5. Oscillatore armonico smorzato e forzato: risonanza

Dato un oscillatore armonico come quello studiato nei paragrafi precedenti, ci chiediamo cosa succeda nel caso in cui alla massa venga applicata una forza variabile nel tempo, che si dice *forzante* perché forza, cioè "guida", il moto della massa. Per semplicità studiamo il caso in cui la forzante sia anch'essa sinusoidale, con frequenza qualsiasi. Anche in questo caso l'incognita del sistema è la legge oraria del moto, x = x(t), che quindi deve soddisfare la seguente equazione differenziale (sempre scritta per le accelerazioni come in precedenza):

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \frac{F}{m}e^{i\omega t}}$$

dove anche per la forzante si è adottata la notazione esponenziale.

Come prima, vogliamo determinare la soluzione dell'equazione. Stavolta però abbiamo introdotto un termine che non dipende da x(t) (motivo per cui, per inciso, l'equazione si dice *non omogenea*). Osserviamo comunque che il sistema è sempre in grado di oscillare alla frequenza propria ω_0, indipendentemente dal moto indotto dalla forzante.
Tuttavia, a causa dello smorzamento, l'ampiezza del moto proprio tende a decrescere nel tempo, mentre la forzante mantiene fissata l'ampiezza delle oscillazioni. Avremo quindi due soluzioni coesistenti, la cui somma (o meglio la cui combinazione lineare) descrive il moto del sistema. La soluzione che descrive il moto alla frequenza propria ω_0 (soluzione dell'equazione cosiddetta *omogenea associata* alla equazione data) è la stessa ottenuta al paragrafo precedente. Dobbiamo quindi trovare la soluzione dell'equazione non omogenea, che descrive il moto indotto dalla forzante.

NOTA: In matematica esiste un teorema generale sulle equazioni differenziali che afferma che, sotto opportune condizioni (nel nostro caso tutte verificate), *tutte* le soluzioni di un'equazione differenziale non omogenea fanno parte della classe di funzioni ottenute come combinazione lineare di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea e della soluzione generale dell'omogenea associata. Poiché nel paragrafo precedente, nel risolvere il problema dell'oscillatore libero con attrito abbiamo trovato la soluzione generale dell'omogenea, saremo anche in grado di determinare la totalità delle soluzioni dell'equazione non omogenea semplicemente trovandone una soluzione particolare. Grazie a quanto visto sopra otterremo quindi un risultato della massima generalità.

Poichè la forzante "guida" il sistema a oscillare alla frequenza ω, possiamo cercare una soluzione particolare che oscilli proprio a questa frequenza. Consideriamo quindi una soluzione del tipo:

$$x(t) = Ae^{i\omega t}$$

dove ω è la stessa della forzante. Sostituendo nell'equazione si ottiene l'equazione algebrica:

$$A\left[-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2\right] = \frac{F}{m}$$

che, poiché ω è fissato dal moto della forzante, risulta essere un'equazione che permette di ricavare A. In tal modo si osserva che l'equazione fornisce una funzione complessa $A = A(\omega)$ in dipendenza dalla ampiezza della forzante:

$$A(\omega) = \frac{F/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$$

che rappresenta l'ampiezza e la fase di oscillazione del sistema quando la forzante agisce con frequenza ω e ampiezza (forza) $F\, e^{i\omega t}$.
Ampiezza e fase dell'oscillazione si ricavano dalle regole sui numeri complessi. Razionalizzando il numero complesso e ricordando che il suo modulo è data da $|a + i\, b| = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$ e che la fase è definita attraverso $\tan \varphi_0 = b / a$, si ottiene (vedi Nota):

$$\boxed{\begin{aligned} |A(\omega)| &= \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \\ \tan \varphi_0 &= \frac{-\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}}$$

A cosa corrisponde la fase φ con cui si manifesta il moto dell'oscillatore? Osserviamo che la forzante è stata introdotta nell'equazione con fase di riferimento nulla, quindi la fase è calcolata rispetto alla fase della forzante, ovvero rappresenta la <u>differenza di fase con la forzante</u>. La soluzione trovata ci dice perciò che il moto del sistema è sfasato rispetto a quello della forzante, con uno sfasamento che dipende dalla frequenza ω.

In base a questi risultati, e ricordando le soluzioni ottenute per l'oscillatore libero smorzato, possiamo quindi scrivere la legge oraria del moto come combinazione lineare delle due soluzioni:

$$x(t) = a \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} e^{-i\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}} e^{i\omega t} + b e^{-\gamma t} e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

dove a e b sono due costanti che stabiliscono i pesi delle due soluzioni nella combinazione lineare (si determinano sulla base delle condizioni inziali). <u>Fisicamente questo corrisponde al fatto che il sistema oscilla con una sovrapposizione di due moti, quello dell'oscillatore libero smorzato visto in precedenza e quello, alla frequenza particolare della forzante, appena ottenuto.</u>

NOTA: Come si può notare, anche se il procedimento di risoluzione è del tutto analogo al precedente, è completamente cambiata la richiesta: prima cercavamo la frequenza di oscillazione del sistema, lasciando le costanti arbitrarie (descriventi l'ampiezza del moto) libere di essere determinate dalle condizioni al contorno; qui lasciamo la frequenza "libera" di essere determinata dal moto della forzante (che quindi la vincola in maniera univoca e costituisce una sorta di condizione al contorno), e cerchiamo invece di determinare l'ampiezza di oscillazione sulla base dell'equazione differenziale. Questa operazione fornisce l'ampiezza (e la fase) dell'oscillazione al variare della frequenza della forzante, ω, cioè la funzione $A = A(\omega)$.
Ricordiamo a questo proposito l'interpretazione che avevamo dato per la soluzione dell'oscillatore libero: anche in quel caso il discorso poteva essere impostato dicendo che fissare una frequenza diversa da quella propria portava a determinare l'ampiezza dell'oscillazione. Ma tutte le ampiezze delle oscillazioni a tutte le frequenze tranne quella propria erano nulle! Qui invece forzando ad una determinata frequenza si mette sempre il sistema in oscillazione, con una ampiezza e una fase definite dalla relazione trovata.

Si noti che la legge oraria che abbiamo ottenuto descrive il moto del sistema in condizioni del tutto generali, ovvero per qualsiasi valore della frequenza della forzante (purché fissata nel tempo), che obbliga il sistema a oscillare a *quella* frequenza ω.
Discutiamo brevemente il significato fisico della relazione per x(t), il cui aspetto apparentemente complicato nasconde una fenomenologia molto raffinata ma al tempo stesso relativamente semplice. Consideriamo dapprima il secondo addendo: esso descrive esattaemnte il moto dell'oscillatore libero smorzato come quello descritto in precedenza. Si noti che questa componente del moto avviene alla frequenza $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, che *non dipende* dalla frequenza della forzante. Tale moto è presente con un'ampiezza iniziale b al tempo t = 0, ma l'ampiezza decresce indefinitamente nel tempo.
Il primo addendo, invece, descrive il moto oscillatorio alla frequenza della forzante, ω, secondo la semplice legge temporale $e^{i\omega t}$; i due prefattori rappresentano rispettivamente l'ampiezza e la fase del moto, ma non contengono alcuna dipendenza temporale. Si noti che non vi sono effetti di smorzamento. Sulla base di quanto discusso a proposito del secondo addendo, quindi, concludiamo che il primo addendo descrive il moto del sistema quando si trova a regime, quando, cioè, le oscillazioni libere si sono completamente smorzate e rimane solo il moto indotto dalla forzante. Il tempo necessario a portare il sistema a regime corrisponde a 3-4 volte il tempo caratteristico dello smorzamento (che può essere misurato sul sistema in condizioni di oscillazione libera).

Veniamo ora a discutere la funzione A = A(ω), che rappresenta il primo prefattore nel primo addendo dell'espressione per x(t) e descrive l'ampiezza delle oscillazioni, e l'andamento della funzione tan φ_0, ovvero il secondo prefattore che determina la fase del moto. Entrambi dipendono dalla frequenza della forzante, ω, e non dipendono dal tempo, perciò forniscono informazioni sull'ampiezza e la fase dell'oscillazione quando il sistema è forzato ad una determinata frequenza.

Nelle Fig. 5.1.a e 5.1.b sono rappresentate l'ampiezza delle oscillazioni A = A(ω) (in unità arbitrarie) e lo sfasamento $\varphi(\omega)$ (in radianti) in funzione della frequenza della forzante ω, nel caso in cui la frequenza propria sia ω_0 = 1 [Hz] per due valori della costante di smorzamento: γ = 0.08 Hz (curve più bassa e con sfasamento più lento) e 0.04 Hz. Si vede che l'ampiezza, molto bassa sia per frequenze inferiori a quella propria che per frequenze molto maggiori, in corrispondenza di ω_0 diventa molto grande: si dice che per $\omega = \omega_0$ il sistema è in <u>condizione di risonanza</u>.

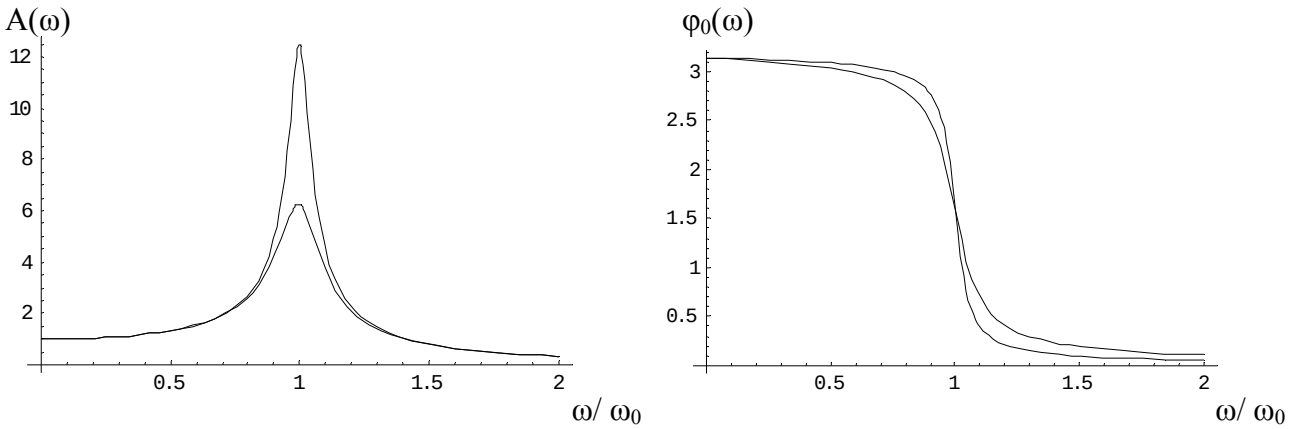

Figura 5.1: a) ampiezza (curva di risonanza) e b) sfasamento delle oscillazioni in funzione della frequenza della forzante per due valori della costante di smorzamento.

Questo fenomeno, molto importante e presente in moltissimi sistemi, avviene perché per $\omega = \omega_0$ l'effetto della forzante, che muove sinusoidalmente la massa, si accoppia in maniera stabile con

l'effetto della forza di richiamo. La forzante quindi trasferisce la massima accelerazione alla massa *sempre* quando la massa possiede la massima velocità (sono sfasate di $\pi/2$). Inoltre il verso dell'accelerazione è quello che tende ad accelerare ulteriormente la massa, che quindi acquista energia a spese della forzante. In queste condizioni, ad ogni ciclo viene trasferita un po' di energia dalla forzante alla massa. In questa condizione l'unica sottrazione di energia al moto della massa è dovuta dall'attrito. In condizioni di risonanza, quindi, l'ampiezza di oscillazione diventa molto più ampia di quanto non potrebbe essere se non ci fosse la foza di richiamo.
Notiamo che in condizione di risonanza la differenza di fase tra forzante e oscillatore è sempre la stessa. Questo significa che il sistema è in grado da solo di "accordare" la fase dell'oscillatore a quella della forzante. Come avviene questo fenomeno? Ricordiamo che la soluzione generale del sistema è data dalla combinazione della soluzione dell'equazione omogenea e di una soluzione particolare della non omogenea. Come osservato anche prima nel caso generale, questo corrisponde al fatto che il sistema oscilla con una sovrapposizione di due moti, quello dell'oscillatore libero smorzato visto in precedenza e quello alla frequenza particolare della forzante, appena ottenuto. Tuttavia notiamo che il primo è un moto smorzato, che dopo qualche tempo di decadimento presenta un'ampiezza trascurabile, mentre il secondo è mantenuto costante dalla forzante. A regime, quindi, ovvero aspettando un tempo sufficientemente lungo da far esaurire il moto dell'oscillatore libero, esiste solo il moto della forzante. In termini dello sfasamento, quindi, "sopravvive" solo il moto descritto dalla soluzione particolare ottenuta sopra, in cui oscillatore e forzante sono naturalmente accordati nel modo che massimizza il trasferimento di energia all'oscillatore.
E' chiaro quindi il significato della combinazione lineare delle soluzioni: a regime, a causa dello smorzamento, il moto descritto dalla soluzione generale dell'omogenea scompare e il moto è del tutto descritto dalla soluzione particolare che abbiamo ottenuto. Nel transitorio, quando lo smorzamento non ha ancora agito del tutto, coesistono le due oscillazioni. Si noti che per la coesistenza dei due moti non è necessario che quando comincia il moto della forzante sia già presente un moto dell'oscillatore libero: questo viene comunque attivato nel momento in cui viene introdotta la forzante. Questo significa che, dopo aver attivato il moto, è necessario attendere un tempo sufficientemente lungo affinché il sistema si comporti come descritto sopra (si noti però che tale tempo è determinato solamente dalle caratteristiche dissipative del sistema, cioè dalla costante γ, ma *non* dalle caratteristiche della forzante).

Fuori dalla condizione di risonanza, cioè quando $\omega \neq \omega_0$, l'efficienza del trasferimento di energia è ridotta a causa del fatto che la forzante, oscillando ad una frequenza diversa da quella propria, non può mantenere uno sfasamento stabile con il sistema. Questo fa sì che periodicamente la forzante si trovi in controfase rispetto al sistema, e quindi decelera la massa invece di accelerarla.

Come si può notare dalle figure 5.1.a e 5.1.b, in condizioni di risonanza ($\omega = \omega_0$) l'aumento della costante di smorzamento causa una riduzione del massimo di ampiezza, la larghezza a metà altezza della curva (FWHM, acronimo dell'inglese full width at half maximum) cresce, e cresce anche l'intervallo in frequenza sul quale avviene lo sfasamento: tutto il fenomeno si manifesta quindi su un intervallo di frequenze che cresce al crescere della costante di smorzamento.

A partire dalla relazione per l'ampiezza, e usando l'approssimazione secondo cui la larghezza della curva sia molto minore della frequenza di risonanza, $\omega \approx \omega_0$, per cui $\omega^2-\omega_0^2 \approx 2\omega_0(\omega-\omega_0)$, si ottiene che:

$$A(\omega) = \frac{F/m}{2\omega_0\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\gamma^2}}$$

Da questa espressione si può ricavare che il massimo della curva, che si ha evidentemente sempre per $\omega = \omega_0$, ha una ampiezza data da:

$$A(\omega_0) = \frac{F}{2m\omega_0\gamma}$$

Osservando che per $\omega^* = \omega_0 \pm \gamma\sqrt{3}$ si ha $A(\omega^*) = A(\omega_0)/2$, si ricava che la larghezza a metà altezza è fornita dalla relazione:

$$\boxed{FWHM = 2\sqrt{3}\,\gamma}$$

ovvero <u>proporzionale alla costante di smorzamento</u>. C'è quindi un rapporto molto stretto tra lo smorzamento e la curva di risonanza, che permette di ricavare informazioni sul fenomeno dissipativo a partire dalle misure sulla larghezza della curva di risonanza.

Benchè nel caso meccanico abbia senso studiare direttamente l'ampiezza del moto, in molti sistemi fisici si ha accesso solo al quadrato di questa grandezza (ad esempio l'intensità di un campo elettromagnetico). Di conseguenza è di uso comune la funzione:

$$\boxed{|A(\omega)|^2 = \frac{(F/m)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

che prende il nome di <u>funzione lorentziana</u>.

Per concludere, menzioniamo alcuni esempi di sistemi oscillatori che presentano il fenomeno della risonanza. Innanzitutto osserviamo che, in base all'osservazione fatta all'inizio del paragrafo 1, se tutti i sistemi che godono di un equilibrio stabile possono essere descritti come oscillatori armonici, e tenendo presente che tutti i sistemi reali sono dotati di fenomeni dissipativi, concludiamo che lo studio fatto finora rappresenta una descrizione di tutti i sistemi reali intorno a punti di equilibrio stabile, che vengono forzati ad oscillare sinusoidalmente. Esempi di tali sistemi si trovano dappertutto: il pendolo, l'emissione e assorbimento di radiazione da parte di atomi e molecole, i laser, i circuiti elettronici oscillanti, le antenne per le trasmissioni radio, i forni a microonde, gli strumenti musicali e gli accordi; importanti applicazioni si hanno anche sulle strutture portanti di un ponte o di un palazzo, sullo studio di un motore o del bilanciamento degli pneumatici.

Un caso di particolare interesse è quello musicale: colpiamo un diapason e appoggiamo il gambo alla cassa di una chitarra. Appoggiando un altro diapason alla cassa, i suoi rebbi si metteranno a oscillare e, fermando il primo, il secondo continuerà a oscillare.
Il fenomeno si spiega con il fatto che il diapason può essere considerato come un oscillatore (i rebbi oscillano sotto l'azione della forza di richiamo dell'elasticità del materiale) che viene forzato quando è investito da un'onda acustica che fa vibrare la massa d'aria circostante o dalle vibrazioni della cassa armonica. Poiché la frequenza di risonanza dei due diapason è la stessa (440 Hz, il la centrale del pianoforte), quando il primo mette in vibrazione la cassa armonica, il secondo si trova in condizioni di risonanza e quindi comincia a oscillare alla stessa frequenza, assorbendo e trasformando in suono la massima potenza possibile.
Invece, nel caso in cui accoppiamo al primo diapason un sistema che presenti una frequenza di risonanza diversa (ad esempio una corda di una chitarra non accordata, oppure un altro diapason al quale abbiamo variato leggermente la massa dei rebbi) questo, non trovandosi in condizioni di risonanza, non sarà in grado di assorbire la potenza con cui viene investito. L'ampiezza delle sue oscillazioni sarà quindi nulla o molto piccola, in dipendenza dalla differenza di frequenza.

6. Teorema di Fourier

Nel paragrafo precedente abbiamo utilizzato come soluzione particolare di una equazione differenziale una funzione esponenziale, $x(t) = Ae^{i\omega t}$, che descrive un'oscillazione ad una frequenza fissata ω qualsiasi. Il metodo di risoluzione dell'equazione ci ha poi portato alla determinazione di una funzione $A = A(\omega)$ funzione della sola frequenza che, nota la forma della soluzione, permette di determinare completamente la legge oraria del moto $x = x(t)$.
Concludiamo quindi che la forma particolare della funzione utilizzata per la soluzione permette di studiare completamente il problema solo sulla base delle ampiezze delle oscillazioni alle varie frequenze.
E' questa una proprità molto importante, che può essere generalizzata anche per sistemi non oscillanti, che si fonda su un importantissimo teorema noto come Teorema di Fourier:

Qualsiasi funzione può essere scritta come la combinazione lineare di funzioni oscillanti a diverse frequenze, di ampiezza e fase opportunamente scelta. In simboli:

$$f(t) = \int f(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Tale combinazione lineare prende il nome di sviluppo di Fourier della funzione, e la funzione $f(\omega)$ si dice trasformata di Fourier della funzione $f(t)$: il suo andamento funzionale rappresenta i coefficienti della combinazione lineare che pesano la funzione oscillante ad una determinata frequenza ω.

Vediamo che il Teorema di Fourier sancisce, in maniera più completa, proprio quello che abbiamo trovato in tutti i casi risolti in precedenza: una funzione del tempo può essere scritta come la somma di funzioni oscillanti, di cui è sufficiente specificare l'ampiezza e la fase in funzione della frequenza.

Evidentemente la funzione $f(\omega)$ è una funzione complessa. In molti casi però è sufficiente, e molto comodo, utilizzare solamente l'ampiezza, o anche il suo modulo al quadrato, che prende il nome di spettro di potenza della funzione.
Nel caso dell'oscillatore armonico forzato e smorzato lo spettro di potenza delle oscillazioni è dato da una funzione lorentziana.

Lo studio di un sistema oscillante può quindi essere condotto equivalentemente sia studiando la legge oraria del moto della massa, sia studiando il suo spettro. Come si può notare, sulla base del modello che abbiamo discusso in entrambi i casi si può ottenere l'informazione completa sul sistema. Ad esempio è possibile misurare la costante di smorzamento γ sia valutando il tempo di decadimento dell'ampiezza delle oscillazioni, sia misurando la larghezza dello spettro di potenza. Nel primo caso si dice che si studia il sistema nel dominio del tempo, nel secondo nel dominio delle frequenze.

Si noti che nel caso del suono la quantità che misuriamo, cioè l'intensità, è legata al modulo al quadrato dell'ampiezza delle oscillazioni, cioè allo spettro di potenza del suono.

Descrizione dell'esperienza II

Questa esperienza è rivolta alla verifica del modello di oscillatore forzato - smorzato e allo studio della risonanza di due oscillatori armonici. Ci si basa sulle metodiche sperimentali e di analisi sviluppate nella prima esperienza, nonché sulla scelta delle condizioni che meglio approssimano le ipotesi di idealità del modello, per verificare i risultati che si ottengono dallo studio della risonanza nei due sistemi studiati precedentemente in condizioni di oscillazioni libere.

Obiettivi:

Primo sistema

- Misura della costante elastica di una molla
- Misura della frequenza propria del sistema in condizioni di oscillazione libera di una massa appesa alla molla
- Determinazione di una condizione di smorzamento che fornisca una opportuna larghezza di risonanza: misura della costante di smorzamento
- Studio del sistema forzato al variare della frequenza: ricerca della frequenza propria e determinazione della curva di risonanza (*)
- Confronto tra la curva attesa e la curva misurata
- Misura della costante di smorzamento e confronto con il valore misurato precedentemente
- (*) *Facoltativo*: Misura dello sfasamento tra forzante e oscillatore in funzione della frequenza

Secondo sistema

- Misura della costante elastica di due molle (quasi) uguali
- Misura della frequenza propria del sistema in condizioni di oscillazione libera di una massa sospesa ad entrambe le molle
- Determinazione di una condizione di smorzamento che fornisca una opportuna larghezza di risonanza: misura della costante di smorzamento
- Studio del sistema forzato al variare della frequenza: ricerca della frequenza propria e determinazione della curva di risonanza (*)
- Confronto tra la curva attesa e la curva misurata
- Misura della costante di smorzamento e confronto con il valore misurato precedentemente
- (*) *Facoltativo*: Misura dello sfasamento tra forzante e oscillatore in funzione della frequenza