ad un ingegnere per verificare la confidenza della risposta di un sistema meccanico alle specifiche di progetto. Se però interessasse la determinazione esatta dell'andamento temporale delle vibrazioni del sistema sottoposto alla forza generica $F(t)$, una volta ottenuto il contenuto in frequenza completo delle vibrazioni (in termini di modulo e fase, visto che $X_0(\omega)$ è una funzione complessa), è sufficiente effettuare l'AntiTrasformata di Fourier²⁶ per ottenere il risultato desiderato:

²⁶ Vedi modulo di Analisi Armonica.

$$X_0(\omega) \xrightarrow{F^{-1} \text{ (AntiTrasformata di Fourier)}} x(t).$$

Della ricettanza è possibile dare una formulazione che coinvolge i parametri dimensionali già precedentemente introdotti. Dividendo numeratore e denominatore per lo stesso numero k , si ottiene infatti con facili passaggi algebrici:

$$\alpha(\omega) = \frac{X_0}{F_0}(\omega) = \frac{\frac{1}{k}}{\left(1 - \frac{m}{k}\omega^2\right) + i\frac{c}{k}\omega} = \frac{1}{k} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + i2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}.$$

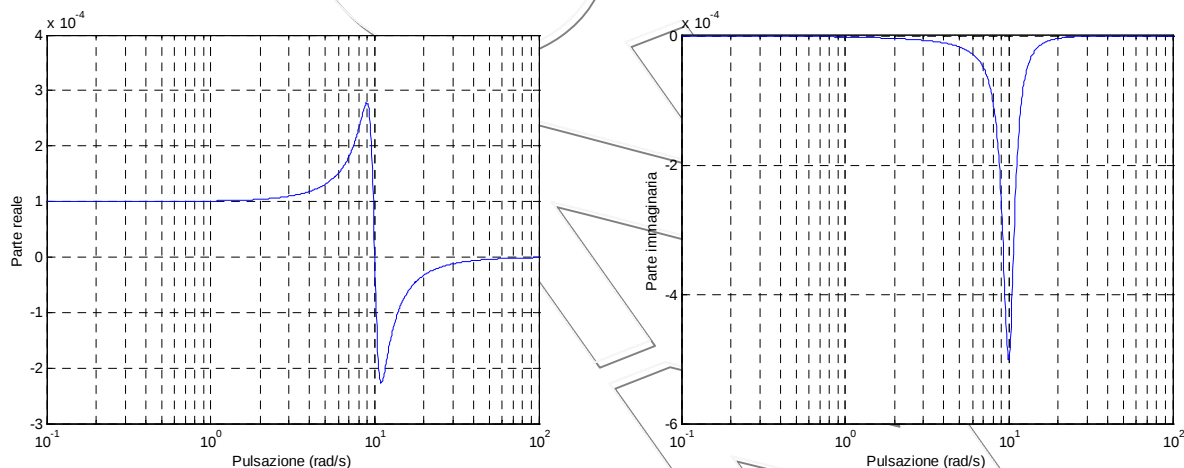
In pratica quindi la risposta del sistema dipende dalla rigidezza, dal fattore di smorzamento viscoso, e dal rapporto tra la pulsazione della forzante e la pulsazione naturale (ω/ω_n).

10.8.1. Rappresentazione della ricettanza

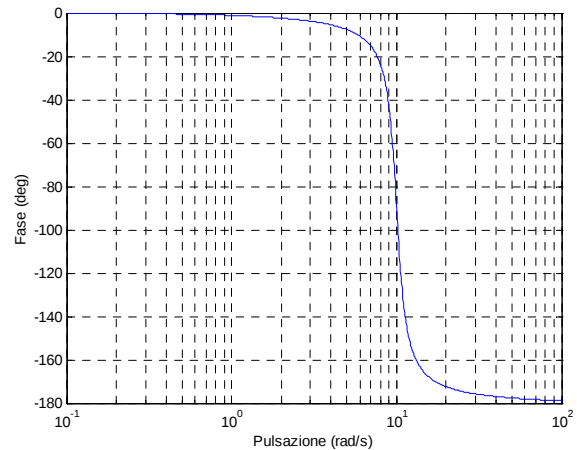
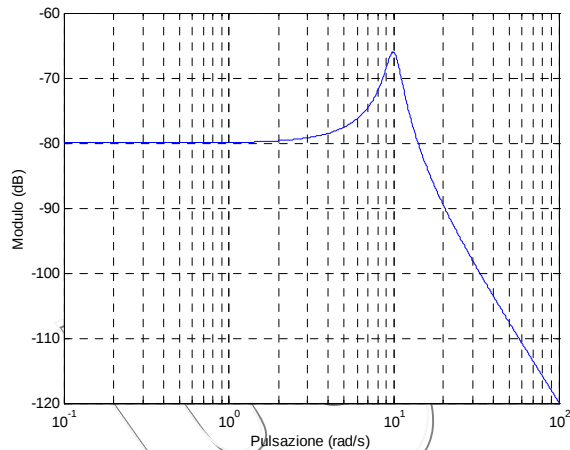
Ben più importante che fornire una formulazione analitica della ricettanza, è il fornirne una adeguata (e soprattutto chiara) rappresentazione grafica.

Poiché, come si è già detto, la ricettanza è una funzione complessa della variabile reale ω , se si vuole darne una *rappresentazione esplicita* (in grafici in cui compare esplicitamente la variabile indipendente ω) sono necessari almeno due grafici.

Per ottenere una possibile rappresentazione esplicita si potrebbero plottare in due grafici separati (e magari sovrapposti) la parte reale e quella immaginaria della ricettanza al variare di ω .



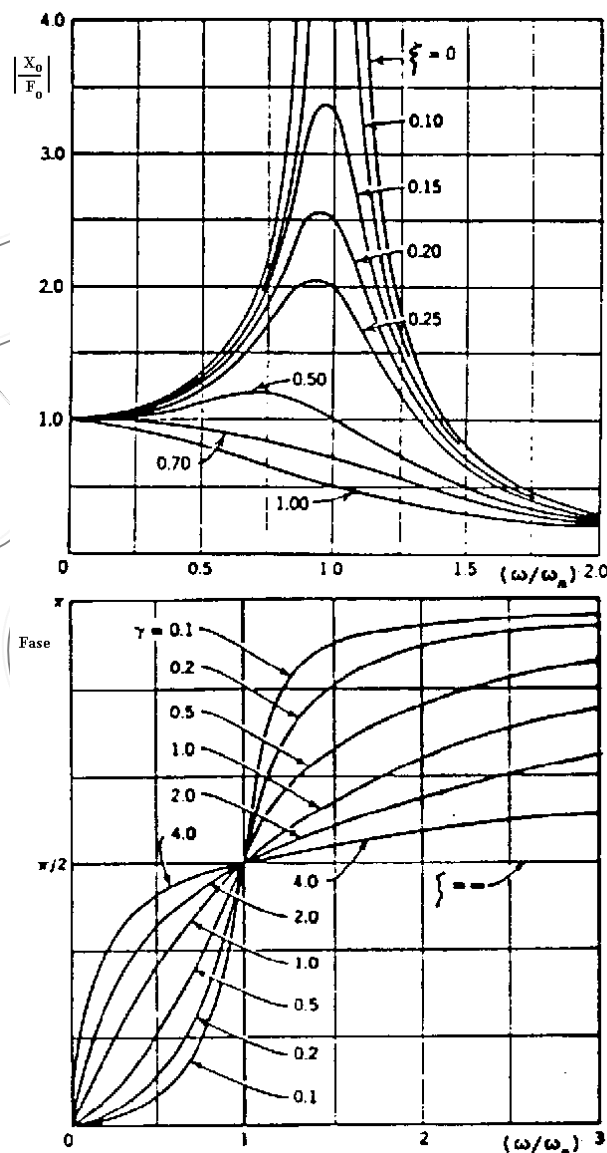
Tale rappresentazione è però assai di rado utilizzata in campo ingegneristico. Di solito si preferisce infatti rappresentare la ricettanza (e tutte le altre FRFs) plottandone su due grafici sovrapposti il modulo e la fase. Se poi si sceglie di rappresentare la variabile indipendente in scala logaritmica (in base 10) e il modulo della ricettanza in scala Decibel (dB – in pratica un logaritmo in base 1/20), allora tale rappresentazione viene detta **Diagramma di Bode**.



In alcuni testi più datati, sfruttando la notazione con i parametri dimensionali, e ponendo come variabile indipendente il rapporto (ω/ω_n) , si trovano degli interessanti Diagrammi di Bode della ricettanza (diagrammata a meno del fattore moltiplicativo $1/k$). Questi grafici, sono interessanti perché ci mostrano come a meno della costante $1/k$, e in funzione del rapporto (ω/ω_n) , tutti i Diagrammi di Bode della ricettanza di tutti i sistemi con 1 GdL e smorzamento viscoso, dipendono unicamente dal parametro di smorzamento viscoso.

In teoria quindi basta sapere la rigidità del sistema, il suo smorzamento (adimensionale) ed avere sotto mano un unico Diagramma di Bode, per poter risolvere con un semplice righello e una calcolatrice un qualsiasi problema di dinamica di sistemi con un solo grado di libertà.

Ai tempi moderni la notevole diffusione degli strumenti informatici e di software specializzato permette di poter rapidamente tracciare il diagramma di Bode specifico per ogni possibile sistema meccanico (in Matlab basta una sola istruzione), ma questi diagrammi rivestono ancora una notevole importanza didattica.



10.9. Strumenti sismici

Per capire l'effettivo utilizzo delle Funzioni di Risposta in Frequenza, seguono alcuni esempi di applicazioni che possono fornire le linee guida per la realizzazione di strumenti di misura di spostamenti e accelerazioni e per una valutazione dell'efficacia delle sospensioni.

Prima di parlare più in dettaglio delle prime applicazioni è necessario premettere la definizione di "strumento di misura":

Se si indica con *ingresso* il valore della grandezza da misurare (spostamenti, velocità, temperatura, differenza di potenziale, ecc...), e con *uscita* la grandezza che si va a leggere per determinare il valore numerico della grandezza misurata (la posizione angolare della lancetta del contachilometri, l'altezza del mercurio in un termometro, il tracciato di un grafico su carta, ecc...), uno *strumento di misura perfetto* è quello strumento che assicura una relazione di perfetta *proporzionalità tra ingresso e uscita*.

Ovvero anche in termini numerici:

$$u(t) = k \cdot i(t), \text{ ovvero anche } \frac{u(t)}{i(t)} = k \quad \text{o} \quad \frac{i(t)}{u(t)} = \frac{1}{k} = k'.$$

La stessa costanza del rapporto tra ingresso e uscita deve valere naturalmente anche nel dominio delle frequenze (ovvero $I(\omega)/U(\omega) = 0$).

A esempio, ad ogni cm di innalzamento del livello di mercurio corrisponde un aumento della temperatura di 1°C , per cui se ci sono 20°C la colonna di mercurio è alta 20 cm, se ci sono 30°C la colonna di mercurio è alta 30 cm, se ci sono 40°C (il doppio di 20°C) la colonna di mercurio è alta 40 cm (il doppio della altezza del mercurio quando c'erano 20°C).

$$\frac{i(t)}{u(t)} = \frac{20^{\circ}\text{C}}{20\text{cm}} = \frac{30^{\circ}\text{C}}{30\text{cm}} = \frac{40^{\circ}\text{C}}{40\text{cm}} = 1 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{cm}}.$$

In pratica, misurando (anche visivamente tramite l'aiuto di scale graduate) la grandezza di uscita e moltiplicandola per la costante precedentemente individuata (compresa di unità di misura) si ottiene il valore la grandezza che si vuole misurare. La costante si chiama *sensibilità* dello strumento.

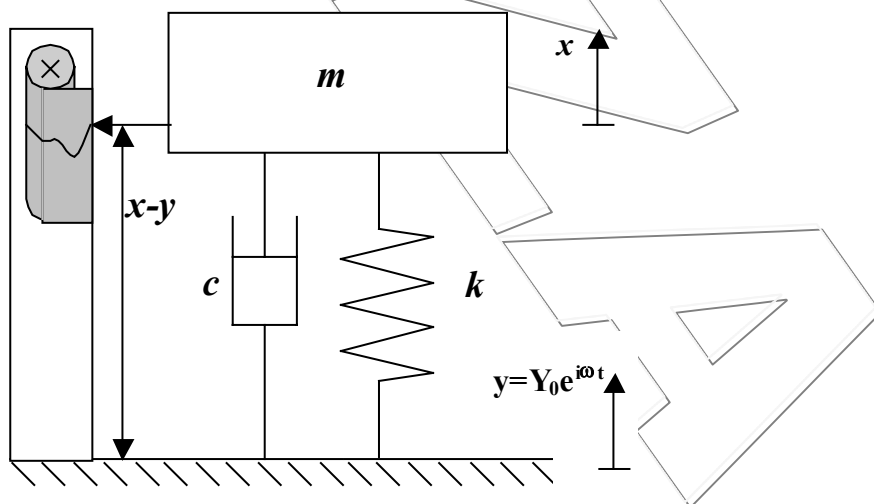
Praticamente nessuno strumento può soddisfare perfettamente questa relazione, sia al variare del valore della grandezza da misurare, sia al variare del contenuto in frequenza di quest'ultima.

Tuttavia vi sono delle considerazioni che ci permettono di sapere *in che condizioni* uno strumento può considerarsi uno strumento di misura (ammettendo un errore massimo), o anche di *scegliere* (o di dimensionare) lo strumento giusto a seconda di cosa si vuole misurare.

Uno strumento sismico può essere modellato come un semplice sistema massa-molla-smorzatore viscoso; tale sistema è fissato ad un basamento mobile. Sono proprio le caratteristiche del moto del basamento le grandezze di ingresso dello strumento (di solito spostamento e accelerazione). La grandezza di uscita è il grafico lasciato da un pennino solidale alla massa su un nastro di carta che scorre su un supporto solidale al basamento.

La grandezza di uscita è dunque la differenza $(x-y)$, ovvero il grafico che riporta gli spostamenti (relativo) della massa rispetto al basamento.

Se ci si ripropone di misurare l'ampiezza delle vibrazioni del terreno, allora si intende dimensionare (ovvero scegliere opportunamente m , k e c) lo strumento sismico affinché funzioni come un sismografo. Se invece l'intenzione è quella di misurare l'accelerazione del basamento, allora lo strumento si chiamerà accelerometro. Si vedrà che con lo stesso modello matematico, ma per diversi valori delle costanti del sistema, si può dimensionare sia un sismografo che un accelerometro, ma il loro funzionamento sarà ottimale solo per ingressi caratterizzati da particolari contenuti in frequenza. Inoltre, dalle stesse applicazioni, appariranno chiari i limiti della realizzazione pratica di strumenti di tale tipo; tuttavia i risultati di tali analisi saranno importanti per la realizzazione di strumenti che lavorano con principi di funzionamento diversi (es. piezoelettrici), ma con le medesime caratteristiche meccaniche.



...

Per dimensionare uno strumento sismico affinché funzioni da sismografo si avrà che l'ingresso del sistema sarà lo spostamento del basamento y , mentre l'uscita sarà il grafico su carta $(x-y)$. Come spostamenti si considerano solo funzioni armoniche, in quanto è comunque possibile scomporre il generico tipo di spostamento in somme o integrali di spostamenti armonici, e sfruttando le proprietà di linearità del sistema trovare così la soluzione.

Per determinare le equazioni di moto del sistema, poiché il basamento si muove, basta osservare che le forze esercitate da molla e smorzatore dipendono dalla loro deformazione $(x-y)$ e velocità di deformazione $(\dot{x}-\dot{y})$. Si ha quindi che:

$$m\ddot{x} = -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y});$$

Si noti che, anche in questo caso l'equazione è lineare.

Da quanto detto in precedenza si dovrà verificare quando la seguente relazione:

$$\frac{I_0}{U_0}(\omega) = \frac{I_0 e^{i\omega t}}{U_0 e^{i\omega t}} = \frac{i(t)}{u(t)} = \frac{y(t)}{(x-y)(t)} = \frac{Y_0 e^{i\omega t}}{(X_0(\omega) e^{i\omega t} - Y_0 e^{i\omega t})} = \frac{Y_0}{(X_0(\omega) - Y_0)} e^{i\omega t} = \frac{Y_0}{(X_0 - Y_0)}(\omega).$$

Si ha infatti che se $y(t)=i(t)$ è una funzione armonica di pulsazione ω , per la linearità del sistema anche $x(t)$ dovrà essere armonica alla stessa frequenza (l'ampiezza delle oscillazioni assolute della massa naturalmente sarà funzione della pulsazione ω), e così pure l'uscita $u(t)$, essendo somma di due funzioni armoniche alla medesima frequenza.

Inserendo nell'equazione di moto le ipotesi sugli spostamenti si ha che:

$$-\omega^2 m X_0 e^{i\omega t} = -k(X_0 - Y_0) e^{i\omega t} - ic\omega(X_0 - Y_0) e^{i\omega t};$$

da cui si ha che la relazione seguente deve sempre essere verificata:

$$-\omega^2 m X_0 + ic\omega(X_0 - Y_0) + k(X_0 - Y_0) = 0.$$

Ma dalle precedenti risulta anche:

$$Y_0 = I_0, \quad U_0 = X_0 - Y_0 \rightarrow X_0 = U_0 + Y_0,$$

per cui la precedente relazione si può riscrivere come segue:

$$-\omega^2 m(U_0 + I_0) + ic\omega U_0 + kU_0 = 0.$$

Da cui seguono direttamente:

$$-\omega^2 m U_0 + ic\omega U_0 + kU_0 = \omega^2 m I_0;$$

$$\frac{U_0}{I_0}(\omega) = \frac{\omega^2 m}{-\omega^2 m + ic\omega + k} \quad \text{e} \quad \frac{I_0}{U_0}(\omega) = \frac{k - \omega^2 m + ic\omega}{\omega^2 m}.$$

Da questa relazione discende immediatamente che il rapporto tra ingresso e uscita dello strumento sismico non può mai essere costante, ma si rivela una funzione della pulsazione ω . Se quindi uno strumento così fatto non può essere un perfetto strumento di misura, è possibile trovare un campo di frequenze per cui il sistema si comporti praticamente come tale (con errori massimi controllabili, ad es. 1-2% della lettura). Inoltre, con la conoscenza delle precedenti relazioni, è anche possibile adattare tale intervallo di frequenze, che viene detto *campo di linearità* dello strumento, alle esigenze della specifica operazione di misura.

In ogni caso, per fare sì che uno dei precedenti rapporti (ad es. il primo) sia pressoché costante, è necessario che il numeratore risulti dello stesso ordine del denominatore. D'altra parte il numeratore del rapporto U_0/I_0 è evidentemente del secondo ordine, e nessuna manipolazione algebrica potrà cambiare tale fatto. Per quanto riguarda il denominatore, esso è invece la somma di 3 termini: del secondo e primo ordine rispetto alla pulsazione, e un termine costante. Se il termine del secondo ordine fosse 'dominante' rispetto agli altri due, allora anche il denominatore sarebbe, senza commettere errori troppo elevati, assimilabile ad un termine del secondo ordine, per cui si avrebbe:

$$\text{se } \omega^2 m \gg c\omega \text{ e } \omega^2 m \gg k \rightarrow \frac{U_0}{I_0}(\omega) = \frac{\omega^2 m}{-\omega^2 m + ic\omega + k} \cong \frac{\omega^2 m}{-\omega^2 m} = -1.$$

D'altronde le precedenti condizioni si esplicitano anche in:

$$\omega^2 m \gg k \rightarrow \omega^2 \gg \frac{k}{m} = \omega_n^2;$$

ovvero tale condizione equivale a dire che lo strumento si comporta bene come sismografo se le pulsazioni caratteristiche degli spostamenti del terreno sono molto maggiori della pulsazione naturale del sistema. Inoltre, se l'obiettivo è di abbassare al massimo tale limite, è opportuno costruire un sismografo con bassa rigidezza e una grande massa.

L'altra condizione ($\omega^2 m \gg c\omega$) può essere molto bene soddisfatta se si limita al massimo lo smorzamento del sistema, al limite imponendo $c=0$. Quando parleremo dell'accelerometro si capirà anche come una scelta di questo tipo potrebbe non essere ottimale, ma comunque questo è di solito quello che si ricerca effettivamente per i sismografi.

In pratica, se queste condizioni sono soddisfatte, il rapporto tra ingresso e uscita vale -1 , il che significa che sul tracciato sulla carta si ritroverà l'esatto diagramma degli spostamenti del terreno, ma rovesciato (ad es. il massimo innalzamento del terreno, corrisponde al minimo del tracciato).

La precedente osservazione si giustifica con il fatto che se la massa è grande, e rigidezza piccola, lo smorzamento nullo, gli spostamenti del terreno non riescono ad eccitare a sufficienza la massa (attraverso la molla e lo smorzatore), per cui questa, dotata tra l'altro di grande inerzia, funge da riferimento inerziale (fisso). Quindi in pratica la massa con il pennino sono praticamente fissi nello spazio, mentre il terreno con la carta si muovono sotto di essi. E' per questo che il diagramma su carta è una perfetta riproduzione rovesciata degli spostamenti del terreno.

Tutti i sismografi seguono queste indicazioni generali sulle caratteristiche meccaniche (massa, rigidezza e spostamento), ma una realizzazione che segua fedelmente il nostro schema in effetti non può soddisfare le normali esigenze di misura. Infatti se volessimo andare a misurare con precisione spostamenti caratterizzati dalla frequenza di 1 Hz, si avrebbe che essendo $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ rad/s, la pulsazione naturale del sistema dovrebbe essere molto inferiore a tale valore. Imponendo ad esempio $\omega_n = 2$ rad/s, valore che poi non è tanto più piccolo della pulsazione degli spostamenti del terreno, si avrebbe:

$$2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = 4m.$$

Se la massa del sismografo fosse ad esempio 1 kg, allora la rigidezza della molla dovrebbe essere di 4 N/m (che è un valore estremamente basso). I problemi derivano dal fatto che se pensiamo di porre una massa di 1 kg sopra una molla di 4 N/m, vuol dire esercitare su essa una forza pari a $m \cdot g \approx 10$ N, il che determina una compressione della molla di ben 2.5 m (pari alla deflessione statica $(mg)/k$). In pratica quindi, se il sismografo per funzionare bene deve avere un basso valore della sua pulsazione naturale, allora il valore m/k deve essere alto, e quindi notevole anche la sua deflessione statica.

E' per tale motivo che difficilmente si vedrà un sismografo costituito da una massa posta sopra una molla ad elica come nel nostro modello, tuttavia tutti i sismografi saranno sistemi con una notevole massa, uno smorzamento quasi nullo, e una rigidezza molto, molto bassa nel senso del moto.

Si è inoltre individuata anche la *curva caratteristica* dello strumento, ovvero la legge²⁷:

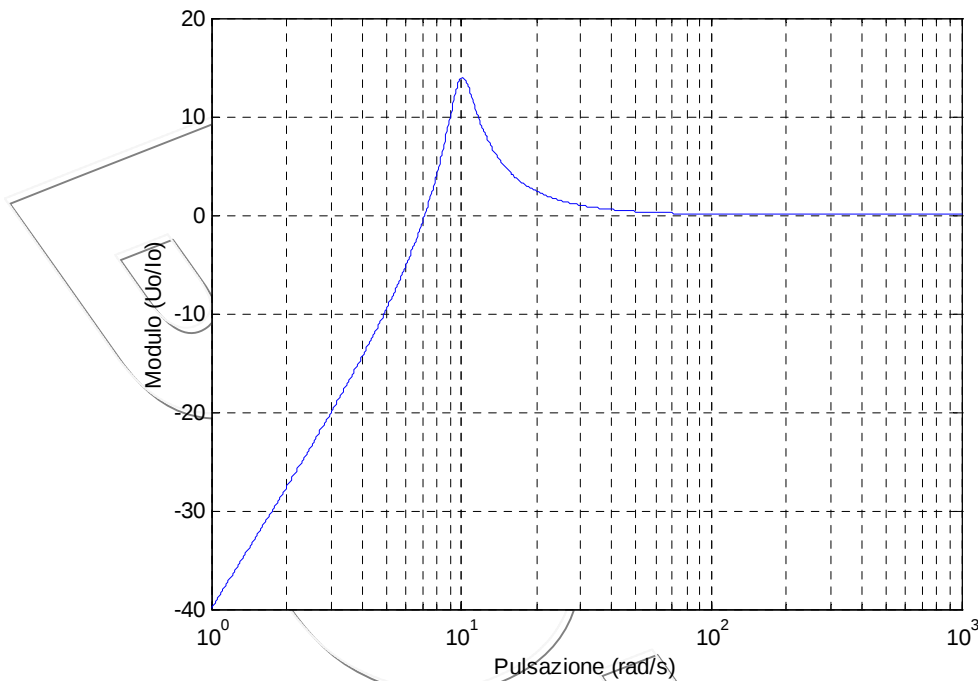
$$\frac{U_0}{I_0}(\omega) = \frac{\omega^2 m}{-\omega^2 m + ic\omega + k}.$$

Tale funzione non è altro che una nuova Funzione di Risposta in Frequenza (o di Trasferimento) del sistema. Si può inoltre facilmente osservare che a meno del termine moltiplicativo ($-m$), tale FRF è identica alla inertanza. Gli andamenti asintotici sono quindi gli stessi, anche se il diagramma del modulo sarà traslato verso l'alto della quantità $20 \log_{10}(m)$, mentre la presenza del segno meno (-) ci fa capire come la fase di tale funzione darà sfasata di π rispetto a quella dell'inertanza.

Si può quindi notare come, dai ragionamenti svolti in precedenza, come la zona delle ω 'alte' sia quella ottimale per il funzionamento dello strumento; lo stesso avremmo potuto capirlo

²⁷ In effetti la curva caratteristica sarebbe la funzione inversa $(I_0/U_0)(\omega)$, ma si è scelto di ragionare sulla funzione su riportata per la sua somiglianza con l'inertanza. Se poi si conosce l'andamento di una funzione, trovare l'andamento della reciproca è un esercizio molto semplice.

semplicemente analizzando il diagramma di Bode (diagramma del modulo). Troviamo infatti che la zona delle alte frequenze è caratterizzata da un asintoto orizzontale, il che ci fa capire come più la pulsazione cresce, più il rapporto tra uscita e ingresso tende ad un valore costante.



...

Per quanto riguarda l'accelerometro, lo schema di riferimento per lo strumento è lo stesso, e quindi pure l'equazione di moto è la stessa. Varia invece la grandezza che si vuole misurare, ovvero l'ingresso che deve essere riportato tramite un diagramma perfettamente proporzionale sul grafico su carta (x-y). Anche in questo caso si considerano solo spostamenti armonici, per i quali risulta:

$$x(t) = X_0 e^{i\omega t} \text{ e } \ddot{x}(t) = -\omega^2 X_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 x(t).$$

Si ha quindi che per quello che riguarda l'uscita dello strumento, non ci sono differenze rispetto al caso del sismografo:

$$u(t) = (x - y)(t) = (X_0 - Y_0) e^{i\omega t} = U_0 e^{i\omega t}.$$

Nel caso dell'accelerometro invece l'ingresso sarà l'accelerazione per cui si avrà:

$$i(t) = \ddot{y}(t) = -\omega^2 Y_0 e^{i\omega t} = (-\omega^2 Y_0) e^{i\omega t} = I_0 e^{i\omega t}.$$

Dalle precedenti si avrà quindi:

$$\frac{I_0}{U_0}(\omega) = \frac{I_0 e^{i\omega t}}{U_0 e^{i\omega t}} = \frac{i(t)}{u(t)} = \frac{\ddot{y}(t)}{(x - y)(t)} = \frac{-\omega^2 Y_0 e^{i\omega t}}{(X_0(\omega) e^{i\omega t} - Y_0 e^{i\omega t})} = \frac{-\omega^2 Y_0}{(X_0(\omega) - Y_0)} e^{i\omega t} = \frac{-\omega^2 Y_0}{(X_0 - Y_0)}(\omega),$$

con la quale si potrebbe già concludere poiché, a meno del termine $-\omega^2$, la precedente funzione la si era determinata già nel caso del sismografo.

In ogni caso si è già detto che l'equazione di moto è sempre la seguente:

$$m\ddot{x} = -k(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y}).$$

Dall'equazione di moto, inserendo le ipotesi fatte sugli spostamenti, si ottengono ancora:

$$-\omega^2 m X_0 e^{i\omega t} = -k(X_0 - Y_0) e^{i\omega t} - ic\omega(X_0 - Y_0) e^{i\omega t};$$

$$-\omega^2 m X_0 + ic\omega(X_0 - Y_0) + k(X_0 - Y_0) = 0.$$

Ma dalle precedenti risulta anche:

$$-\omega^2 Y_0 = I_0 \quad , \quad U_0 = X_0 - Y_0 \rightarrow X_0 = U_0 + Y_0 = U_0 - \frac{I_0}{\omega^2},$$

per cui la precedente relazione si può riscrivere come segue:

$$-\omega^2 m \left(U_0 - \frac{I_0}{\omega^2} \right) + ic\omega U_0 + kU_0 = 0.$$

Da cui seguono:

$$-\omega^2 m U_0 + ic\omega U_0 + kU_0 = -mI_0;$$

$$\frac{U_0}{I_0}(\omega) = \frac{-m}{-\omega^2 m + ic\omega + k} \quad \text{e} \quad \frac{I_0}{U_0}(\omega) = \frac{k - \omega^2 m + ic\omega}{-m}.$$

Analizzando la prima relazione, si può facilmente vedere che se i termini di primo e secondo ordine del denominatore fossero trascurabili rispetto al termine costante, allora l'intero rapporto sarebbe costante. Le precedenti ipotesi sono esplicitate dalle seguenti formulazioni:

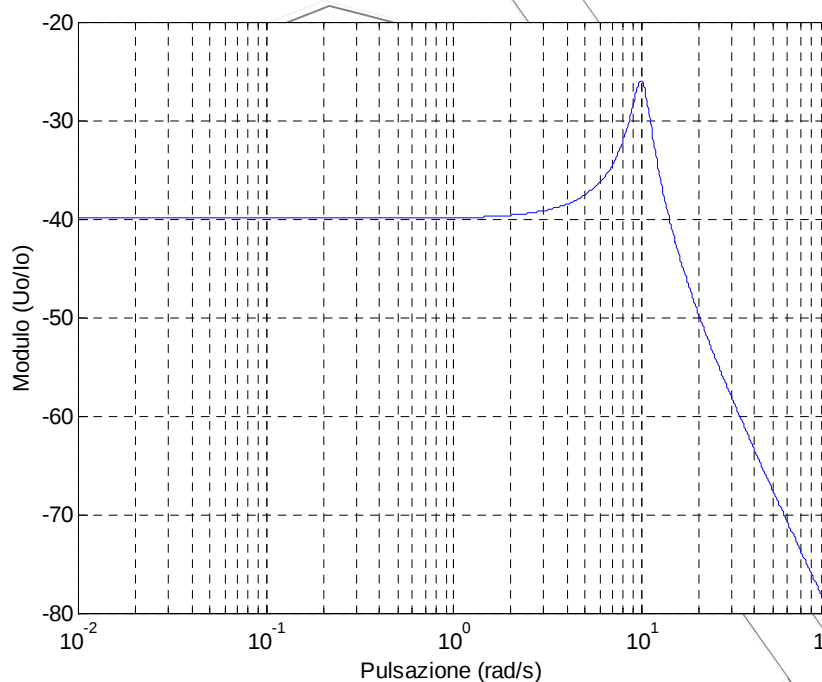
$$k \gg \omega^2 m;$$

$$k \gg \omega c.$$

Per quanto riguarda lo smorzamento, come nel caso del sismografo, potrebbe dirsi in prima approssimazione che un buon accelerometro potrebbe essere un sistema con smorzamento nullo. Inoltre la prima condizione ci direbbe che:

$$k \gg \omega^2 m \rightarrow \omega^2 \ll \frac{k}{m} = \omega_n^2,$$

ovvero, per quanto riguarda le frequenze, la condizione è speculare a quella del sismografo: l'accelerometro funziona bene se le pulsazioni caratteristiche degli spostamenti del terreno sono molto più basse della pulsazione naturale del sistema.



Tuttavia si è già accennato al fatto che la scelta di annullare lo smorzamento del sistema non è quella ottimale. Considerando infatti il modulo della funzione caratteristica dell'accelerometro si ha che:

$$\left| \frac{U_0}{I_0} \right|(\omega) = \frac{m}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{m}{\sqrt{k^2 + \omega^4 m^2 - 2km\omega^2 + c^2\omega^2}}.$$

Per fare sì che il precedente rapporto sia costante, le condizioni ottimali risultano infatti:

- $k^2 \gg \omega^4 m^2$ (del tutto equivalente a $k \gg \omega^2 m$, relazione già trovata in precedenza);

- $c^2 - 2km = 0$ (se viene verificata tale condizione, i termini in ω^2 si elidono perfettamente).

La seconda relazione equivale a dire:

$$c^2 = 2km \rightarrow c = \sqrt{2km} \rightarrow \frac{c}{\sqrt{2km}} = 1 \rightarrow \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707...;$$

ovvero significa che lo smorzamento ottimale per un accelerometro sarebbe quello che consente di avere uno smorzamento adimensionale del sistema pari a circa 0.7.

In sostanza un accelerometro funziona bene se le pulsazioni caratteristiche degli spostamenti sono 'basse' rispetto alla pulsazione naturale. Per ampliare quindi il campo di funzionamento dello strumento sarebbe quindi necessario aumentare il più possibile il valore della pulsazione naturale del sistema, ovvero costruire un sismografo costituito da una molla molto rigida e caratterizzato da una massa molto bassa.

Sono quindi evidenti i motivi per cui uno strumento sismico non viene di solito utilizzato per misurare le accelerazioni. Risulta infatti, se lo strumento fosse costruito correttamente:

$$\frac{U_0}{I_0}(\omega) = \frac{-m}{-\omega^2 m + ic\omega + k} \approx -\frac{m}{k}$$

Se la pulsazione naturale deve essere molto elevata, allora il rapporto m/k deve essere molto basso, il che significa che per un sismografo risulta molto basso il rapporto uscita/ingresso, ovvero che ci vogliono segnali in ingresso (accelerazioni) molto grandi, per provocare una uscita (un tracciato su carta) che sia leggibile.

Tanto per fornire qualche valore numerico: se la massa dell'accelerometro fosse di 10 g (molto bassa), e la rigidezza della molla fosse di 10^5 N/m (non troppo elevata), la pulsazione naturale sarebbe di circa 3000 rad/s (circa 500 Hz). Ciò vuol dire che lo strumento difficilmente potrebbe essere utilizzato per misurare accelerazioni con frequenza superiore a poche decine di Hz (mentre di solito nelle misurazioni meccaniche è necessario arrivare almeno a 200-500 Hz). Quindi, nonostante lo strumento abbia scadenti prestazioni dinamiche per le alte frequenze, il rapporto ingresso uscita varrebbe 10^7 m/(m/s²) ovvero circa 10^3 mm/g, il che significa che una accelerazione armonica di modulo pari a g (accelerazione di gravità – non eccessivamente bassa) determinerebbe grafici su carta dell'ampiezza del micron (millesimo di millimetro).

E' per questo motivo che gli accelerometri reali non sono mai costituiti effettivamente da una massa e una molla sovrapposti, ma sono comunque strumenti caratterizzati da una massa molto bassa e da una rigidezza molto elevata.

10.10. Isolamento dalle vibrazioni e efficienza delle sospensioni

Come ulteriore esempio applicativo di come possono essere utilizzati i concetti sviluppati a riguardo dei sistemi con 1 GdL è utile presentare come si possa affrontare il problema dell'isolamento dalle vibrazioni. Tale problema può presentarsi sotto due forme differenti:

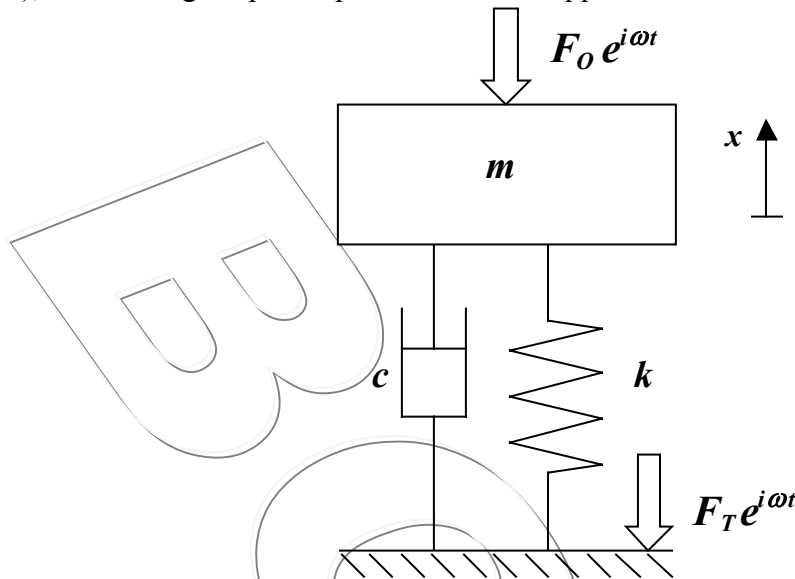
1. si richiede di diminuire le forze (derivanti dalle vibrazioni) che si scaricano sul terreno a causa di una massa (un macchinario, un rotore sbilanciato, una lavatrice) posto su una sospensione elastica (un sistema molla-smorzatore) su cui agisce una forza armonica;
2. si richiede di limitare le vibrazioni (sotto forma di spostamenti) che vengono trasmesse ad una massa (es. il conducente di un autoveicolo) in ragione di vibrazioni armoniche provenienti dal basamento.

Il primo caso potrebbe essere applicato ad una lavatrice che, mentre lava il bucato, deve scaricare meno forze possibile sul pavimento per evitare vibrazioni e rumore. Il secondo caso potrebbe essere applicato al dimensionamento delle sospensioni di un autoveicolo per diminuire le vibrazioni che si risentono sul conducente mentre si percorre una strada piena di buche.

...

Nel caso in cui si voglia diminuire le forze trasmesse sul terreno da un macchinario su cui agisce una forza armonica si fa riferimento allo schema seguente, ed inoltre si prende come *indice di efficienza* il rapporto F_T/F_O tra la forza scaricata sul terreno attraverso la sospensione in esame e la

forza scaricata sul terreno in assenza di sospensione (se il macchinario fosse fissato direttamente sul terreno). Naturalmente la sospensione funziona bene se il modulo del rapporto è inferiore ad 1 ($F_O > F_T$), e tanto meglio quanto più basso è tale rapporto.



Ovviamente, essendo fisso il basamento, l'equazione di moto della massa è:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} - F_o e^{i\omega t};$$

le forze che si scaricano sul terreno, ovviamente lo fanno esclusivamente attraverso la molla e lo smorzatore viscoso della sospensione, per cui risulterà:

$$F_T = -kx - c\dot{x};$$

in cui il segno 'meno' dipende esclusivamente dal verso del sistema di riferimento adottato, ed inoltre potrebbe tranquillamente essere omesso in quanto interessa esclusivamente il rapporto dei moduli delle forze, e non la fase.

Come di consueto, poiché si fa l'ipotesi che la forzante sia armonica alla generica pulsazione ω , anche gli spostamenti della massa saranno caratterizzati dalla stessa pulsazione. Con i passaggi ormai usuali si avrà quindi:

$$[-m\omega^2 + i\omega c + k]X_o = -F_o;$$

$$F_T = -[i\omega c + k]X_o.$$

Eliminando il modulo delle oscillazioni della massa X_o (che non interessa) dalle due precedenti relazioni si ottiene:

$$\frac{F_T}{F_o} = \frac{[i\omega c + k]}{[i\omega c + k - m\omega^2]} \Rightarrow \left| \frac{F_T}{F_o} \right| = \frac{\sqrt{\omega^2 c^2 + k^2}}{\sqrt{\omega^2 c^2 + (k - m\omega^2)^2}}.$$

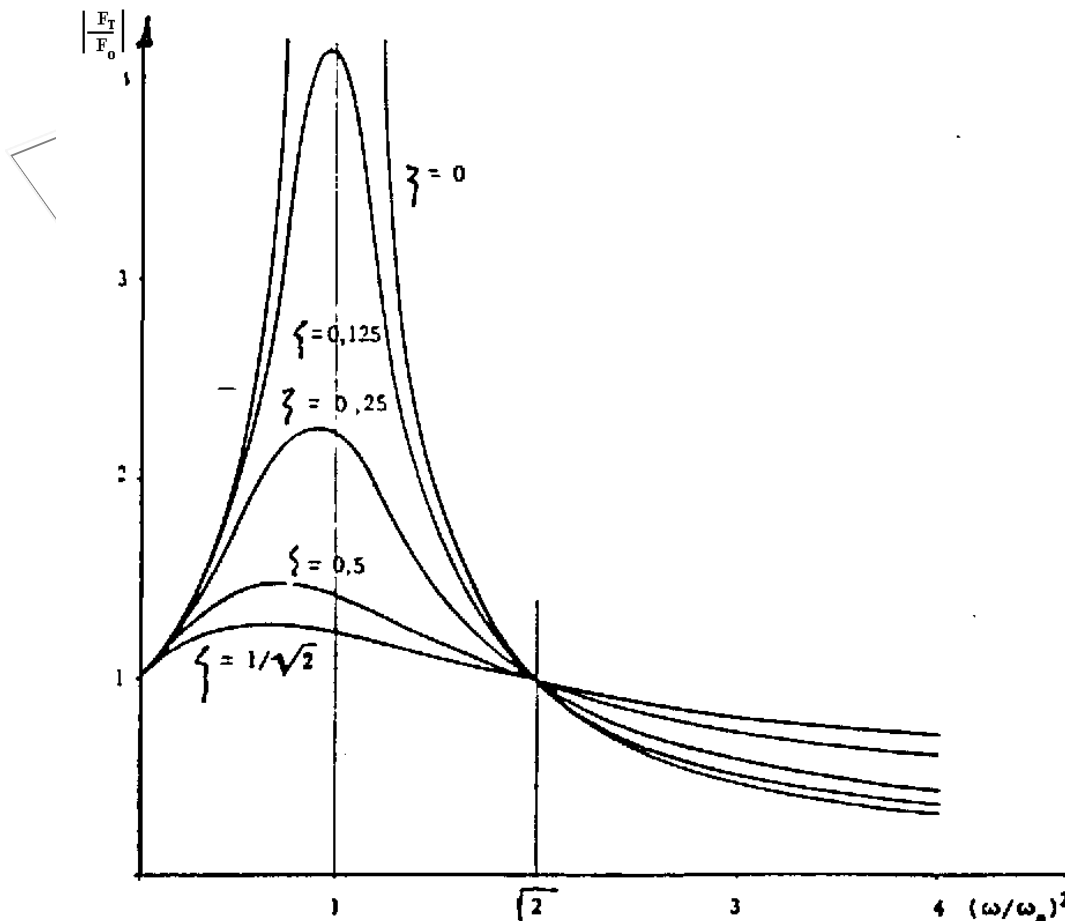
Dallo studio della precedente funzione (e soprattutto del relativo diagramma di Bode) si può determinare il grado di efficienza della sospensione.

Si lascia allo studente determinare i diagrammi asintotici sul diagramma di Bode, ma si premettono alcune osservazioni:

- per forze statiche ($\omega=0$) il rapporto vale 1, ovvero se la forza applicata alla massa è costante, la stessa forza si scarica sul terreno (è in pratica il *principio di azione e reazione*);
- anche quando ($|k-m\omega^2|=k$) il modulo del rapporto vale ancora 1. Ciò equivale a dire: $m\omega^2=2k$, ovvero anche ($\omega/\omega_n=\sqrt{2}\approx 0.707\dots$);
- per pulsazioni comprese tra 0 e $\sqrt{2}\omega_n$, la funzione assume un massimo tanto più alto quanto minore è lo smorzamento;

- per pulsazioni maggiori di $\sqrt{2}\omega_n$, il modulo del rapporto si mantiene inferiore ad 1, e la funzione è monotona decrescente. La funzione decresce tanto più rapidamente quanto minore è lo smorzamento.

Si riporta a seguito un diagramma in scala lineare del rapporto in funzione dei parametri dimensionali del sistema.

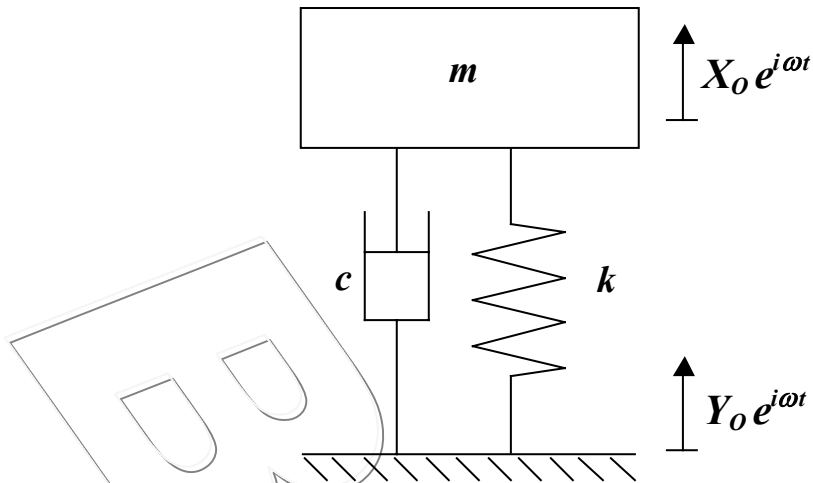


Se quindi la pulsazione della forzante si mantiene costantemente superiore a un certo limite, per aumentare l'efficacia della sospensione è necessario ridurre al minimo lo smorzamento; viceversa se la pulsazione può variare e scendere a valori inferiori a $\sqrt{2}\omega_n$, l'assenza di smorzamento potrebbe indurre una inaccettabile amplificazione della forza trasmessa al terreno.

Inoltre è evidente che le sospensioni elastiche funzionano egregiamente alle frequenze alte, mentre possono essere deleterie per forzanti caratterizzate da basse frequenze. Per ampliare il campo di funzionamento potrebbe essere utile ridurre la rigidità della sospensione (visto che un aumento della massa non è di solito né praticabile né auspicabile), tuttavia una riduzione della rigidità comporta l'aumento della *deflessione statica* della molla e consente alla massa di effettuare vibrazioni con ampiezza decisamente maggiore.

...

Nel caso in cui si voglia diminuire l'ampiezza delle vibrazioni trasmesse da un basamento mobile (con spostamenti armonici) ad una massa, si adotta come *indice di efficienza* il rapporto X_0/Y_0 tra gli spostamenti della massa e quelli del basamento (uguali a quelli della massa in assenza di sospensione). Naturalmente la sospensione funziona bene se il modulo del rapporto è inferiore ad 1 ($Y_0 > X_0$), e tanto meglio quanto più basso è tale rapporto.



Ovviamente, essendo il basamento in movimento, l'equazione di moto della massa è:

$$m\ddot{x} = -k(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y}).$$

Dalla precedente relazione, vista la linearità del sistema e il tipo di spostamenti del basamento, si avrà con i soliti passaggi:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} \Rightarrow (-m\omega^2 + i\omega c + k)X_0 = (k + i\omega c)Y_0;$$

dalla quale si ottiene direttamente la relazione ricercata:

$$\frac{X_0}{Y_0} = \frac{[i\omega c + k]}{[i\omega c + k - m\omega^2]} \Rightarrow \left| \frac{X_0}{Y_0} \right| = \frac{\sqrt{\omega^2 c^2 + k^2}}{\sqrt{\omega^2 c^2 + (k - m\omega^2)^2}}.$$

Appare del tutto evidente che l'espressione dell'efficienza della sospensione ha la medesima espressione di quella ricavata nel caso precedente. Il diagramma di Bode e i relativi andamenti saranno quindi gli stessi, come pure le considerazioni che ne conseguono.