Dispense di

Complementi di Meccanica delle Vibrazioni

Testi Consigliati:

- E. Funaioli ed altri, "Meccanica applicata alle macchine", vol. II, Ed. Patron Bologna
- D.J. Ewins, "Modal Testing Theory, Practice and Application", Second Edition, Research Studies Press LTD.
- G. Genta, "Vibration of Structures and Machines Practical Aspects", Second Edition, Springer-Verlag
- Cyril M. Harris, "Shock and Vibration Handbook", Fourth Edition, Mc.GRAW-HILL

INDICE

1. COM	PORTAMENTO DEI SISTEMI MDOF SMORZATI	5
1.1. 8	SMORZAMENTO PROPORZIONALE	5
1.1.1.	Calcolo delle pulsazioni proprie: smorzamento strutturale	6
1.1.2.	Calcolo delle pulsazioni proprie: smorzamento viscoso	7
1.1.3.	Moto forzato: smorzamento strutturale	9
1.1.4.	Moto forzato: smorzamento viscoso	10
1.2. \$	SMORZAMENTO GENERALE	12
1.2.1.	Significato dei modi propri complessi	12
1.2.2.	Calcolo delle pulsazioni proprie: smorzamento strutturale	13
1.2.3.	Moto forzato: smorzamento strutturale	15
1.2.4.	Calcolo delle pulsazioni proprie: smorzamento viscoso	17
1.2.5.	Moto forzato: smorzamento viscoso	20
1.3.	Conclusioni	
2. MOD	ELLAZIONE CON MATRICI DI TRASFERIMENTO	28
2.1. N	METODO DI HOLTZER	29
2.2. N	METODO DI MIKLESTADT	32
3. MOD	ELLI A PARAMETRI DISTRIBUITI	35
3.1. V	VIBRAZIONI TRASVERSALI NELLE FUNI	35
3.2. V	VIBRAZIONI LONGITUDINALI DI UNA TRAVE CONTINUA	
3.3. V	/IBRAZIONI FLESSIONALI DI UNA TRAVE CONTINUA	40

4.	EL	EMENTI FINITI	42
	4.1.	Alcuni Tipi di Elementi Finiti	42
	4.2.	FUNZIONI DI FORMA	45
	4.3.	EQUAZIONI DI MOTO DELL'ELEMENTO	48
	4.4.	ROTAZIONE DELLE EQUAZIONI DI MOTO	51
	4.5.	ASSEMBLAGGIO DELLE EQUAZIONI DI MOTO	54
	4.6.	INTRODUZIONE DEI VINCOLI	57
	4.7.	UN ESEMPIO PRATICO: TRAVE INCASTRATA TRAMITE ELEMENTI BAR	59
	4.7.	1. Funzioni di Forma dell'Elemento BAR	60
	4.7.	2. Rotazione e Assemblaggio	63
	4.7.	3. Imposizione delle Condizioni di Vincolo	65
5.	TE	CNICHE DI RIDUZIONE	66
	5.1.	CRITERIO DI CONDENSAZIONE STATICA (O DI GUYAN)	67
	5.2.	TRONCAMENTO MODALE	69
6.	LIN	EE GUIDA PER L'ALLESTIMENTO DI PROVE SPERIMENTALI	70
	6.1.	Obiettivo della Attività Sperimentale	70
	6.2.	Scelta del Layout	72
	6.2.	1. Montaggio del sistema da sperimentare	74
	6.2.	2. Montaggio FREE	75
	6.2.	3. Montaggio Ground	77
	6.3.	MONTAGGIO DEGLI ATTUATORI	78
	6.3.	1. Collegamento degli Attuatori al Sistema	80
	6.4.	PRINCIPALI TIPI DI ATTUATORI	80
	6.4.	1. Shaker Elettromagnetico	81
	6.4.	2. Attuatore Oleodinamico	82
	6.4.	3. Vibrodina	83
	6.4.	4. Martello Strumentato	84
	6.5.	TECNICHE DI ECCITAZIONE PER ANALISI MODALE	85
	6.5.	1. Eccitazione Monofrequenziale	86
	6.5.	2. Sweep in Frequenza	87

6.5	3. Eccitazione Impulsiva	88
6.5	4. Eccitazione Random	
6.6.	METODO DI DUHAMEL	
7. SIS	TEMI NON LINEARI	97
7.1.	INTRODUZIONE	97
7.2.	EQUAZIONE DI MOTO	
7.3.	SISTEMI NON LINEARI CONSERVATIVI: MOTO LIBERO	
7.3	1. Esempio	
7.4.	TECNICHE DI APPROSSIMAZIONE	110
7.4	1. Tecnica del bilanciamento delle armoniche	
7.4	2. Metodo di Ritz	
7.5.	VARIABILI DI STATO	115
7.6.	SISTEMI NON LINEARI CONSERVATIVI: MOTO FORZATO	117
7.6	1. Sistemi non lineari smorzati: moto libero	
7.7.	SMORZAMENTO EQUIVALENTE	
7.8.	SISTEMI NON LINEARI NON CONSERVATIVI: MOTO FORZATO	

1. Comportamento dei sistemi MDOF smorzati

Nei prossimi paragrafi si analizzeranno le caratteristiche del moto libero e forzato dei sistemi con più gradi di libertà (MDOF – *Multi Degrees of Freedom*) allo scopo di determinare rispettivamente autovalori e autovettori (pulsazioni proprie e modi propri), e una formulazione analitica per le funzioni che compongono la matrice di ricettanza del sistema.

Si inizierà con l'analizzare il caso più semplice di smorzamento proporzionale, una ipotesi che difficilmente può essere rigorosamente verificata nei sistemi meccanici, ma che consente di estendere in maniera estremamente semplice ai sistemi con più gradi di libertà i concetti già analizzati per i sistemi con un solo grado di libertà.

Successivamente l'analisi verrà estesa ai sistemi con smorzamento generale (nessuna ipotesi sulle matrici di smorzamento del sistema).

1.1. Smorzamento proporzionale

L'ipotesi di proporzionalità delle matrici di smorzamento (sia viscoso che strutturale), indica la possibilità di esprimere la matrice di smorzamento come combinazione lineare delle matrici di massa e rigidezza, ovvero:

 $C = \alpha M + \beta K$ (smorzamento viscoso);

 $H = \gamma M + \delta K$ (smorzamento strutturale);

con α , β , γ e δ coefficienti reali.

La stessa matrice modale ottenuta nel caso di assenza di smorzamento diagonalizza, oltre le matrici di massa M e di rigidezza K, anche quella di smorzamento C e H. Si ha infatti:

$$\Psi^{T}C\Psi = \Psi^{T}(\alpha M + \beta K)\Psi = \alpha \Psi^{T}M\Psi + \beta \Psi^{T}K\Psi = [\alpha m_{r} + \beta k_{r}]$$

 $\Psi^{T} H \Psi = \Psi^{T} (\gamma M + \delta K) \Psi = \gamma \Psi^{T} M \Psi + \delta \Psi^{T} K \Psi = [\gamma m_{r} + \delta k_{r}]$

Si può quindi concludere che i modi di vibrare del sistema di smorzato (con smorzamento proporzionale) coincidono con quelli del sistema non smorzato, e quindi sono anch'essi reali.

Disaccoppiando come già effettuato nel caso non smorzato si ottiene:

 $\Psi^T M \Psi \Psi^{-1} \ddot{x} + \Psi^T C \Psi \Psi^{-1} x + \Psi^T K \Psi \Psi^{-1} x = \Psi^T F \longrightarrow M_d \ddot{x}_p + C_d \dot{x}_p + K_d x_p = F_p;$

$$\Psi^T M \Psi \Psi^{-1} \ddot{x} + i \Psi^T H \Psi \Psi^{-1} x + \Psi^T K \Psi \Psi^{-1} x = \Psi^T F \longrightarrow M_d \ddot{x}_p + i H_d x_p + K_d x_p = F_p.$$

La r-esima (generica) equazione del sistema disaccoppiato risulta quindi:

$$m_r \ddot{x}_{pr} + (\alpha m_r + \beta k_r) \dot{x}_{pr} + k_r x_{pr} = f_{pr} e^{j\omega t}$$
$$m_r \ddot{x}_{pr} + [k_r + i(\gamma m_r + \delta k_r)] x_{pr} = f_{pr} e^{j\omega t}$$

Dalle precedenti si può osservare che mentre i modi rimangono gli stessi, le frequenze proprie sono diverse rispetto al caso non smorzato: diventano infatti complesse.

I moti delle n coordinate principali che caratterizzano il sistema sono quindi tutti del tipo armonico smorzato, ciascuno in corrispondenza di una determinata frequenza propria. Poiché inoltre si ha che:

$$x_p = \Psi^{-1} x$$

e quindi anche:

 $x = \Psi x_p$

si conclude che il moto della generica coordinata fisica è costituito dalla combinazione lineare (secondo i coefficienti dipendenti dalla matrice modale) di *n* moti armonici smorzati in corrispondenza delle *n* pulsazioni proprie.

1.1.1. Calcolo delle pulsazioni proprie: smorzamento strutturale

Partendo dal sistema delle equazioni di moto si ha:

$$M\ddot{x} + iHx + Kx = 0.$$

Introducendo la possibile soluzione:

$$x = X_0 e^{i\omega t}$$

nell'equazione matriciale di moto si ha:

$$[-M\omega^2 + iH + K]X_0e^{i\omega t} = 0$$

che risulta sempre verificata solo se:

$$[-M\omega^2 + iH + K]X_0 = 0.$$

In sostanza ci si è ricondotti ad un classico problema agli autovalori-autovettori. Questi ultimi, a seguito della ipotesi di proporzionalità e quanto già visto in precedenza, risultano i medesimi del sistema non smorzato (la matrice modale che diagonalizza le matrici $M \in K$ diagonalizza anche la matrice H).

Gli autovalori si possono ricercare annullando la matrice dei coefficienti del problema agli autovettori, ovvero imponendo:

$$\det[-M\omega^2 + iH + K] = 0$$

oppure anche

 $\det[I\omega^2 - iM^{-1}H - M^{-1}K] = 0.$

Le soluzioni della precedente equazione di ordine 2n in ω , o meglio di ordine n in ω^2 , non comprendendo l'equazione termini con esponente dispari, costituiscono gli autovalori del sistema. Tali valori sono evidentemente complessi, e si può dimostrare che, date le particolari proprietà delle matrici M e K (e di conseguenza anche di H), sia la parte reale che quella immaginaria delle soluzioni sono sempre positive. In tali ipotesi il generico (*r*-esimo) autovalore del sistema può essere esprimibile tramite la seguente espressione analitica:

$$\omega_{pr}^2 = \omega_{nr}^2 (1 + i\eta_r) = \omega_{nr}^2 + i\omega_{nr}^2 \eta_r$$
 per r=1,2,...,n.

Il termine ω_{nr} viene chiamato *pulsazione naturale del modo r-esimo* che risulta essere:

$$\omega_{nr}^2 = \frac{k_{dr}}{m_{dr}} \,.$$

Il termine η_r viene indicato come il *fattore di perdita del modo r-esimo* che risulta essere:

$$\eta_r = \frac{\gamma m_{dr} + \delta k_{dr}}{k_{dr}} = \frac{\gamma m_{dr}}{k_{dr}} + \frac{\delta k_{dr}}{k_{dr}} = \gamma \frac{m_{dr}}{k_{dr}} + \delta \frac{k_{dr}}{k_{dr}} = \gamma \frac{1}{\omega_{nr}^2} + \delta$$

I parametri caratteristici del moto libero del sistema smorzato, nel caso di smorzamento proporzionale, dipendono quindi dagli elementi delle matrici di massa e rigidezza diagonalizzate tramite la matrice modale.

1.1.2. Calcolo delle pulsazioni proprie: smorzamento viscoso

Nel caso di smorzamento viscoso si procede allo stesso modo. Partendo dal sistema delle equazioni di moto si ha:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0.$$

Introducendo la possibile soluzione:

$$x = X_0 e^{st}$$

nell'equazione matriciale di moto si ha:

$$[Ms^2 + Cs + K]X_0e^{st} = 0$$

che risulta sempre verificata solo se:

 $[Ms^{2} + Cs + K]X_{0} = 0.$

In sostanza ci si è ricondotti ad un classico problema agli autovalori-autovettori.

Gli autovettori, a seguito della ipotesi di proporzionalità, risultano ancora una volta i medesimi del sistema non smorzato. Gli autovalori si ricercano annullando la matrice dei coefficienti del problema agli autovettori, ovvero imponendo:

 $\det[Ms^2 + Cs + K] = 0.$

Le soluzioni s_r (r=1,2,...,2n) della precedente equazione di ordine 2n in ω costituiscono gli autovalori del sistema. Tali valori, essendo le matrici M, $K \in C$ reali, sono reali o complessi coniugati. Nell'ipotesi di smorzamento proporzionale si ha che gli autovalori sono coppie di complessi coniugati, con parte reale negativa. Gli autovalori s_r possono quindi essere espressi nella seguente forma:

$$s_r = -\omega_{nr}\xi_r \pm i\omega_{nr}\sqrt{1-\xi_r^2} \quad \text{con } r=1,2,...,n.$$

In tali ipotesi si ha quindi che il moto libero di un sistema con *n* gradi di libertà con smorzamento proporzionale è una combinazione lineare di *n* moti armonici smorzati caratterizzati dalle *n* pulsazioni proprie del sistema ω_{pr} e dagli *n* parametri di smorzamento viscoso dimensionale ξ_r e pulsazioni naturali ω_{nr} espressi tramite le seguenti relazioni:

$$\begin{split} \omega_{nr} &= \sqrt{\frac{k_{dr}}{m_{dr}}} \\ \xi_{r} &= \frac{\alpha m_{dr} + \beta k_{dr}}{2\sqrt{k_{dr}m_{dr}}} = \frac{\alpha m_{dr}}{2\sqrt{k_{dr}m_{dr}}} + \frac{\beta k_{dr}}{2\sqrt{k_{dr}m_{dr}}} = \frac{\alpha}{2} \frac{m_{dr}}{\sqrt{k_{dr}m_{dr}}} + \frac{\beta}{2} \frac{k_{dr}}{\sqrt{k_{dr}m_{dr}}} = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\omega_{nr}} + \frac{\beta}{2} \omega_{nr} \\ \omega_{pr} &= \omega_{nr} \sqrt{1 - \xi_{r}^{2}} \ . \end{split}$$

Si osservi inoltre che il modulo dell'autovalore (in pratica la frequenza propria complessa) risulta:

$$|s_{r}| = \sqrt{\left(\omega_{nr}\sqrt{1-\xi_{r}^{2}}\right)^{2} + \left(\omega_{nr}\xi_{r}\right)^{2}} = \sqrt{\omega_{nr}^{2}\left(1-\xi_{r}^{2}\right) + \omega_{nr}^{2}\xi_{r}^{2}} = \sqrt{\omega_{nr}^{2}} = \omega_{nr}$$

I parametri caratteristici del moto libero del sistema smorzato, nel caso di smorzamento proporzionale, dipendono quindi dagli elementi delle matrici di massa e rigidezza diagonalizzate. La soluzione del moto dell'*r*-esima coordinata principale risulta infatti:

$$x_{pr}(t) = X_{pr0}e^{-\omega_r\xi_r t}sen(\omega_r\sqrt{1-\xi_r^2}t+\varphi)$$

e risulta inoltre:

 $x = \Psi x_p$.

1.1.3. Moto forzato: smorzamento strutturale

Nel caso dei sistemi non smorzati, la generica componente di posto *ij* della matrice di ricettanza risultava del tipo:

$$\alpha_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\phi_{ik}\phi_{jk}}{\omega_k^2 - \omega^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi_{ik}\psi_{jk}}{k_k - m_k\omega^2}$$

Nel caso di smorzamento strutturale proporzionale (come pure di quello viscoso), è possibile ottenere una formulazione del tutto simile.

Partendo dal sistema delle equazioni di moto nel caso forzato si ha:

$$M\ddot{x} + iHx + Kx = F_0 e^{i\omega t}.$$

Osservata la linearità del sistema e il tipo di forzante applicata, si ha che la possibile soluzione dovrà essere del tipo:

$$x = X_0 e^{i\omega t}$$
.

Effettuando le derivate della soluzione e reintroducendola nell'equazione matriciale di moto si ottiene:

$$[-M\omega^2 + iH + K]X_0 e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$$

che risulta sempre verificata solo se:

$$[-M\omega^2 + iH + K]X_0 = F_0.$$

La relazione che lega l'ampiezza incognita delle vibrazioni X_0 alle ampiezze delle forzanti F_0 risulterà dunque:

$$X_{0} = [-M\omega^{2} + iH + K]^{-1}F_{0} = \alpha(\omega)F_{0} \qquad \text{con } \alpha(\omega) = [-M\omega^{2} + iH + K]^{-1}.$$

Sfruttando le proprietà diagonalizzanti della matrice modale si può ottenere una formulazione della matrice di ricettanza. Premoltiplicando per la matrice modale trasposta e postmoltiplicando per la matrice modale l'equazione dell'inversa della ricettanza si ottiene:

$$\Psi^{T} \alpha(\omega)^{-1} \Psi = \Psi^{T} (-\omega^{2} M + iH + K) \Psi = -\omega^{2} \Psi^{T} M \Psi + i \Psi^{T} H \Psi + \Psi^{T} K \Psi = -\omega^{2} M_{d} + iH_{d} + K_{d} = \begin{bmatrix} k_{d1} + ih_{d1} - \omega^{2} m_{d1} & 0 \\ & \ddots & \\ & & k_{di} + ih_{di} - \omega^{2} m_{di} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_{dn} + ih_{dn} - \omega^{2} m_{dn} \end{bmatrix}$$

Premoltiplicando la precedente relazione per l'inversa della matrice modale trasposta e postmoltiplicando per l'inversa della matrice modale si ottiene:

$$\left[\Psi^{T}\right]^{-1}\Psi^{T}\alpha(\omega)^{-1}\Psi\Psi^{-1} = \mathbf{I}\alpha(\omega)^{-1}\mathbf{I} = \alpha(\omega)^{-1} = \left[\Psi^{T}\right]^{-1}\left[K_{d} + iH_{d} - \omega^{2}M_{d}\right]\Psi^{-1}$$

da cui si ha:

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= \left[\alpha(\omega)^{-1} \right]^{-1} = \left[\left[\Psi^{T} \right]^{-1} \left(-\omega^{2} M_{d} + i H_{d} + K_{d} \right) \Psi^{-1} \right]^{-1} = \Psi \left(-\omega^{2} M_{d} + i H_{d} + K_{d} \right)^{-1} \Psi^{T} = \\ &= \Psi \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{d1} + i h_{d1} - \omega^{2} m_{d1}} & 0 \\ & \ddots \\ & \frac{1}{k_{di} + i h_{di} - \omega^{2} m_{di}} \\ 0 & & \ddots \\ & \frac{1}{k_{dn} + i h_{dn} - \omega^{2} m_{dn}} \end{bmatrix} \Psi^{T} \end{aligned}$$

Sviluppando i prodotti riga per colonna si può dimostrare che la generica funzione di ricettanza assuma la forma:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(\omega) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Psi_{ik} \Psi_{jk}}{k_{dk} + ih_{dk} - \omega^{2} m_{kd}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m_{dk}} \frac{\Psi_{ik} \Psi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \frac{h_{dk}}{k_{dk}} \frac{k_{dk}}{m_{dk}} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} \eta_{k} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \omega_{nk}^{2} + i \omega_$$

in cui i parametri modali A_{ijk} , gli elementi delle matrici modali, come pure le pulsazioni naturali e i fattori di perdita sono numeri reali, i cui valori sono stati identificati nei paragrafi precedenti.

1.1.4. Moto forzato: smorzamento viscoso

Nel caso di smorzamento viscoso proporzionale è possibile ottenere una formulazione delle funzioni di ricettanza del tutto simile a quella ottenuta nel paragrafo precedente. Partendo dal sistema delle equazioni di moto nel caso forzato si ha:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_0 e^{i\omega t}$$
.

Osservata la linearità del sistema e il tipo di forzante applicata, si ha che la possibile soluzione dovrà essere del tipo:

$$x = X_0 e^{i\omega t}$$
.

Effettuando le derivate della soluzione e reintroducendola nell'equazione matriciale di moto si ottiene:

$$[-M\omega^2 + i\omega C + K]X_0e^{i\omega t} = F_0e^{i\omega t}$$

che risulta sempre verificata solo se:

$$[-M\omega^2 + i\omega C + K]X_0 = F_0.$$

La relazione che lega l'ampiezza incognita delle vibrazioni X_0 alle ampiezze delle forzanti F_0 risulterà dunque:

$$X_0 = [-M\omega^2 + i\omega C + K]^{-1}F_0 = \alpha(\omega)F_0 \qquad \text{con } \alpha(\omega) = [-M\omega^2 + i\omega C + K]^{-1}.$$

Premoltiplicando per la matrice modale trasposta e postmoltiplicando per la matrice modale l'espressione analitica dell'inversa della matrice di ricettanza si ottiene:

$$\Psi^{T} \alpha(\omega)^{-1} \Psi = \Psi^{T} \left(-\omega^{2} M + i\omega C + K \right) \Psi = -\omega^{2} \Psi^{T} M \Psi + i\omega \Psi^{T} C \Psi + \Psi^{T} K \Psi = -\omega^{2} M_{d} + i\omega C_{d} + K_{d} = \begin{bmatrix} k_{d1} + i\omega c_{d1} - \omega^{2} m_{d1} & 0 \\ & \ddots & \\ & & k_{di} + i\omega c_{di} - \omega^{2} m_{di} \\ & & \ddots & \\ 0 & & k_{dn} + i\omega c_{dn} - \omega^{2} m_{dn} \end{bmatrix}$$

Premoltiplicando la precedente relazione per l'inversa della matrice modale trasposta e postmoltiplicando per l'inversa della matrice modale si ottiene:

$$\left[\Psi^{T}\right]^{-1}\Psi^{T}\alpha(\omega)^{-1}\Psi\Psi^{-1} = \mathrm{I}\alpha(\omega)^{-1}\mathrm{I} = \alpha(\omega)^{-1} = \left[\Psi^{T}\right]^{-1}\left[K_{d} + i\omega C_{d} - \omega^{2}M_{d}\right]\Psi^{-1}$$

da cui si ha:

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= \left[\alpha(\omega)^{-1} \right]^{-1} = \left[\left[\Psi^T \right]^{-1} \left(-\omega^2 M_d + i\omega C_d + K_d \right) \Psi^{-1} \right]^{-1} = \Psi \left(-\omega^2 M_d + i\omega C_d + K_d \right)^{-1} \Psi^T = \\ &= \Psi \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{d1} + i\omega c_{d1} - \omega^2 m_{d1}} & 0 \\ & \ddots \\ & \frac{1}{k_{di} + i\omega c_{di} - \omega^2 m_{di}} & \ddots \\ & 0 & & \frac{1}{k_{dn} + i\omega c_{dn} - \omega^2 m_{dn}} \end{bmatrix} \Psi^T \end{aligned}$$

Sviluppando i prodotti riga per colonna si può dimostrare che la generica funzione di ricettanza assuma la forma:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(\omega) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Psi_{ik} \Psi_{jk}}{k_{dk} + i\omega c_{dk} - \omega^{2} m_{kd}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m_{dk}} \frac{\Psi_{ik} \Psi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i \frac{c_{dk}}{m_{dk}} \frac{2\sqrt{k_{dk}}}{2\sqrt{k_{dk}}} - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{ik} \Phi_{jk}}{\omega_{nk}^{2} + i 2\omega_{nk} \xi_{k} \omega - \omega^{2}} = \sum_{k=$$

11

in cui ancora una volta sia i parametri modali A_{ijk} , gli elementi delle matrici modali, come pure le pulsazioni naturali e i fattori di smorzamento viscoso adimensionali sono numeri reali, i cui valori sono stati identificati nei paragrafi precedenti.

In ogni caso, se si fa il minimo comune multiplo, nel caso senza smorzamento si ha che le funzioni di ricettanza possono essere espresse come rapporto di polinomi a coefficienti reali di ordine *n* (denominatore) e *n-1* (numeratore), in ω^2 :

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\phi_{ik} \phi_{jk}}{(\omega_{k}^{2} - \omega^{2})} = \frac{\cdots}{(\omega_{1}^{2} - \omega^{2})(\omega_{2}^{2} - \omega^{2})\cdots(\omega_{n}^{2} - \omega^{2})} = \frac{P^{2(n-1)}(\omega)}{P^{2n}(\omega)} = \frac{P^{n-1}(\omega^{2})}{P^{n}(\omega^{2})}.$$

Nel caso con smorzamento proporzionale si può invece scrivere:

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\phi_{ik}\phi_{jk}}{(\omega_{k}^{2} - \omega^{2}) + i2\xi_{k}\omega_{k}\omega} = \frac{\cdots}{(\omega_{1}^{2} - \omega^{2} + i2\xi_{1}\omega_{1}\omega)(\omega_{2}^{2} - \omega^{2} + i2\xi_{2}\omega_{2}\omega)\cdots(\omega_{n}^{2} - \omega^{2} + i2\xi_{n}\omega_{n}\omega)} = \frac{P^{2(n-1)}(\omega)}{P^{2n}(\omega)}$$

in cui si nota come le funzioni di ricettanza possono essere espresse come rapporto di polinomi a coefficienti complessi di ordine 2n (denominatore) e 2n-1 (numeratore), in ω .

1.2. Smorzamento generale

Nel caso di smorzamento di tipo generale, ovvero non proporzionale, sia il comportamento libero che quello forzato dei sistemi MDOF possono essere caratterizzati tramite formulazioni simili a quelle già derivate per i sistemi con smorzamento proporzionale.

In particolare si verificherà che oltre alle pulsazioni proprie (autovalori), anche i modi propri del sistema (autovettori) diventano complessi. E mentre il significato dell'autovalore complesso dovrebbe oramai essere chiaro (le parti reale ed immaginaria indicano la pulsazione e lo smorzamento delle oscillazioni libere), quello degli autovettori complessi non è ancora stato affrontato.

1.2.1. Significato dei modi propri complessi

Nel caso di smorzamento generale si otterranno sempre coppie di autovalori-autovettori complessi. Quando in corrispondenza ad una frequenza propria ω_i corrisponde un modo complesso Ψ_i , si ha che tutti i gradi di libertà del sistema possono muoversi alla frequenza ω_i con moti armonici (smorzati) di ampiezza pari a $|\Psi_i|$. Tuttavia, a differenza del caso non smorzato o con smorzamento proporzionale, i vari gradi di libertà non si muovono più

necessariamente in fase o controfase tra loro (sfasati di 0 o π rad), ma si muovono sfasati in funzione di *fase*(Ψ_i). In sostanza non tutti i gradi di libertà raggiungono contemporaneamente i massimi spostamenti (positivi o negativi), come neppure si annullano tutti nello stesso istante, come invece succede nei sistemi a non smorzati o con smorzamento proporzionale.

Ad esempio, sia $\omega_i = 10+4i \text{ rad/s e } \Psi_i = [1+i 1+0.6i 1.1-0.1i]^T$. Risulterà anche $\Psi_i = [1 0.8-0.2i 0.5-0.6i]^T$ (la seconda 'versione' dell'autovettore i-esimo è proporzionale alla prima versione di Ψ_i) ed inoltre si avrà $|\Psi_i| = [1 0.8246 0.781]^T$.

In questo caso ci si aspetta un moto libero dei singoli gradi di libertà con le seguenti caratteristiche: moto oscillante con frequenza pari a 10 rad/s e con ampiezze decrescenti con il tempo secondo la legge esponenziale negativa e^{-4t} .

Risulta infatti:

$$x = X_0 e^{i\omega_t t} = X_0 e^{i(10+i4)t} = X_0 e^{i10t} e^{i(i4)t} = X_0 e^{-4t} e^{i10t}$$

con x = [x₁ x₂ x₃]^T.

Se il moto del grado di libertà x_1 è pari a $x_1(t) = \underline{A} \cdot e^{-4 \cdot t} \cdot sen(10 \cdot t + \underline{\phi})$ (le costanti $\underline{A} = \underline{\phi}$ sono state determinate imponendo le condizioni iniziali del moto) allora risultano anche:

 $x_{2}(t) = 0.8246 \cdot \underline{A} \cdot e^{-4 \cdot t} \cdot \operatorname{sen}(10 \cdot t + \underline{\phi} + \phi_{2})$ $x_{3}(t) = 0.781 \cdot \underline{A} \cdot e^{-4 \cdot t} \cdot \operatorname{sen}(10 \cdot t + \underline{\phi} + \phi_{3})$ essendo:

$$\varphi_2 = \operatorname{atan}\left(\frac{-0.2}{0.8}\right) = -0.245 \text{ rad};$$

 $\varphi_3 = \operatorname{atan}\left(\frac{-0.6}{0.5}\right) = -0.7854 \text{ rad}.$

1.2.2. Calcolo delle pulsazioni proprie: smorzamento strutturale

Nel caso in cui la matrice H di smorzamento strutturale non sia proporzionale, non è possibile trovare nessuna matrice modale Ψ che diagonalizzi contemporaneamente le matrici di massa, rigidezza e smorzamento, e quindi non è possibile disaccoppiare in tale maniera le equazioni di moto. Tuttavia è possibile osservare che le matrici di smorzamento e di rigidezza sono matrici omogenee, caratterizzate da elementi con le medesime dimensioni fisiche e che moltiplicano entrambi il vettore delle coordinate fisiche. E' quindi

possibile considerare, al posto delle due matrici reali K e H, una unica matrice complessa \overline{K} che moltiplica il vettore delle coordinate fisiche.

Partendo dal sistema delle equazioni di moto si ha quindi:

 $M\ddot{x} + iHx + Kx = 0 \implies M\ddot{x} + (iH + K)x = 0 \implies M\ddot{x} + \overline{K}x = 0 \text{ con } \overline{K} = (iH + K).$

Introducendo la possibile soluzione:

$$x = X_0 e^{i\omega t}$$

nell'equazione matriciale di moto si ha:

 $[-M\omega^2 + (iH + K)]X_0 e^{i\omega t} = 0$

che risulta sempre verificata solo se:

 $[-M\omega^2 + (iH + K)]X_0 = 0$ ovvero anche $[-M\omega^2 + \overline{K}]X_0 = 0$.

In sostanza ci si è ricondotti ad un classico problema agli autovalori-autovettori. Questi ultimi, pur complessi, diagonalizzano entrambe le matrici M e \overline{K} , anche se non singolarmente le matrici K e H.

Gli autovalori si possono ricercare annullando la matrice dei coefficienti del problema agli autovettori, ovvero imponendo:

$$\det[-M\omega^2 + \overline{K}] = 0$$

oppure anche:

$$\det[I\omega^2 - M^{-1}\overline{K}] = 0.$$

Le soluzioni (in termini di ω^2) della precedente equazione di ordine 2n in ω in cui non compaiono termini con esponente dispari, costituiscono gli autovalori del sistema, i cui valori sono evidentemente complessi. In tali ipotesi il generico (r-esimo) autovalore del sistema può essere esprimibile, come nel caso di smorzamento proporzionale, tramite la seguente espressione analitica:

$$\omega_{pi}^2 = \omega_{ni}^2 (1 + i\eta_i) = \omega_{ni}^2 + i\omega_{ni}^2\eta_i$$
 per i=1,2,...,n.

Il termine ω_{ni} viene chiamato *pulsazione naturale del modo i-esimo* che è concettualmente diverso dalla pulsazione naturale del sistema non smorzato, ma numericamente risulta essere molto prossimo ad esso.

Il termine η_i viene indicato come il *fattore di perdita del modo i-esimo*.

E' chiaro che, allo stesso modo delle pulsazioni proprie, anche i modi propri del sistema diventano complessi, in virtù della complessità dei termini della matrice \overline{K} (e quindi anche

di $M^{-1}\overline{K}$). Di conseguenza anche la matrice modale Ψ sarà complessa, ma conserverà le proprietà che le permettono di diagonalizzare le matrici $M \in \overline{K}$. Sarà quindi:

$$\Psi^{T}M\Psi = \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ m_{d} & \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$$
$$\Psi^{T}\overline{K}\Psi = \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ \overline{k}_{d} & \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

in cui sia i termini m_{di} che k_{di} (con i=1,2,...,n) sono complessi.

Come in precedenza risulterà inoltre:

$$\omega_{pi}^2 = \frac{k_{di}}{m_{di}} (\operatorname{con} i=1,2,...,n).$$

Esisterà inoltre anche una matrice modale normalizzante Φ (che può essere trovata esattamente come nel caso non smorzato) tale che risulti:

$$\Phi^{T} M \Phi = \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{T} \overline{K} \Phi = \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ & \omega_{pi}^{2} \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

In sostanza anche nel caso di smorzamento strutturale generale le equazioni di moto si possono disaccoppiare nella forma:

$$m_{di}\ddot{x}_{pi} + \bar{k}_{di}x_{pi} = 0$$
 (con i=1,2,...,n);

oppure:

$$\ddot{x}_{pi} + \omega_{pi}^2 x_{pi} = 0$$
 (con i=1,2,...,n);

formalmente identiche a quelle dei sistemi non smorzati, in cui tuttavia i coefficienti sono complessi.

1.2.3. Moto forzato: smorzamento strutturale

Nel caso in cui ad un sistema con smorzamento strutturale generale sia applicato un sistema di forzanti caratterizzate dalla medesima pulsazione ω , le equazioni di moto si scrivono allora nella forma:

$$M\ddot{x} + Kx + iHx = F_0 e^{i\omega t}$$

Nella formula precedente con il termine iHx si intende modellare un sistema di forze proporzionali agli spostamenti x del sistema (come le forze elastiche), ma in quadratura con gli spostamenti stessi (indicando quindi che sono forze dissipative). Si ricorda quindi che la precedente forma è valida solo nel caso in cui il sistema compia oscillazioni (e quindi sia sottoposto a forzanti) di tipo armonico.

Essendo la forzante armonica alla pulsazione *w*, anche la risposta sarà del tipo:

$$x = X_0 e^{i\omega t}.$$

Effettuando le derivate e sostituendo nella equazione matriciale di moto si ottiene:

$$\left(-\omega^2 M + K + iH\right) X_0 e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}.$$

Affinché la precedente relazione sia sempre verificata dovrà risultare quindi:

$$\left(-\omega^2 M + K + iH\right)X_0 = F_0;$$

relazione dalla quale si può ricavare la ricettanza del sistema:

$$X_0 = \left(-\omega^2 M + K + iH\right)^{-1} F_0 = \alpha(\omega)F_0 \implies \alpha(\omega) = \left(-\omega^2 M + K + iH\right)^{-1}.$$

Sfruttando le proprietà della matrice modale normalizzante Φ si può scrivere

$$\Phi^{T} \alpha(\omega)^{-1} \Phi = \Phi^{T} \left[-\omega^{2} M + (K + iH) \right] \Phi = -\omega^{2} \Phi^{T} M \Phi + \Phi^{T} \overline{K} \Phi =$$
$$= -\omega^{2} I + \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ & \omega_{pi}^{2} \\ 0 & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ & \omega_{pi}^{2} - \omega^{2} \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

In sostanza

Svolgendo le operazioni matriciali (e introducendo l'espressione analitica della pulsazione propria in funzione delle pulsazioni naturali e del fattore di perdita di ogni modo) si ottiene che il generico elemento di posto *ij* della matrice di ricettanza ha la forma:

$$\alpha_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\phi_{ik}\phi_{jk}}{(\omega_{pk}^{2} - \omega^{2})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\phi_{ik}\phi_{jk}}{(\omega_{nk}^{2} - \omega^{2}) + i\eta_{k}\omega_{nk}^{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi_{ik}\psi_{jk}}{m_{k}[(\omega_{nk}^{2} - \omega^{2}) + i\eta_{k}\omega_{nk}^{2}]} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi_{ik}\psi_{jk}}{\overline{k}_{dk} - m_{dk}\omega^{2}}$$

Si osservi che il termine di smorzamento strutturale è costante (indipendente dalla frequenza) e che anche i numeratori sono numeri complessi.

1.2.4. Calcolo delle pulsazioni proprie: smorzamento viscoso

Nel caso in cui la matrice C di smorzamento viscoso non sia proporzionale non è possibile trovare nessuna matrice modale Ψ che diagonalizzi contemporaneamente le matrici di massa, rigidezza e smorzamento, e quindi non è assolutamente possibile disaccoppiare le equazioni di moto. Nel caso in cui il sistema non sia sottoposto ad alcuna forzante, le equazioni di moto sono:

 $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0.$

Ipotizzando una soluzione del tipo:

$$x = \overline{x}e^{st}$$
;

effettuando le derivate e sostituendo nell'equazione di moto si ottiene la seguente espressione:

$$(Ms^2 + Cs + K)\overline{x}e^{st} = 0.$$

Come di consueto, affinché tale equazione sia verificata in ogni istante, dovrà essere:

$$(Ms^{2} + Cs + K)\bar{x} = 0.^{1}$$

Come nel caso dello smorzamento di tipo proporzionale ci si è ricondotti ad un classico problema agli autovalori-autovettori. Gli autovalori si ricercano annullando la matrice dei coefficienti del problema agli autovettori, ovvero imponendo:

$$\det[Ms^2 + Cs + K] = 0.$$

Le soluzioni s_r (r=1,2,...,2n) della precedente equazione di ordine 2n in ω , essendo le matrici M, $K \in C$ reali, sono reali o complesse coniugate. Nell'ipotesi di smorzamento generale si ha che gli autovalori s_r sono generalmente coppie di complessi coniugati, con parte reale negativa (come conseguenza delle proprietà generali delle matrici dei sistemi).

Si ha infatti che per il *Teorema Fondamentale dell'Algebra*, se s_r è un autovalore del sistema, lo è anche il suo coniugato $s_r^* (s_r=a+ib, s_r^*=a-ib)^2$. Per il medesimo teorema, se Ψ_r

```
(Ms^2 + Cs + K)\overline{x} = 0 \operatorname{con} \overline{x} = L(x) \operatorname{e} s \in \operatorname{Ce} \overline{x} \in \operatorname{C}^n.
```

¹ I precedenti passaggi costituiscono una sorta di trasformazione alla Laplace delle equazioni di moto. Se si considera infatti l'equazione matriciale di moto e si effettua la Trasformata di Laplace, nell'ipotesi di ricercare esclusivamente la soluzione di regime, si ottiene infatti:

 $^{^{2}}$ Se *s* è un numero complesso (come pure un vettore o una matrice di numeri complessi qualsiasi), con il simbolo s* si indica il suo complesso coniugato (stessa parte reale, parte immaginaria con segno opposto).

è l'autovettore del sistema corrispondente all'autovalore s_r , anche il suo coniugato Ψ_r^* è un autovettore e corrisponderà all'autovalore s_r^* .

In sostanza le coppie autovalori-autovettori sono esprimibili come:

$$\begin{cases} s_p \\ \Psi_p \end{cases} \quad \text{con } p=1,2,...,2n, \text{ si esprimono come} \qquad \begin{cases} s_r, s_r^* \\ \Psi_r, \Psi_r^* \end{cases} \quad \text{con } r=1,2,...,n.$$

Gli autovalori, essendo dotati di parte reale e parte immaginaria potrebbero essere espressi molto genericamente come:

$$s_r = a_r \pm ib_r;$$

con r=1,2,...,n e a_r e b_r numeri reali (utilizzando una volta il segno + e una volta il segno -, si ottengono tutti i 2n autovalori, che risultano quindi complessi e coniugati).

Tuttavia, per ottenere formulazioni simili a quelle già ottenute per i sistemi con un solo grado di libertà e per i sistemi MDOF con smorzamento proporzionale, si preferisce di esprimerli nella seguente forma:

$$s_p = -\omega_{nr}\xi_r \pm i\omega_{nr}\sqrt{1-\xi_r^2} \quad \text{con } r=1,2,...,n.$$

Anche per i sistemi con smorzamento viscoso generale permangono le proprietà di ortogonalità dei modi propri, solo che in questo caso assumono una forma differente. Si prendano infatti due coppie autovalore-autovettore se (s_p, Ψ_p) e (s_q, Ψ_q) .

Sono quindi identità le seguenti relazioni:

$$\left(Ms_p^2 + Cs_p + K\right)\Psi_p = 0$$
$$\left(Ms_q^2 + Cs_q + K\right)\Psi_q = 0.$$

Premoltiplicando la prima per Ψ_q^T si ottiene:

$$\Psi_{q}^{T} \left(M s_{p}^{2} + C s_{p} + K \right) \Psi_{p} = 0;$$

trasponendo la seconda e postmoltiplicando per Ψ_p si ha anche:

$$\Psi_{q}^{T} \left(M s_{q}^{2} + C s_{q} + K \right) \Psi_{p} = 0.^{3}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene (escludendo a priori il caso $s_p = s_q$):

$$\Psi_q^T \Big(M(s_p^2 - s_q^2) + C(s_p - s_q) \Big) \Psi_p = 0 \implies (s_p - s_q) \Psi_q^T \Big(M(s_p + s_q) + C \Big) \Psi_p = 0$$

$$\Rightarrow \Psi_q^T M(s_p + s_q) \Psi_p + \Psi_q^T C \Psi_p = 0 \implies (s_p + s_q) \Psi_q^T M \Psi_p + \Psi_q^T C \Psi_p = 0.$$
(a)

³ Nell'ipotesi, sempre verificata, che M sia simmetrica, esattamente come le matrici K e C (per Teorema Maxwell)

Moltiplicando la prima per s_q e la seconda per s_p si ottiene invece:

$$\Psi_q^T \left(M s_p^2 s_q + C s_p s_q + K s_q \right) \Psi_p = 0;$$

$$\Psi_q^T \left(M s_q^2 s_p + C s_q s_p + K s_p \right) \Psi_p = 0.$$

Sottraendo membro a membro si ottiene infine

$$\Psi_q^{T} \Big(M s_q s_p (s_p - s_q) + K (s_q - s_p) \Big) \Psi_p = 0 \implies \Psi_q^{T} \Big(M s_q s_p - K \Big) \Psi_p = 0$$

$$\implies s_q s_p \Psi_q^{T} M \Psi_p - \Psi_q^{T} K \Psi_p = 0.$$
(b)

Le relazioni (a) e (b) costituiscono l'equivalente delle proprietà di ortogonalità dei modi propri rispetto alle matrici M e K nei sistemi non smorzati, ma sia la forma che l'utilizzo pratico sono assai più difficilmente interpretabili.

La precedenti relazioni assumono un significato più chiaro se ci si riferisce a coppie coniugate di autovalori, ovvero se si suppone che s_p e s_q siano complessi coniugati e che quindi risulti

$$s_{p} = -\omega_{np}\xi_{p} + i\omega_{np}\sqrt{1-\xi_{p}^{2}};$$

$$s_{q} = s_{p}^{*} = -\omega_{np}\xi_{p} - i\omega_{np}\sqrt{1-\xi_{p}^{2}};$$

come pure risulti che $\Psi_{q} = \Psi_{p}^{*}.$

Si osserva infatti che risulta:

$$s_{p} + s_{q} = s_{p} + s_{p}^{*} = -\omega_{np}\xi_{p} + i\omega_{np}\sqrt{1 - \xi_{p}^{2}} - \omega_{np}\xi_{p} - i\omega_{np}\sqrt{1 - \xi_{p}^{2}} = -2\omega_{np}\xi_{p}\xi_{p}$$

$$s_{p}s_{q} = s_{p}s_{p}^{*} = (-\omega_{np}\xi_{p} + i\omega_{np}\sqrt{1 - \xi_{p}^{2}})(-\omega_{np}\xi_{p} - i\omega_{np}\sqrt{1 - \xi_{p}^{2}}) = (-\omega_{np}\xi_{p})^{2} - (i\omega_{np}\sqrt{1 - \xi_{p}^{2}})^{2} = \omega_{np}^{2}\xi_{p}^{2} + \omega_{np}^{2} - \omega_{np}^{2}\xi_{p}^{2} = \omega_{np}^{2}.$$

Sostituendo nelle precedenti si ottiene:

$$2\omega_{np}\xi_{p}\Psi_{p}^{H}M\Psi_{p}-\Psi_{p}^{H}C\Psi_{p}=0;$$

$$\omega_{np}^{2}\Psi_{p}^{H}M\Psi_{p}-\Psi_{p}^{H}K\Psi_{p}=0;$$

in cui si è indicato con ψ_p^H l'Hermitiano dell'autovettore ψ_p , essendo l'operatore Hermitiano $\{x\}^H$ del vettore (della matrice) generico *x*, il vettore (la matrice) trasposto del suo complesso coniugato $\{x\}^H = \{x^*\}^T$.

Dalle precedenti relazioni si ottiene direttamente:

$$2\omega_{np}\xi_{p} = \frac{\Psi_{p}^{H}C\Psi_{p}}{\Psi_{p}^{H}M\Psi_{p}} = \frac{c_{p}}{m_{p}};$$
$$\omega_{np}^{2} = \frac{\Psi_{p}^{H}K\Psi_{p}}{\Psi_{p}^{H}M\Psi_{p}} = \frac{k_{p}}{m_{p}}.$$

Le grandezze reali m_p , k_p e c_p , possono essere chiamate come massa modale, rigidezza modale e coefficiente di smorzamento modale del modo *p*-esimo (e relativi coefficienti adimensionali). Il significato fisico è diverso dai corrispondenti parametri sin qui presentati (i valori delle matrici di massa, rigidezza e smorzamento diagonalizzate nei sistemi senza smorzamento e con smorzamento proporzionale), nondimeno i valori numerici saranno generalmente molto simili.

Naturalmente se di smorzamento viscoso C è di tipo proporzionale, si ricade con le medesime formule, nei casi e nelle definizioni già presentate.

1.2.5. Moto forzato: smorzamento viscoso

Nel caso in cui ad un sistema con smorzamento viscoso generale sia applicato un sistema di forzanti caratterizzate dalla medesima pulsazione ω , le equazioni di moto si scrivono allora nella forma:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_0 e^{i\omega t}$$
;

la risposta a regime del sistema sarà allora:

$$x = X_0 e^{i\omega t};$$

da cui, sostituendo nella precedente si ottiene:

$$(-\omega^2 M + j\omega C + K)X_0 e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}.$$

La relazione che lega quindi gli spostamenti alle forzanti è dunque:

$$X_0 = \left(-\omega^2 M + j\omega C + K\right)^{-1} F_0;$$

quindi la ricettanza del sistema risulta:

$$\alpha(\omega) = \left(-\omega^2 M + j\omega C + K\right)^{-1} \quad \Leftarrow \quad X_0 = \alpha(\omega)F_0.$$

Si osservi ora che la parte in quadratura (parte immaginaria) delle FRFs dipende dalla pulsazione ω (al contrario che nel caso con smorzamento strutturale).

Per ottenere una formulazione analitica dei vari elementi della matrice di ricettanza giova passare dalle coordinate fisiche alla notazione con le *variabili di stato*.

Utilizzando tale notazione si passa da un sistema di n equazioni differenziali del II ordine a un sistema di 2n equazioni differenziali del I ordine.

Al posto del vettore delle coordinate fisiche $\{x\}$ si definisce un vettore di dimensioni $(2n^{x}1)$

$$\{s\} = \begin{cases} s_1 \\ s_2 \end{cases} = \begin{cases} x \\ \dot{x} \end{cases}.$$

Tale cambiamento di variabile trasforma il seguente sistema di *n* equazioni differenziali di II ordine di moto nelle coordinate fisiche (facendo riferimento al caso del moto libero):

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0;$$

in un sistema del tipo di 2n equazioni differenziali di I ordine nelle variabili di stato:

$$\dot{s} = As$$
;

ovvero:

$$\left\{\dot{s}\right\} = \left\{\begin{matrix}\dot{s}_1\\\dot{s}_2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\dot{x}\\\dot{x}\end{matrix}\right\} = \left[A\right] \left\{\begin{matrix}s_1\\s_2\end{matrix}\right\} = \left[A\right] \left\{\begin{matrix}x\\\dot{x}\end{matrix}\right\}$$

In effetti la rappresentazione più generale di un sistema meccanico attraverso le variabili di stato (tecnica *state-space*) prevede la definizione di un vettore di stato s attraverso cui esprimere la dinamica del sistema libero, di un vettore degli ingressi u (le forzanti) al sistema e di un vettore delle uscite y.

Attraverso una serie di equazioni differenziali del primo ordine che coinvolgono gli stati e gli ingressi si analizza la dinamica del sistema; le uscite dallo stesso si prevede possano essere, nel caso più generale, una combinazione lineare degli stati e degli ingressi.

In sostanza un qualsiasi problema meccanico può essere rappresentato dalla forma:

$$\begin{cases} \{\dot{s}\} = [A]\{s\} + [B]\{u\} \\ \{y\} = [C]\{s\} + [D]\{u\} \end{cases}$$

La dinamica è quindi rappresentata dalle prime 2n equazioni differenziali del primo ordine (n è il numero di gradi di libertà del sistema), le seconde r equazioni algebriche consentono di calcolare le uscite in funzione di stati e ingressi.



Ovviamente le matrici e vettori dovranno avere dimensioni:

$$\{s\} = \begin{cases} x \\ \dot{x} \end{cases} \quad (2n \times 1); \qquad \{u\} = \{f(t)\} \quad (m \times 1); \qquad \{y\} \quad (r \times 1); \\ [A] \quad (2n \times 2n); \qquad [B] \quad (2n \times m); \qquad [C] \quad (r \times 2n); \qquad [D] \quad (r \times m) \end{cases}$$

Ovviamente mentre il numero degli stati del sistema è univoco, in quanto dipende dal numero dei gradi di libertà, il numero m degli ingressi e r delle uscite dipendono di volta in volta dal numero delle forzanti applicate e dal numero delle variabili che si ha interesse ad avere in uscita.

Se si suppone di avere una forzante che agisce su ogni grado di libertà (m=n), e se si vuole portare un uscita tutti gli stati del sistema (posizione e velocità di ogni grado di libertà r=2n), si ha nel caso del seguente sistema con *n* gradi di libertà:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_0 e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \{\dot{s}\} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{cases} x \\ \dot{x} \end{cases} + \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ F_0 \end{cases} e^{i\omega t}$$

Da tale espressione è possibile ricavare facilmente le espressioni analitiche delle matrici A, B, $C \in D$ dello state-space⁴.

Risulta infatti semplicemente:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}; \dots [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}; \dots [C] = [I]; \dots [D] = [0].$$

Nel caso in cui si ricerchi la formulazione analitica della matrice di ricettanza, e ci si accontenta quindi di portare in uscita unicamente gli stati del sistema, è possibile utilizzare una forma alternativa.

Si ha sempre:

$$\{s\} = \begin{cases} s_1 \\ s_2 \end{cases} = \begin{cases} x \\ \dot{x} \end{cases} \quad (2n \times 1);$$

mentre l'equazione matriciale di moto può essere riorganizzata come segue:

$$M\{\ddot{x}\} + C\{\dot{x}\} + K\{x\} = \{F_0\}e^{i\omega t} \implies M\frac{d\{\dot{x}\}}{dt} + C\frac{d\{x\}}{dt} + K\{x\} = \{F_0\}e^{i\omega t} \implies M\{\dot{s}_2\} + C\{\dot{s}_1\} + K\{s_1\} = \{F_0\}e^{i\omega t} \implies [C \ M]\{\dot{s}\} + [K \ 0]\{s\} = \{F_0\}e^{i\omega t}$$

A queste n equazioni differenziali del I ordine nelle 2n variabili di stato, per ottenere un sistema risolvibile, è necessario affiancare altre n equazioni differenziali del I ordine

⁴ Si raccomanda di non confondere la matrice C dello state-space con la matrice di smorzamento viscoso del sistema.

(indipendenti) che coinvolgono ancora le variabili di stato. Una possibilità è quella di sviluppare la seguente identità:

$$M\{\dot{x}\} - M\{\dot{x}\} = 0 \implies M\{\dot{x}\} - M\frac{d\{x\}}{dt} = 0 \implies M\{s_2\} - M\{\dot{s}_1\} = 0 \implies$$
$$\implies [M \quad 0]\{\dot{s}\} + [0 \quad -M]\{s\} = 0.$$

Accoppiando le 2n equazioni così ottenute si ha che il sistema può essere descritto dalla seguente espressione matriciale:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \{ \dot{s} \} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \{ s \} = \begin{cases} F_0 \\ 0 \end{cases} e^{i\omega t}$$

Ci si è quindi ricondotti alla forma:

$$[A]\{\dot{s}\} + [B]\{s\} = \{f(t)\};\$$

in cui risulta:

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}.$$

Poiché inoltre si può facilmente verificare che la matrice [A] ha determinante non nullo (grazie alle proprietà delle matrici $M \in C^5$), la precedente forma può anche essere trasformata come segue:

$$\{\dot{s}\} + [A]^{-1}[B]\{s\} = [A]^{-1}\{f(t)\} \implies \{\dot{s}\} = [C]\{s\} + \{f(t)\}$$

avendo indicato:

$$[C] = -[A]^{-1}[B] \in \{\overline{f}(t)\} = [A]^{-1}\{f(t)\}.$$

Nel caso in cui non vi siano forzanti, il sistema è regolato dalla seguente equazione matriciale:

$$[A]{\dot{s}} + [B]{s} = 0$$

che rappresenta un sistema di 2n equazioni differenziali lineari del I ordine nelle 2n variabili di stato.

Se si suppone che le soluzioni del sistema siano del tipo:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix};$$

sussiste infatti la seguente relazione:

```
\det(A) = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) = \det(A_{22}) \cdot \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}).
```

⁵ Tale proprietà si può dimostrare facilmente grazie alla formula detta *Complement Formula di Schur*. Se si vuole calcolare il determinante di una matrice costituta da più partizioni, ovvero del tipo:

 $s=s_0e^{\lambda t}.$

Derivando e sostituendo nella precedente si ottiene la seguente relazione:

 $(\lambda[A]+[B])s_0e^{\lambda t}=0.$

Come di consueto, affinché tale equazione sia sempre verificata, dovrà essere:

 $(\lambda[A]+[B])s_0=0;$

equazione che si presenta ancora come un problema agli autovalori e autovettori.

Annullando il determinante della matrice dei coefficienti del precedente sistema algebrico lineare si trovano i valori di $\lambda = \lambda_r$ (con r=1,2,...,2n) che consentono di trovare soluzioni s_0 diverse da quella banale (autovalori).

$$\det(\lambda[A]+[B])=0$$

Le soluzioni s_0 calcolate in corrispondenza dei 2n autovalori rappresentano gli autovettori \mathcal{P}_r del sistema. La matrice modale che si ottiene quindi affiancando i 2n autovettori risulta allora quadrata e di dimensioni $(2n^x 2n)$

$$\mathcal{P}=[\mathcal{P}_1|\mathcal{P}_2|\dots|\mathcal{P}_{2n}]$$

I modi continuano a godere delle proprietà di ortogonalità (questa volta rispetto alle matrici $A \in B$), e quindi la matrice modale diagonalizza le matrici $A \in B$.

$$\mathcal{G}^{T}A\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & a_{d} & \\ & \ddots \end{bmatrix} \text{ (diagonale);}$$
$$\mathcal{G}^{T}B\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & b_{d} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \text{ (diagonale);}$$

e quindi gli autovalori (complessi) risulteranno:

$$\lambda_r = -\frac{b_{dr}}{a_{dr}} \operatorname{con} r = 1, 2, \dots, 2n.$$

Parimenti a quanto fino adesso osservato esisterà una matrice modale normalizzante $\overline{\mathcal{G}}$ tale che:

$$\overline{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} \mathcal{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{a_d}} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}^{T} \boldsymbol{A} \overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}} = [\boldsymbol{I}];$$

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}^{T} \boldsymbol{B} \overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \text{ (diagonale).}$$

Tornando al caso forzato, si avrà, nell'ipotesi di forzanti armoniche:

$$[A]\{\dot{s}\} + [B]\{s\} = \{f(t)\} \implies [A]\{\dot{s}\} + [B]\{s\} = \begin{cases} F_0 e^{i\omega t} \\ 0 \end{cases} = \{\overline{F}\} e^{i\omega t}$$

Anche la soluzione in termini di variabili di stato sarà del tipo:

$$\{s\} = \{s_0\} e^{i\omega t};$$

da cui derivando e sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene:

$$[i\omega[A]+[B]]\{s_0\}e^{i\omega t}=\{\overline{F}\}e^{i\omega t}.$$

Tale relazione sarà sempre verificata solo se:

$$[i\omega[A]+[B]]\{s_0\}=\{\overline{F}\};$$

e quindi da essa può ricavarsi la 'ricettanza' del sistema (in termini di variabili di stato):

$$\{s_0\} = [i\omega[A] + [B]]^{-1}\{\overline{F}\} \implies \{s_0\} = [\overline{\alpha}(\omega)]\{\overline{F}\} \qquad \text{con } [\overline{\alpha}(\omega)] = [i\omega[A] + [B]]^{-1}.$$

Sfruttando le già citate proprietà di ortogonalità:

$$\mathcal{G}^{T}\left[\overline{\alpha}(\omega)\right]^{-1}\mathcal{G} = \mathcal{G}^{T}\left[i\omega[A] + [B]\right]\mathcal{G} = i\omega \mathcal{G}^{T}\left[A\right]\mathcal{G} + \mathcal{G}^{T}\left[B\right]\mathcal{G} =$$
$$= i\omega\begin{bmatrix} \ddots & 0\\ a_{d}\\ 0 & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddots & 0\\ b_{d}\\ 0 & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & 0\\ b_{d} + i\omega a_{d}\\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

In sostanza

$$\mathcal{G}^{T}\left[\overline{\alpha}(\omega)\right]^{-1}\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} \implies \mathcal{G}^{-1}\left[\overline{\alpha}(\omega)\right]\mathcal{G}^{T}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & & \frac{1}{b_{d} + i\omega a_{d}} & & \\ & & & & & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}$$
$$\implies \left[\overline{\alpha}(\omega)\right] = \mathcal{G}\begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & & \frac{1}{b_{d} + i\omega a_{d}} & & \\ & & & & & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}}\mathcal{G}^{T}.$$

Si può facilmente verificare che la vera ricettanza $[\alpha(\omega)]$ del sistema (legame tra spostamenti e forze) non è altro che la prima partizione $(n^{x}n)$ in alto a sinistra della matrice

 $\left[\overline{\alpha}(\omega)\right]$. Parimenti si può verificare che la partizione in basso a sinistra corrisponde con la matrice di mobilità $[Y(\omega)]$:

$$\begin{bmatrix} \overline{\alpha}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha(\omega)] & * \\ [Y(\omega)] & ** \end{bmatrix}.$$

In ogni modo, svolgendo le operazioni matriciali si ottiene che il generico elemento di posto *ij* della matrice di ricettanza estesa $\left[\overline{\alpha}(\omega)\right]$ ha la forma:

$$\overline{\alpha}_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\mathcal{G}_{ik} \mathcal{G}_{jk}}{(b_{dk} + i\omega a_{dk})} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\mathcal{G}_{ik} \mathcal{G}_{jk}}{a_{dk} \left(\frac{b_{dk}}{a_{dk}} + i\omega\right)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\mathcal{G}_{ik} \mathcal{G}_{jk}}{a_{dk} \left(i\omega - \lambda_k\right)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\overline{\mathcal{G}}_{ik} \overline{\mathcal{G}}_{jk}}{(i\omega - \lambda_k)}.$$

Sia ha inoltre che se λ_k è un autovalore del sistema, per il Teorema Fondamentale dell'Algebra, lo è anche il suo complesso coniugato λ_k^* . Si ha inoltre che, sempre per il su citato teorema, i corrispondenti autovettori sono complessi coniugati, ovvero sono rispettivamente $\overline{\mathcal{G}}_k$ e $\overline{\mathcal{G}}_k^*$ (nel caso della matrice modale normalizzante).

La precedente relazione può quindi essere riscritta come segue:

$$\overline{\alpha}_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\overline{\mathcal{G}}_{ik} \overline{\mathcal{G}}_{jk}}{(i\omega - \lambda_k)} + \frac{\overline{\mathcal{G}}_{ik}^* \overline{\mathcal{G}}_{jk}^*}{(i\omega - \lambda_k^*)} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\overline{\mathcal{G}}_{ik} \overline{\mathcal{G}}_{jk}}{(i\omega - \lambda_k)} + \frac{(\overline{\mathcal{G}}_{ik} \overline{\mathcal{G}}_{jk})^*}{(i\omega - \lambda_k^*)} \right).$$

Sviluppando il generico addendo della precedente sommatoria si osserva che:

$$\frac{\overline{\mathcal{G}}_{ik}\overline{\mathcal{G}}_{jk}}{(i\omega-\lambda_{k})} + \frac{(\overline{\mathcal{G}}_{ik}\overline{\mathcal{G}}_{jk})^{*}}{(i\omega-\lambda_{k}^{*})} = \frac{(\overline{\mathcal{G}}_{ik}\overline{\mathcal{G}}_{jk})(i\omega-\lambda_{k}^{*}) + (\overline{\mathcal{G}}_{ik}\overline{\mathcal{G}}_{jk})^{*}(i\omega-\lambda_{k})}{(i\omega-\lambda_{k})(i\omega-\lambda_{k}^{*})} = \\
= \frac{i\omega(\overline{\mathcal{G}}_{ik}\overline{\mathcal{G}}_{jk}) - \lambda_{k}^{*}(\overline{\mathcal{G}}_{ik}\overline{\mathcal{G}}_{jk}) + i\omega(\overline{\mathcal{G}}_{ik}\overline{\mathcal{G}}_{jk})^{*} - \lambda_{k}(\overline{\mathcal{G}}_{ik}\overline{\mathcal{G}}_{jk})^{*}}{-\omega^{2} - i\omega(\lambda_{k} + \lambda_{k}^{*}) + \lambda_{k}\lambda_{k}^{*}} = \\
= \frac{i\omega((\overline{\mathcal{G}}_{ik}\overline{\mathcal{G}}_{jk}) + (\overline{\mathcal{G}}_{ik}\overline{\mathcal{G}}_{jk})^{*}) - (\lambda_{k}^{*}(\overline{\mathcal{G}}_{ik}\overline{\mathcal{G}}_{jk}) + \lambda_{k}(\overline{\mathcal{G}}_{ik}\overline{\mathcal{G}}_{jk})^{*})}{-\omega^{2} - i2\omega\operatorname{Re}(\lambda_{k}) + |\lambda_{k}|^{2}} = \frac{i2\omega\operatorname{Re}(\overline{\mathcal{G}}_{ik}\overline{\mathcal{G}}_{jk}) - 2\operatorname{Re}(\lambda_{k}(\overline{\mathcal{G}}_{ik}\overline{\mathcal{G}}_{jk})^{*})}{-\omega^{2} - i2\omega\operatorname{Re}(\lambda_{k}) + |\lambda_{k}|^{2}}$$

Quindi si ha:

$$\overline{\alpha}_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \frac{i2\omega \operatorname{Re}\left(\overline{\vartheta}_{ik} \,\overline{\vartheta}_{jk}\right) - 2\operatorname{Re}\left(\lambda_{k}\left(\overline{\vartheta}_{ik} \,\overline{\vartheta}_{jk}\right)^{*}\right)}{-\omega^{2} - i2\omega \operatorname{Re}(\lambda_{k}) + |\lambda_{k}|^{2}}.$$

Per quanto riguarda i numeratori, a parte l'effettivo valore numerico, si può quindi osservare che essi sono costituiti da funzioni lineari in ω in cui il coefficiente del termine proporzionale alla variabile indipendente è immaginario (si indichi con $i\alpha_{ijk}$), mentre quello

costante è reale (si indichi con β_{ijk}). In tale ipotesi la generica ricettanza può essere riscritta nella forma:

$$\overline{\alpha}_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \frac{i\omega\alpha_{ijk} + \beta_{ijk}}{-\omega^2 - i2\omega\operatorname{Re}(\lambda_k) + |\lambda_k|^2};$$

con α_{ijk} e β_{ijk} coefficienti reali.

Per quanto riguarda il denominatore, è ovvio che gli autovalori del sistema espresso in funzione delle variabili di stato devono essere gli stessi ricavati a partire dalle equazioni di moto del II ordine (nel paragrafo precedente)⁶. Si ha quindi:

$$\lambda_k = s_k = -\omega_{nk}\xi_k \pm i\omega_{nk}\sqrt{1-\xi_k^2};$$

da cui è facile verificare che:

$$\left|\lambda_{k}\right|^{2}=\omega_{nk}^{2};$$

 $\operatorname{Re}(\lambda_k) = -\omega_{nk}\xi_k.$

La generica funzione di ricettanza può quindi essere espressa tramite la seguente relazione:

$$\overline{\alpha}_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \frac{i\omega\alpha_{ijk} + \beta_{ijk}}{-\omega^2 + i2\omega\omega_{nk}\xi_k + \omega_{nk}^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_{ijk} + i\omega\alpha_{ijk}}{(\omega_{nk}^2 - \omega^2) + i2\omega\omega_{nk}\xi_k};$$

in cui tutti i coefficienti che vi compaiono sono reali.

Come è possibile osservare, a parte il numeratore complesso, la precedente formulazione è molo simile a quella ricavata nel caso di smorzamento proporzionale, e i singoli addendi sono assai simili alla ricettanza di un sistema con un solo grado di libertà e smorzamento viscoso.

Operando il minimo comune multiplo tra i vari addendi si ottiene che la generica funzione di ricettanza è una funzione razionale fratta, nella forma:

$$\alpha_{ij}(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)};$$

in cui i polinomi a numeratore e denominatore hanno coefficienti generalmente complessi. Si ha inoltre che il denominatore è un polinomio di ordine 2n nella variabile indipendente ω ;

Ritornando brevemente alla notazione in termini di variabili di stato, si ha che nel caso del sistema forzato:

il numeratore è invece costituito da un polinomio in ω di ordine massimo 2n-1.

⁶ La suddetta proprietà può essere dimostrata utilizzando la precedentemente citata Complement Formula di Schur.

 $[A]{\dot{s}} + [B]{s} = {\overline{F}} e^{i\omega t};$

sfruttando le condizioni di ortogonalità è possibile anche dimostrare il seguente risultato:

$$\begin{cases} X_0 \\ i\omega X_0 \end{cases} = \begin{cases} X_0 \\ \dot{X}_0 \end{cases} = \sum_{r=1}^{2n} \frac{\{\mathcal{G}_r\}^T \{\overline{F}\} \{\mathcal{G}_r\}}{a_r (i\omega - \lambda_r)} = \sum_{r=1}^{2n} \frac{\{\overline{\mathcal{G}}_r\}^T \{\overline{F}\} \{\overline{\mathcal{G}}_r\}}{(i\omega - \lambda_r)}.$$

1.3. Conclusioni

La risposta in frequenza di un qualunque sistema meccanico (smorzato o non) si ottiene dalla forma generale:

$$\alpha(\omega) = \sum_{r=1}^{n} \frac{C_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + iD_r}$$

in cui D_r (che può essere nullo nel caso di sistemi non smorzati) è reale, mentre C_r può essere anche immaginario. I termini D_r e C_r possono essere al più funzioni lineari di ω .

2. Modellazione con Matrici di Trasferimento

Per strutture continue e prive di ramificazioni.

Il corpo viene discretizzato in *n* conci (o elementi) di dimensioni opportune, ogni concio (*i*esimo) viene poi idealmente scomposto in due elementi:

• Un elemento rigido (nodo) nel quale si concentrano le proprietà inerziali del concio.

• Un elemento elastico (tratto) di lunghezza l_i privo di proprietà inerziali, nel quale si concentrano le proprietà elastiche del concio.

Si definisce il vettore di stato *S*, nel quale si organizzano opportunamente le variabili fisiche che caratterizzano lo stato di sollecitazione (Forze e momenti) e di deformazione corrispondente (spostamenti e rotazioni) della sezione.

- S^T_{Li}:vettore di stato all'inizio del tratto *i*-esimo esattamente alla sua interfaccia sinistra (Left);
- S_{Ri}^{T} :vettore di stato alla fine del tratto *i*-esimo esattamente alla sua interfaccia destra (**R**ight);
- Sⁿ_{Li}:vettore di stato all'inizio del disco *i*-esimo esattamente alla sua interfaccia sinistra (Left);

Sⁿ_{Ri}:vettore di stato alla fine del tratto *i*-esimo esattamente alla sua interfaccia destra (Right);



Il vettore di stato a destra del tratto *i*-esimo può essere espresso in funzione di quello a sinistra attraverso una matrice di tratto (T_i^T) i cui termini dipendono dalle caratteristiche del tratto elastico, cioè:

$$\left\{S_{Ri}^{T}\right\} = \left[T_{i}^{T}\right]\left\{S_{Li}^{T}\right\}$$

e analogamente per il nodo i-esimo

$$\left\{S_{Ri}^{n}\right\} = \left[T_{i}^{n}\right]\left\{S_{Li}^{n}\right\}$$

essendo poi ovviamente, per la congruenza all'interfaccia tratto-nodo:

$$\begin{cases} S_{Li}^n \\ S_{Ri}^n \end{cases} = \begin{cases} S_{Ri}^T \\ S_{Ri}^n \end{cases} = \begin{cases} S_{Li+1}^T \end{cases}$$

si ha la trasformazione dell'elemento:

$$\left\{S_{Li+1}^{T}\right\} = \left[T_{i}^{n}\right] \left[T_{i}^{T}\right] \left\{S_{Li}^{T}\right\},\$$

posso cioè mettere in relazione il vettore di stato di un elemento (i+1) con quello dell'elemento precedente (i) attraverso il prodotto di due matrici che contengono le caratteristiche di tratto e di nodo rispettivamente. Dato il vettore di stato all'estremo sinistro del rotore, applicando in maniera ricorsiva la trasformazione di elemento otteniamo il vettore di stato dell'estremo destro del rotore si ottiene:

$$\{S_N\} = [T_G]\{S_0\}$$
 con $[T_G] = \prod_{i=1}^N [T_i^n][T_i^T].$

2.1. Metodo di Holtzer

Il presente metodo è utilizzato per il calcolo delle pulsazioni proprie di strutture continue non ramificate soggette a vibrazioni torsionali.

Rappresenta il prototipo della metodologie basate sul metodo delle matrice di trasferimento.



Il rotore viene discretizzato in conci od elementi di forma cilindrica di dimensioni opportune, ogni concio *i* viene idealmente scomposto in due elementi:

• Un disco rigido (nodo) nel quale si concentrano le proprietà inerziali dell'elemento.

• Un tratto di lunghezza l_i (pari alla lunghezza del concio), privo di massa, nel quale si

concentrano le proprietà elastiche dell'elemento. Si definisce il vettore di stato $S = \begin{cases} \varphi \\ M_z \end{cases}$.

Interrelazioni nel tratto - Noto il vettore di stato all'interfaccia sinistra, basandosi sulla teoria dei continui elastici soggetti a torsione semplice, si ricava immediatamente il vettore di stato all'interfaccia destra tramite una trasformazione lineare con la matrice di tratto:

$$\begin{cases} \varphi \\ M_z \end{cases}_{Ri}^T = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_i^T \begin{cases} \varphi \\ M_z \end{cases}_{Li}^T \qquad \text{con } \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_i^t = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l_i}{GI_{pi}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{Interrelationi nel nodo - Noto il}$$

vettore di stato all'interfaccia sinistra, basandosi sui fondamenti della dinamica dei corpi rigidi, è immediato risalire al vettore di stato all'interfaccia destra tramite una trasformazione lineare con la matrice di nodo:

$$\begin{cases} \varphi \\ M_z \end{cases}_{Ri}^n = [T]_i^n \begin{cases} \varphi \\ M_z \end{cases}_{Li}^n \qquad \text{con } [T]_{Ri}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J_{zi} & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di trasferimento dell'intero elemento - Imponendo la congruenza del vettore di stato all'interfaccia tratto-nodo (stato destro del tratto = stato sinistro del nodo), si ha che:

$$\begin{cases} \varphi \\ M_z \end{cases}_{Li+1}^T = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_i^n \begin{cases} \varphi \\ M_z \end{cases}_{Ri}^T$$
$$\begin{cases} \varphi \\ M_z \end{cases}_{Li+1}^T = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_i^n \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_i^T \begin{cases} \varphi \\ M_z \end{cases}_{Li}^T$$

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_{i}^{n} \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_{i}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{li}{GI_{pi}} \\ -\omega^{2}J_{zi} & \left(-\omega^{2}J_{zi}\frac{l_{i}}{GI_{pi}} + 1 \right) \end{bmatrix}.$$

Quindi, in sostanza:

- 1. Si discretezza un rotore (struttura continua $\rightarrow \infty$ g.d.l.) in *n* elementi $\rightarrow n$ g.d.l $\rightarrow n$ pulsazioni naturali;
- Si sceglie un verso con cui percorrere tutta la struttura del rotore (ad. esempio dall'estremo sinistro verso l'estremo destro);
- Dato il vettore di stato all'estremo sinistro del rotore, applicando in maniera ricorsiva la trasformazione di elemento, otteniamo il vettore di stato dell'estremo destro del rotore:

$$\begin{cases} \varphi \\ M_z \end{cases}_N = \prod_{k=1}^N [T]_k^n [T]_k^T \begin{cases} \varphi \\ M_z \end{cases}_{L_1} = \begin{bmatrix} T_{11}(\omega_k^2) & T_{12}(\omega_k^2) \\ T_{21}(\omega_k^2) & T_{22}(\omega_k^2) \end{bmatrix} \begin{cases} \varphi \\ M_z \end{cases}_0$$

4. Si impone la congruenza con le condizioni di vincolo (nell'ipotesi che le sezioni vincolate siano gli estremi del rotore).

Supponiamo ad esempio di avere un sistema incastrato.



Ovviamente in questo caso risulterà sempre:

$$\begin{cases} \varphi \\ 0 \end{cases}_{N} = \begin{bmatrix} T_{11}(\omega_{k}^{2}) & T_{12}(\omega_{k}^{2}) \\ T_{21}(\omega_{k}^{2}) & T_{22}(\omega_{k}^{2}) \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ M_{z} \end{cases}_{0}$$

Tale sistema ammette soluzione diversa da quella banale ($M_z=0$ assenza di vibrazione torsionale) se e solo se T₂₂=0.

Poiché i termini T_{ij} sono funzioni di tipo polinomiale di ω^2 , imporre tal condizione corrisponde a trovare gli zeri del polinomio $T_{22}(\omega^2)$, che inoltre è di ordine 2*n* con solo le potenze pari.

Quindi ogni valore ω_k così trovato costituisce una delle pulsazioni proprie (e quindi anche naturali) del rotore. Infatti le pulsazioni proprie di un sistema vibrante sono le uniche pulsazioni con cui il sistema può effettuare vibrazioni armoniche che si mantengono

teoricamente invariate fino a che non intervenga un qualche altro fattore esterno. Naturalmente le pulsazioni (e quindi le frequenze) proprie sono funzione delle caratteristiche geometriche e meccaniche del rotore, ma anche delle varie condizioni al contorno. Una qualsiasi oscillazione che si inneschi a pulsazioni diverse da quelle proprie verrebbe rapidamente estinta grazie all'effetto delle reazioni vincolari e/o delle azioni interne al rotore stesso.



Difetti del metodo:

• non fornisce alcuna informazione sui modi di vibrare;

• Per strutture ramificate la soluzione è possibile, ma richiede strutture di calcolo particolari caso per caso, difficilmente generalizzabili.

2.2. Metodo di Miklestadt

Scopo : calcolo delle frequenze proprie (e quindi naturali) di una trave elastica continua di sezione variabile soggetta a sole deformazioni flessionali (nato per ali aerei).



La deformata della trave è nel piano x,z.

Analogamente a quanto si fa nel metodo di Holzer, la trave viene suddivisa in conci (elementi) di lunghezza opportuna. Ciascun concio viene idealmente scomposto in due sottosistemi:

•Un **tratto** di lunghezza l_i pari a quella del concio stesso nel quale si concentrano tutte le proprietà elastiche dell'elemento;

•Un nodo nel quale si concentrano tutte le proprietà inerziali del concio di partenza.

 $S = \begin{cases} u \\ \varphi \\ F_x \\ M_y \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{freccia lungo l'asse x,} \\ \text{rotazione attorno all'asse y,} \\ \text{taglio lungo l'asse x,} \\ \text{momento flettente attorno all'asse y,} \end{cases}$

Con le stesse convenzioni usate nella descrizione del metodo di Holzer e tenendo conto che $\frac{du}{dz} = \varphi; \frac{dM}{dz} = T;$ possiamo determinare la due matrici di trasferimento (di tratto e di nodo) che consentono, noto il vettore di stato in una delle interfacce estreme dell'elemento di individuare il vettore di stato nella interfaccia opposto con una semplice trasformazione lineare.

Interrelazione di tratto: teoria dei continui elastici soggetti a flessione semplice

Dove:

 l_i –lunghezza del tratto *i*-esimo;

E – modulo di Young;

G – modulo di elasticità trasversale;

A_i – area di sezione del tratto *i*-esimo;

 χ -fattore di taglio;

Jy-momento della sezione;

 ω – pulsazione della vibrazione ;

m_i – massa dell'elemento *i*-esimo;

J_v – momento d'inerzia.

Interrelazione di nodo: fondamenti della dinamica dei corpi rigidi

Matrice di trasferimento dell'intero elemento: congruenza del vettore di stato all'interfaccia tratto-nodo.

$$\left\{S_{Li+1}^{T}\right\} = \left[T\right]_{i}^{n} \left[T\right]_{i}^{T} \left\{S_{Li}^{T}\right\}.$$

Quindi praticamente si procede come segue:

- Si sceglie un verso con cui percorrere tutta la struttura del rotore (ad. esempio dall'estremo sinistro verso l'estremo destro);
- Dato il vettore di stato all'estremo sinistro del rotore, applicando in maniera ricorsiva la trasformazione di elemento, otteniamo il vettore di stato dell'estremo destro del rotore:

$$\left\{S\right\}_{N} = \prod_{k=1}^{N} \left[\left[T(\omega^{2})\right]_{k}^{n} \left[T(\omega^{2})\right]_{k}^{T}\right] \left\{S\right\}_{0}$$

3. Si impongono le condizioni al contorno (vincoli), e si constata che le soluzioni non banali si ottengono solo in corrispondenza di particolari valori di ϖ che annullano il determinante di una sottomatrice 2x2 (variabile in funzione dei vincoli) estratta da quella indicata al punto precedente.

Ad esempio, per una trave incastrata all'estremo sinistro si ha:

$$\begin{bmatrix} u \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{N} = \begin{bmatrix} T_{11}(\omega^{2}) & T_{12}(\omega^{2}) & T_{13}(\omega^{2}) & T_{14}(\omega^{2}) \\ T_{21}(\omega^{2}) & T_{22}(\omega^{2}) & T_{23}(\omega^{2}) & T_{24}(\omega^{2}) \\ T_{31}(\omega^{2}) & T_{31}(\omega^{2}) & T_{33}(\omega^{2}) & T_{34}(\omega^{2}) \\ T_{41}(\omega^{2}) & T_{42}(\omega^{2}) & T_{43}(\omega^{2}) & T_{44}(\omega^{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{x} \\ M_{y} \end{bmatrix}_{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} T_{33} \cdot F_{x} + T_{33} \cdot M_{y} = 0 \\ T_{43} \cdot F_{x} + T_{44} \cdot M_{y} = 0 \\ T_{43} \cdot F_{x} + T_{44} \cdot M_{y} = 0 \end{bmatrix}$$

Affinché tale sistema ammetta soluzione diversa da quella banale (sistema non sollecitato $F_x=0; M_y=0$) deve annullarsi il determinante della matrice dei coefficienti (funzione di ω^2): $\begin{vmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{34} & T_{44} \end{vmatrix} = 0 \implies T_{33} \cdot T_{44} - T_{34} \cdot T_{34} = 0$

Poiché i termini T_{ij} sono funzioni di tipo polinomiale di ω^2 ciò corrisponde a trovare gli zeri del polinomio, che sono le pulsazioni naturali ω_k cercate.

3. Modelli a Parametri Distribuiti

L'analisi di un sistema continuo, che ha infiniti gradi di libertà, può essere vista come estrapolazione dell'analisi di sistemi discreti a N GdL con N tendente a infinito. Analiticamente nel continuo però si ha a che fare con equazioni alle derivate parziali in quanto le grandezze che definiscono il moto del sistema sono funzioni contemporaneamente sia dal tempo t, sia dallo spazio.

Per ottenere modelli matematici che riproducano assai fedelmente la realtà fisica, tutti i sistemi reali andrebbero essere studiati come continui. Tuttavia non è possibile trovare la soluzione esatta delle equazioni differenziali alle derivate parziali se non in casi particolarmente semplici: in strutture complesse la soluzione analitica, utilizzando le equazioni proprie del continuo, non è ottenibile. In questi casi bisogna quindi ricondursi a schemi discreti, mediante metodologie a parametri concentrati o agli elementi finiti.

I sistemi continui che studieremo si limitano a casi semplici per i quali è possibile la trattazione analitica in forma chiusa.

3.1. VIBRAZIONI TRASVERSALI NELLE FUNI

Detta x l'ascissa corrente lungo la fune, si introducono alcune ipotesi semplificative. Si assume costante lungo la fune la tensione T, ottenuta precaricando assialmente la fune. Il moto della fune avviene in un piano qualunque contenente l'asse della fune: a tale scopo si deve ritenere la fune dotata di simmetria rispetto al suo asse baricentrico



Per l'equilibrio in direzione y di un elemento di fune di massa ρdx (ρ densità lineare) si ha:

$$\rho dx \cdot y = -Tsen\beta + Tsen\beta';$$

cioè:

$$\rho dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T \frac{\partial y}{\partial x} + T \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \right);$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2};$$

indicando con $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ ([*m/s*]) velocità con cui si propaga l'onda, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$

L'integrale generale di questa equazione differenziale (soluzione di D'Alambert) può essere scritto nella forma:

$$y(x,t) = c_1 \cdot f_1(x+ct) + c_2 \cdot f_2(x-ct)$$
.

La precedente funzione rappresenta due onde che si propagano in versi opposti con velocità $c; f_1 e f_2$ sono due funzioni che dipendono dai vincoli, dallo smorzamento, dalle riflessioni ecc...

E' però più conveniente utilizzare l'approccio di Fourier (che fornisce la soluzione in forma chiusa di equazioni differenziali alle derivate parziali), scrivendo la soluzione nella forma: $y(x,t) = \varphi(x) \cdot f(t);$

la soluzione può essere quindi immaginata come il prodotto di due funzioni che dipendono una (ϕ) solo dallo spazio, l'altra (f) solo dal tempo.

Se si ricercano moti armonici che non si estinguono nel tempo si può supporre che $f(t) = e^{j\omega t}$ (funzione armonica di pulsazione incognita);

quindi sarà anche:

$$y(x,t) = \varphi(x)e^{j\omega t}$$

Quindi si ha:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} e^{i\omega t} = \varphi " e^{i\omega t}$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \varphi (x) \cdot (-\omega^2) e^{i\omega t}$$

da cui:

$$\varphi(x) \cdot \left(-\omega^2\right) \cdot e^{i\omega t} = c^2 \cdot \varphi''(x) \cdot e^{i\omega t}.$$

Poiché tale equazione deve essere valida per ogni t, e indicando con $\alpha = \frac{\omega}{c}$, si ha:

$$\alpha^2 \cdot \varphi(x) + \varphi''(x) = 0;$$
che è un'equazione differenziale ordinaria del 2°ordine nella sola variabile x, la cui soluzione è $\varphi(x) = A\sin(\alpha x) + B\cos(\alpha x)$.

Se la fune ha lunghezza *l* ed è tesa agli estremi, le condizioni al contorno (di vincolo) sono: per *x*=0, *y*=0; per *x*=*l*, *y*=0 ;da cui si ricava *B*=0 e sin(αl) = 0 $\Rightarrow \alpha l = k\pi$.

Pertanto le pulsazioni proprie con cui si muove il sistema continuo sono $\omega_k = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, e

sono infinite al variare di k, quindi la legge diventa: $y(x,t) = A\sin(\frac{k\pi}{l}x) \cdot e^{j\omega_k t}$.

Poiché il sistema è lineare, esso nel caso più generale vibrerà dunque secondo una combinazione lineare di funzioni armoniche alle pulsazioni ω_k (con *k* intero positivo):

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\frac{k\pi}{l}x) \cdot e^{j\sqrt{\frac{T}{\rho}}\frac{k\pi}{l}t};$$

in cui i coefficienti A_k della combinazione lineare sono da determinare con le condizioni iniziali.

Studiando un qualsiasi sistema continuo quindi si avranno sempre infinite pulsazioni proprie e, corrispondentemente, infiniti modi di vibrare. Nel sistema continuo è inoltre possibile descrivere la generica deformata del moto a regime come combinazione lineare dei modi propri di vibrare.

Nella figura seguente si riportano, a titolo di esempio, le prime tre deformate (modi di vibrare) di una corda tesa (relative quindi alle prime tre pulsazioni proprie).



3.2. VIBRAZIONI LONGITUDINALI DI UNA TRAVE CONTINUA

Analizziamo le vibrazioni longitudinali (onde di pressione) nell'intorno della condizione di equilibrio statico in travi aventi una dimensione, quella longitudinale, preponderante rispetto alle altre. La trave è omogenea, continua, a sezione (A) costante.



Analizziamo il concio elementare di lunghezza dx, facendone l'equilibrio in direzione x

$$(N+dN) - N = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

u(x,t) rappresenta lo spostamento della sezione della trave in direzione x, ρ è la densità del materiale.

Essendo poi $N = A\sigma = AE\varepsilon = AE\frac{\partial u}{\partial x}$, l'equazione diventa: $AE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx$ e semplificando:

$$\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

indicando con $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ([*m/s*]) si perviene a un'equazione formalmente uguale a quella del

caso della fune tesa:

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Poniamo come nel caso precedente:

$$u(x,t) = \varphi(x)e^{j\omega t};$$

l'equazione diventa:

$$\varphi''(x) + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi(x) = 0 \Rightarrow \alpha^2 \cdot \varphi(x) + \varphi''(x) = 0;$$

la cui soluzione è $\varphi(x) = A\sin(\alpha x) + B\cos(\alpha x)$.

Le condizioni al contorno nel caso di trave di lunghezza *l*, incastrata all'estremo sinistro sono:

per *x*=0, *u*=0; per *x*=*l*, *N*=0; da cui, poiché:

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x} = EA \varphi'(x) e^{j\omega t};$$

si ricava B=0 e $A\alpha \cos(\alpha l) = 0 \Rightarrow \alpha l = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con k intero.

Le pulsazioni proprie con cui si muove il sistema continuo sono $\omega_k = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{(2k+1)\pi}{l}$, e sono infinite al variare di *k*. In corrispondenza della generica pulsazione ω_k lo spostamento della generica sezione di ascissa *x* sarà allora $u(x,t) = A \cdot sin\left(\frac{2k+1}{l}\pi x\right) \cdot e^{j\omega_k t}$.

Il parametro *A* lo si trova con le condizioni iniziali, è un numero complesso che contiene modulo e fase dell'oscillazione della trave nel tempo; servono perciò due condizioni per individuarlo totalmente, per esempio la posizione e la velocità di un punto qualsiasi all'istante iniziale.

Poiché anche stavolta il sistema è lineare, la soluzione generale sarà data dalla combinazione lineare degli infiniti moti armonici corrispondenti alle varie ω_k :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot \sin\left(\frac{2k+1}{l}\frac{\pi}{2}x\right) \cdot e^{j\sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{(2k+1)\pi}{l}\frac{\pi}{2}t}$$

Gli infiniti coefficienti A_k si trovano considerando le infinite condizioni iniziali di tutti i punti della trave.

Le prime tre deformate della trave sono riportate nella figura seguente, in cui si può osservare che le deformate sono multipli dispari di quarti di seno, per x=0 u=0, per x=l $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.



Se invece la trave fosse incastrata ad entrambi gli estremi (per x=0 u=0, per x=l u=0.) le prime deformate sarebbero le seguenti.



3.3. VIBRAZIONI FLESSIONALI DI UNA TRAVE CONTINUA

Analizziamo le oscillazioni trasversali nell'intorno della condizione di equilibrio statico in una trave ipotizzando che si tratti di una trave omogenea, elastica e a sezione trasversale S costante. Si suppone poi l'assenza di carichi assiali e si analizza il moto solo direzione trasversale, coincidente con una direzione principale di inerzia della trave.

Dalla Scienza delle Costruzioni si sa che per le travi inflesse valgono le seguenti relazioni in ogni generica sezione distante x da un estremo:



T(x) = sollecitazione di taglio;

M(x) = sollecitazione di flessione;

q(x) = carico distribuito;

Poiché nelle travi inflesse la deformazione dovuta al taglio è trascurabile rispetto a quella dovuta alla flessione è possibile calcolare l'equazione dell'asse della trave, indicando con y(x) l'equazione della linea elastica e con $\varphi(x)$ la rotazione di una generica sezione si ha:



J = momento di inerzia di S rispetto all'asse neutro.

Il carico distribuito sulla trave non è altro che la forza di inerzia: $q(x) = -\rho S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$, l'equazione della linea elastica diventa allora:

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = -\frac{\rho S}{EJ} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2};$$

indicando con $c = \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}$ ([m²/s]) si arriva a un'equazione formalmente simile a quella dei

casi precedenti ma con le derivate quarte:

$$c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Anche in questo caso si pone:

$$y(x,t) = \varphi(x)e^{j\omega t}$$
.

Quindi si ha:

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = \varphi^{IV}(x)e^{i\omega t}$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \varphi(x) \cdot \left(-\omega^2\right)e^{i\omega t}$$

da cui:

$$c^{2}\varphi^{IV}(x)\cdot e^{i\omega t}+\varphi(x)\cdot (-\omega^{2})\cdot e^{i\omega t}=0;$$

sempre vera per ogni t se:

$$\varphi^{IV}(x) - \alpha^4 \cdot \varphi(x) = 0 \operatorname{con} \alpha = \sqrt{\frac{\omega}{c}}.$$

La soluzione generale è del tipo:

 $\varphi(x) = a\sin(\alpha x) + b\cos(\alpha x) + c\sinh(\alpha x) + d\cosh(\alpha x);$

per cui:

$$\varphi^{I}(x) = a\alpha \cos(\alpha x) - b\alpha \sin(\alpha x) + c\alpha \cosh(\alpha x) + d\alpha \sinh(\alpha x)$$

$$\varphi^{II}(x) = -a\alpha^{2} \sin(\alpha x) - b\alpha^{2} \cos(\alpha x) + c\alpha^{2} \sinh(\alpha x) + d\alpha^{2} \cosh(\alpha x)$$

$$\varphi^{III}(x) = -a\alpha^{3} \cos(\alpha x) + b\alpha^{3} \sin(\alpha x) + c\alpha^{3} \cosh(\alpha x) + d\alpha^{3} \sinh(\alpha x)$$

le costanti da determinare sono 4 e vengono imposte con le condizioni al contorno, per esempio nel caso di incastro si ha per x=0 si ha y(x)=0 e $\varphi(x)=0$, per x=l T=0 e M=0. Si determinano così le pulsazioni proprie ω_k e la le deformate (i modi propri).

4. Elementi Finiti

Tramite il metodo agli Elementi Finti (FEM – Finite Element Method) è possibile modellare e risolvere problemi analiticamente esprimibili tramite equazioni differenziali alle derivate parziali. Tale metodo è utilizzato largamente nella statica e dinamica strutturale, nonché nella fluidodinamica.

Un corpo continuo (in teoria descrivibile tramite parametri distribuiti) viene discretizzato (tramite una *mesh* – una suddivisione geometrica) in un numero (generalmente molto elevato) di elementi mono-, bi-, o tri-dimensionali a seconda delle esigenze di modellazione e della sua forma geometrica. Ciascuno di questi elementi (ogni *elemento finito* – nel senso di piccolo, ma non infinitesimo) è caratterizzato da un certo numero di *nodi* (punti che generalmente ne determinano la forma geometrica); ciascuno di essi è dotato di uno o più gradi di libertà. Ciascun elemento finito è quindi caratterizzato da un numero di gradi di libertà totale costituito dalla somma dei gradi di libertà dei nodi.

Con tale tecnica si vuol descrivere il comportamento (in termini di spostamenti, velocità e stati di tensione e deformazione) di ciascun punto all'interno dell'elemento finito in funzione degli spostamenti (generalizzati – possono esserci anche le rotazioni) dei nodi. Noti gli *spostamenti nodali*, attraverso le funzioni di forma (shape functions) è possibile caratterizzare completamente il comportamento di ogni punto interno all'elemento finito considerato.

4.1. Alcuni Tipi di Elementi Finiti

Esistono elementi finiti mono-, bi-, o tri-dimensionali.

L'elemento **BAR** è il più semplice elemento finito, ed è mono-dimensionale sia nella forma che nel comportamento. Esso è costituito da due nodi, aventi ciascuno un grado di libertà: la traslazione nella direzione della congiungente i nodi stessi.



Tale elemento può rivelarsi molto utile per lo studio delle vibrazioni longitudinali delle travi. Il comportamento di ogni punto interno all'elemento, in corrispondenza della progressiva x, viene ricostruito sulla base della conoscenza degli spostamenti nodali $u_1 e u_2$,

ovviamente funzioni del tempo ($u_1=u_1(t)$, $u_2=u_2(t)$). In particolare lo spostamento del generico punto in corrispondenza dell'ascissa x sarà funzione dell'ascissa stessa e del tempo: $u_x=u_x(x,t)$.

L'elemento **BEAM** è apparentemente molto simile al BAR: è mono-dimensionale nella forma ma non nel comportamento. Come il BAR esso è costituito da due nodi, ma questi hanno ciascuno due gradi di libertà: possono traslare in direzione normale alla direzione della congiungente i nodi stessi, e possono ruotare.



Tale elemento, avente quindi 4 gradi di libertà, può rivelarsi molto utile per lo studio delle vibrazioni flessionali delle travi. Il comportamento di ogni punto interno all'elemento, in corrispondenza della progressiva x, viene ricostruito sulla base della conoscenza degli spostamenti nodali (generalizzati) u₁, u₂, u₃, e u₄, ovviamente funzioni del tempo (u_i=u_i(t) per i=1,2,3,4). In particolare lo spostamento in direzione y del generico punto in corrispondenza dell'ascissa x sarà funzione dell'ascissa stessa e del tempo: u_{1x}=u_{1x}(x,t). Qualora interessasse, è possibile anche considerare la rotazione della sezione nell'intorno dell'ascissa x: u_{2x}=u_{2x}(x,t).

Con il termine elemento **SHELL** (lamina, superficie, guscio) si intende genericamente indicare una classe di elementi finiti aventi geometria di tipo bi-dimensionale (ma il loro comportamento è generalmente tridimensionale). Esistono elementi con forma di parallelogramma (e quindi anche rettangolari) o triangolare (quest'ultima assai utile per *meshare* elementi meccanici di forma irregolare); il numero di gradi di libertà è variabile sia in funzione del numero dei nodi (3 o 4), sia del numero dei gradi di libertà del singolo nodo (al massimo 6).



Tali elementi, aventi quindi un minimo di 3 gradi di libertà (SHELL triangolare con 1 grado di libertà per nodo), può rivelarsi molto utile per lo studio di corpi il cui spessore è molto sottile rispetto alla superficie. Nel caso più semplice (riportato in figura) il comportamento di ogni punto P interno all'elemento, in corrispondenza delle coordinate P=(x,y), viene ricostruito sulla base della conoscenza degli spostamenti nodali (generalizzati) u₁, u₂, u₃ (e u₄), ovviamente funzioni del tempo (u_i=u_i(t) per i=1,2,3(,4)). In particolare lo spostamento in direzione z (ortogonale all'elemento) del generico punto in corrispondenza delle coordinate (x,y) sarà funzione delle coordinate stesse e del tempo: u_{xy}=u_{xy}(x,y,t).

Con il termine elemento **BRICK** (mattone, scatola) si intende genericamente indicare una classe di elementi finiti aventi geometria tri-dimensionale (solidi). Esistono elementi di forma parallelepipeda o tetraedrica; il numero di gradi di libertà è variabile sia in funzione del numero dei nodi (8 o 4), sia del numero dei gradi di libertà del singolo nodo (al massimo 6). Per un BRICK di forma parallelepipeda, il massimo numero di gradi di libertà è dunque 48; se si considerano le sole traslazioni nodali, ci si riduce a 24 gradi di libertà.



Nel caso dell'elemento parallelepiedo riportato in figura a sinistra, il comportamento di ogni punto P interno all'elemento, in corrispondenza delle coordinate P=(x,y,z), viene ricostruito sulla base della conoscenza degli spostamenti nodali (generalizzati) degli 8 nodi dell'elemento. Ovviamente gli spostamenti nodali generalizzati sono funzioni del tempo ($u_i=u_i(t)$ e in particolare lo spostamento q del generico punto P in corrispondenza delle coordinate (x,y,z) sarà funzione delle coordinate stesse e del tempo: q=q(x,y,z,t). Va inoltre detto che esistono elementi finiti con facce centrate (un nodo al centro di ogni faccia), e anche elementi a corpo centrato (un nodo nel 'centro' dell'elemento finito). Il numero di gradi di libertà di un elemento finito solido può risultare quindi anche molto superiore a 48.

4.2. Funzioni di Forma

Si prenda come riferimento l'elemento BRICK in figura. Associato all'elemento si prende un sistema di riferimento cartesiano avente, per semplicità, l'origine coincidente con uno dei nodi. Il punto generico all'interno dell'elemento sarà caratterizzato da una terna di coordinate cartesiane P=P(x,y,z). Si definisca poi il vettore degli spostamenti (generalizzati) dei nodi u(t), costituito dall'insieme delle coordinate (generalizzate) dei singoli nodi, un vettore tempo-dipendente. Nel caso in cui i gradi di libertà di ogni nodo siano solo traslazioni si ha:

$$\left\{\mathbf{u}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathbf{u}_1\\\mathbf{u}_2\\\vdots\\\mathbf{u}_n\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}u_{1x}\\u_{1y}\\u_{1z}\\u_{2x}\\\vdots\\u_{2y}\\\vdots\\u_{nz}\end{matrix}\right\}.$$



Analogamente s definisca il vettore q degli spostamenti (generalizzati) del punto generico P, evidentemente funzione della posizione del punto stesso e del tempo. Sarà quindi q=q(x,y,z,t) e, nel caso in cui si considerino solo le traslazioni, si avrà:

$$\left\{\mathbf{q}\right\} = \left\{\begin{matrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{matrix}\right\}.$$

Tramite le *funzioni di forma* si ipotizza di riuscire a descrivere in maniera sufficientemente precisa, le relazioni che legano lo spostamento q del generico punto P agli spostamenti

nodali u. Si suppone inoltre che le funzioni di forma siano dipendenti esclusivamente dalla posizione (dalle coordinate x, y e z), per cui si avrà che:

$$\left\{\mathbf{q}(x, y, z, t)\right\} = \left[S(x, y, z)\right]\left\{\mathbf{u}(t)\right\}.$$

E' evidente che se q è un vettore (3^x1), e se u è un vettore (3n^x1) (supponendo che l'elemento abbia n nodi con 3 gradi di libertà ciascuno), allora la [S(x,y,z)] è in effetti una matrice di funzioni di forma di dimensioni (3^x3n).

Va detto comunque che di solito si usa supporre che gli spostamenti del generico punto P in una certa direzione dipendano esclusivamente dagli spostamenti nodali nella medesima direzione. Si ha quindi che la matrice delle funzioni di forma è generalmente costituita *a blocchi* o *a bande*, ovvero sarà della forma:

$$\begin{cases} q_x(x, y, z, t) \\ q_y(x, y, z, t) \\ q_z(x, y, z, t) \end{cases} = \begin{bmatrix} S_{xx}(x, y, z) & 0 & 0 \\ 0 & S_{yy}(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & S_{zz}(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{cases} \mathbf{u}_x(t) \\ \mathbf{u}_y(t) \\ \mathbf{u}_z(t) \end{cases};$$

in cui i 'blocchi' S_{xx} , S_{yy} , S_{zz} , sono delle matrici (1^xn), o meglio dei vettori riga con tante componenti quanti sono i nodi.

Le funzioni di forma che compongono la matrice possono, in teoria, essere scelte arbitrariamente. In realtà la scelta ricade quasi sempre su funzioni polinomiali di ordine opportuno (in dipendenza delle condizioni 'al contorno' che possono essere imposte). Le funzioni di forma dovrebbero infatti avere le seguenti caratteristiche:

- essere continue e derivabili fino ad un determinato ordine che dipende dal tipo di elemento considerato;
- se si fa in modo di applicare ai nodi un moto rigido, dai calcoli che verranno successivamente sviluppati e che coinvolgono le funzioni di forma e le loro derivate, dovrà risultare che l'energia potenziale accumulata dall'elemento sia nulla;
- se si impone uno stato di deformazione costante (sempre tramite gli spostamenti dei nodi), dovrà risultare che anche il conseguente stato di tensione sia costante;
- se l'elemento è teoricamente isotropo, anche le funzioni di forma dovrebbero essere tali;
- se si considerano elementi adiacenti, aventi quindi alcuni nodi in comune, a parità di spostamenti dei nodi in comune, le zone di confine degli elementi devono comportarsi in modo congruente.



Purtroppo non sempre è possibile trovare funzioni di forma che rispettino tutte le suddette proprietà.

Se per quanto riguarda il legame tra gli spostamenti nodali e quelli del generico punto P, identificato dalle coordinate (x,y,z), risulta:

 $\{\mathbf{q}(x, y, z, t)\} = [S(x, y, z)]\{\mathbf{u}(t)\};$

anche per lo stato di deformazione nell'intorno del medesimo punto vale una relazione del tutto simile, ovvero:

 $\left\{ \mathbf{\varepsilon}(x, y, z, t) \right\} = \left[b(x, y, z) \right] \left\{ \mathbf{u}(t) \right\}.$

Va specificato che con ε si intende indicare il vettore (colonna) che contiene tutti gli elementi del tensore di deformazione nell'intorno del punto P (ε_{xx} , ε_{xy} , ε_{xz} , ε_{yx} , ecc...), mentre la matrice [*b*] (di dimensioni opportune dipendenti dalle dimensioni di ε e dal numero dei gradi di libertà dell'elemento) sarà costituita dalle derivate parziali delle funzioni di forma rispetto alle coordinate (x,y,z).

Analogamente si può ricavare una relazione che lega lo stato di deformazione allo stato di tensione nell'intorno del generico punto P. Risulterà infatti:

 $\left\{ \boldsymbol{\sigma}(x, y, z, t) \right\} = \left[E(x, y, z) \right] \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) \right\} = \left[E(x, y, z) \right] \left[b(x, y, z) \right] \left\{ \mathbf{u}(t) \right\};$

in cui σ è il vettore (colonna) che contiene tutti gli elementi del tensore di sollecitazione nell'intorno del punto P (σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , σ_y , ecc...), mentre la matrice [*E*] rappresenta un qualcosa di analogo al modulo di Young per lo stato di pura compressione. La matrice [*E*] sarà assai spesso una matrice costante, ma nel caso più generale le sue componenti possono dipendere dalla posizione del punto P all'interno dell'elemento, e quindi dalle coordinate (x,y,z).

Si può aggiungere che la velocità del punto P si relaziona alle velocità nodali come segue: $\{\dot{\mathbf{q}}(x, y, z, t)\} = [S(x, y, z)]\{\dot{\mathbf{u}}(t)\};$

essendo, come già detto, le funzioni di forma indipendenti dal tempo.

Parimenti si può infine ricavare il vettore degli spostamenti virtuali (nodali) del sistema: $\{\delta \mathbf{q}(x, y, z, t)\} = [S(x, y, z)]\{\delta \mathbf{u}(t)\}.$

4.3. Equazioni di Moto dell'Elemento

L'obiettivo della tecnica agli elementi finiti è quello di ottenere una serie di equazioni differenziali che coinvolgano le gli spostamenti nodali, che descrivano il più fedelmente possibile il comportamento dinamico dei soli nodi della struttura. Risolte tali equazioni (in funzione delle condizioni iniziali e delle eventuali forzanti) è possibile quindi, tramite le funzioni di forma, risalire alla dinamica di ogni punto del sistema.

E' evidente quindi che sia il sistema 'vero', a parametri distribuiti, che il suo modello agli elementi finiti, dovranno avere le medesime caratteristiche dinamiche. Se sottoposti quindi a uno stesso stato di deformazione (a cui consegue il corrispondente stato di tensione), a spostamenti caratterizzati dalle medesime velocità in corrispondenza dei nodi, a sistemi di forze simili, i due sistemi dovranno:

- 1. avere la stessa energia potenziale;
- 2. avere la stessa energia cinetica;
- 3. compiere lo stesso lavoro infinitesimo in corrispondenza dei medesimi spostamenti virtuali.

Per un sistema a parametri distribuiti, l' energia potenziale, quella cinetica e il lavoro sviluppato in corrispondenza ad un sistema di forze distribuite f(x,y,z,t) si trovano come segue:

$$U = \frac{1}{2} \int_{v} \{ \mathbf{\epsilon} \}^{T} \{ \mathbf{\sigma} \} dV ;$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{v} \rho \{ \dot{\mathbf{q}} \}^{T} \{ \dot{\mathbf{q}} \} dV ;$$

$$\delta L = \frac{1}{2} \int_{v} \{ \delta \mathbf{q} \}^{T} f(x, y, z, t) dV$$

Nell'ipotesi di voler descrivere la dinamica degli spostamenti nodali attraverso un sistema di equazioni differenziali del II ordine alla derivate totali, si avrebbe che il sistema sarebbe descritto da una relazione del tutto simile alla seguente:

 $M\{\mathbf{\ddot{u}}\} + K\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}(t)\}.$

Facendo riferimento al suddetto modello, le grandezze riportate in precedenza assumerebbero la seguente formulazione:

$$U = \frac{1}{2} \{\mathbf{u}\}^T K\{\mathbf{u}\};$$
$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{u}}\}^T M\{\dot{\mathbf{u}}\};$$
$$\delta L = \frac{1}{2} \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}(t)\}.$$

Per trovare quindi le giuste matrici di massa M e rigidezza K, nonché per trasformare il sistema di forze distribuite f(x,y,z,t) in un sistema di forze nodali (applicate ai nodi) $\mathbf{f}(t)$ equivalente, sarà necessario imporre l'uguaglianza delle suddette grandezze nelle due forme, utilizzando le funzioni di forma e le loro derivate.

Uguagliando le rispettive espressioni si ottiene:

$$U = \frac{1}{2} \{ \mathbf{u} \}^{T} K \{ \mathbf{u} \} = \frac{1}{2} \int_{v} \{ \mathbf{\varepsilon} \}^{T} \{ \mathbf{\sigma} \} dV = \frac{1}{2} \int_{v} \{ \mathbf{u}(t) \}^{T} [b(x, y, z)]^{T} [E(x, y, z)] [b(x, y, z)] \{ \mathbf{u}(t) \} dV = \frac{1}{2} \{ \mathbf{u}(t) \}^{T} \int_{v} [b(x, y, z)]^{T} [E(x, y, z)] [b(x, y, z)] dV \{ \mathbf{u}(t) \}$$

da cui si ha:

$$\begin{split} K &= \int_{v} [b(x, y, z)]^{T} [E(x, y, z)] [b(x, y, z)] dV \,. \\ T &= \frac{1}{2} \{ \dot{\mathbf{u}} \}^{T} M \{ \dot{\mathbf{u}} \} = \frac{1}{2} \int_{v} \rho \{ \dot{\mathbf{q}} \}^{T} \{ \dot{\mathbf{q}} \} dV = \frac{1}{2} \int_{v} \rho \{ \dot{\mathbf{u}}(t) \}^{T} [S(x, y, z)]^{T} [S(x, y, z)] \{ \dot{\mathbf{u}}(t) \} dV = \\ &= \frac{1}{2} \{ \dot{\mathbf{u}}(t) \}^{T} \int_{v} \rho [S(x, y, z)]^{T} [S(x, y, z)] dV \{ \dot{\mathbf{u}}(t) \} \end{split}$$

dalla quale si ottiene:

$$M = \int_{V} \rho [S(x, y, z)]^{T} [S(x, y, z)] dV;$$

essendo in generale anche la densità funzione dello spazio, ovvero:

$$\rho = \rho(x, y, z).$$

Per quanto riguarda la trasformazione delle forze distribuite in forze nodali si ha inoltre:

$$\delta L = \frac{1}{2} \{ \delta \mathbf{u} \}^T \{ \mathbf{f}(t) \} = \frac{1}{2} \int_{v} \{ \delta \mathbf{q} \}^T f(x, y, z, t) dV = \frac{1}{2} \int_{v} \{ \delta \mathbf{u}(t) \}^T [S(x, y, z)]^T f(x, y, z, t) dV = \frac{1}{2} \{ \delta \mathbf{u}(t) \}^T \int_{v} [S(x, y, z)]^T f(x, y, z, t) dV$$

e quindi anche:

 $\left\{\mathbf{f}(t)\right\} = \int_{V} \left[S(x, y, z)\right]^{T} f(x, y, z, t) dV$

Se fossero infine presenti forze concentrate, se queste agiscono in corrispondenza di qualche nodo, potrebbero essere direttamente sommate al vettore f(t) delle forze nodali precedentemente calcolato. Nel caso siano invece applicate in punti interni a qualche elemento, con una tecnica del tutto analoga a quella presentata in precedenza è possibile 'distribuirle' tra i nodi dell'elemento stesso.

Si può inoltre aggiungere che quasi sempreù la matrice di rigidezza viene calcolata con la tecnica precedentemente riportata; a volte invece la matrice di massa viene ricavata semplicemente condensando la massa del sistema in corrispondenza dei nodi. Utilizzando infatti la formulazione generale (quella precedentemente sviluppata, che presuppone il calcolo di alcuni integrali) si ottiene una matrice delle masse 'solo' simmetrica (e non diagonale, come visto fino ad ora nei sistemi a parametri concentrati). Inoltre non sono infrequenti casi in cui qualche elemento risulti negativo. Invece condensando semplicemente la massa in corrispondenza dei nodi si ottiene una matrice delle masse delle semplicemente la massa del sistemi a parametri concentrati). Inoltre non sono infrequenti casi in cui qualche elemento risulti negativo. Invece condensando semplicemente la massa in corrispondenza dei nodi si ottiene una matrice delle masse dell

E' ovvio che una matrice delle masse diagonale consente di utilizzare algoritmi di calcolo più veloci, e le medesime tecniche per la risoluzione delle equazioni relative ai modelli a parametri concentrati. Tuttavia va fatto notare che la precisione dei risultati diminuisce sensibilmente: per ottenere la stessa precisione del metodo 'classico' è quindi necessario incrementare il numero di elementi finiti.

Vale la pena solo accennare che nel caso l'oggetto dell'analisi di un sistema meccanico siano le pulsazioni proprie: se si prende come soluzione 'vera' quella ottenibile tramite le tecniche di analisi con i parametri distribuiti, le pulsazioni proprie ottenibili con la modellazione FEM risulteranno superiori a quelle vere, quelle ottenibili con i modelli a parametri concentrati saranno invece inferiori.

4.4. Rotazione delle Equazioni di Moto

Con la trattazione fin qui esposta sono state ricavate le equazioni di moto dell'elemento: $M{\{\ddot{\mathbf{u}}\}+K\{\mathbf{u}\}=\{\mathbf{f}(t)\}}.$

Risolvendo le precedenti equazioni differenziali di II ordine si può determinare il comportamento di ogni punto P=(x,y,z) interno all'elemento considerato. Va osservato tuttavia che sia le equazioni che le coordinate del punto considerato sono relative al sistema di *riferimento locale* dell'elemento stesso.

Per modellare un sistema meccanico (e non), è in generale necessario suddividerlo in un gran numero di elementi. Per ottenere l'equazione dell'intero sistema c'è quindi bisogno di 'assemblare' le equazioni dei vari elementi, ma prima occorre che queste siano riferite ad un unico sistema di riferimento, che chiameremo *riferimento globale*.

E' noto che è possibile esprimere le coordinate di un punto rispetto a più sistemi di riferimento, pur rimanendo questo univocamente determinato (da una diversa terna di coordinate cartesiane per ognuno dei sistemi di riferimento considerati). E' inoltre di conoscenza comune il fatto che per passare da un certo sistema di riferimento ad un altro è sufficiente operare una semplice trasformazione che si concretizza nella pre-moltiplicazione del vettore delle coordinate nel 'vecchio' sistema di riferimento per la cosiddetta *matrice di rotazione*. Quest'ultima è costituita dall'insieme dei coseni direttori degli assi di un sistema di riferimento (3 per ogni asse) espressi rispetto agli assi dell'altro.

Si ha quindi che una matrice di rotazione \mathbf{R} è esprimibile genericamente nella seguente forma:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$

in cui l_x , m_x e n_x sono i coseni direttori dell'asse x di uno dei sistemi di riferimento rispetto ai tre assi coordinati dell'altro, e medesimo significato assumono le altre terne $(l_y, m_y e n_y)$ e $(l_z, m_z e n_z)$.⁷

 $^{^{7}}$ Nel caso tra le coordinate nodali generalizzate non vi siano solo spostamenti, ma anche rotazioni, la matrice di rotazione **R** assumerà una forma più complessa, ma le sue caratteristiche generali e il suo modo di utilizzo non subiranno sostanziali variazioni.

Nel nostro caso si ha quindi che le coordinate del generico nodo (*i*-esimo) dell'elemento espresse nel sistema si riferimento locale $\{\mathbf{u}_i\}_l$, possono essere espresse in funzione delle corrispondenti coordinate nel riferimento globale $\{\mathbf{u}_i\}_g$ attraverso la relazione:

$$\left\{\mathbf{u}_{i}\right\}_{l} = \left\{\begin{matrix}u_{ix}\\u_{iy}\\u_{iz}\end{matrix}\right\}_{l} = \begin{bmatrix}l_{x} & m_{x} & n_{x}\\l_{y} & m_{y} & n_{y}\\l_{z} & m_{z} & n_{z}\end{bmatrix}\left\{\begin{matrix}u_{ix}\\u_{iy}\\u_{iz}\end{matrix}\right\}_{g} = \mathbf{R}\left\{\begin{matrix}u_{ix}\\u_{iy}\\u_{iz}\end{matrix}\right\}_{g} = \mathbf{R}\left\{\mathbf{u}_{i}\right\}_{g}.$$



Ovviamente vale anche la relazione inversa, ossia:

 $\left\{\boldsymbol{u}_{i}\right\}_{g}=\mathbf{R}^{-1}\left\{\boldsymbol{u}_{i}\right\}_{l}.$

La matrice di rotazione **R** ha inoltre la proprietà che la sua inversa coincide con la trasposta $(\mathbf{R}^{-1}=\mathbf{R}^{T})$, e questo può essere facilmente dimostrato osservando che la matrice \mathbf{R}^{-1} costituisce anch'essa una matrice di rotazione per passare dal riferimento globale a quello locale. Ovviamente poiché gli angoli che formano tra di loro gli assi dei due sistemi di riferimento non mutano, così come i relativi coseni direttori. Nella matrice di rotazione tuttavia questi vanno organizzati in maniera diversa a seconda se si vuole passare dal sistema di riferimento locale a quello globale o viceversa: con facili passaggi si può verificare che effettivamente le due matrici sono l'una la trasposta dell'altra.

Le equazioni di moto precedentemente ricavate, sono ovviamente riferite ai singoli sistemi di riferimento locali dei vari elementi, per cui sarebbe più corretto indicarle come segue: $M_{l} \{ \mathbf{\ddot{u}} \}_{l} + K_{l} \{ \mathbf{u} \}_{l} = \{ \mathbf{f}(t) \}_{l}.$

Il vettore delle coordinate nodali $\{\mathbf{u}\}_{l}$ altro non è che l'insieme delle coordinate cartesiane di ogni singolo nodo, espresse ovviamente rispetto al sistema di riferimento locale:

$$\{\mathbf{u}\}_{l} = \begin{cases} \{\mathbf{u}_{1}\}_{l} \\ \{\mathbf{u}_{2}\}_{l} \\ \vdots \\ \{\mathbf{u}_{n}\}_{l} \end{cases}.$$

Per trasformare le coordinate cartesiane di tutti i nodi dell'elemento dal sistema di riferimento locale a quello globale è quindi necessario utilizzare una matrice in grado di ruotare le coordinate di ogni nodo da un sistema di riferimento all'altro. Non è difficile immaginare che la matrice **R'** in grado di soddisfare tale esigenza sia costituita da un opportuno 'assemblaggio' di singole matrici di rotazione, ovvero:

$$\{\mathbf{u}\}_{l} = \begin{cases} \{\mathbf{u}_{1}\}_{l} \\ \{\mathbf{u}_{2}\}_{l} \\ \vdots \\ \{\mathbf{u}_{n}\}_{l} \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R} \end{cases} \begin{bmatrix} \{\mathbf{u}_{1}\}_{g} \\ \{\mathbf{u}_{2}\}_{g} \\ \vdots \\ \{\mathbf{u}_{n}\}_{g} \end{bmatrix} = \mathbf{R'} \{\mathbf{u}\}_{g}$$

Si potrebbe inoltre facilmente dimostrare che anche la matrice **R'** gode di tutte le proprietà comuni alle matrici di rotazione, ed in particolare che:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R'} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R'} \end{bmatrix}^T.$$

Partendo dall'equazione (matriciale) di moto del singolo elemento, premoltiplicando per l'inversa della matrice di rotazione '*estesa*' **R**' si ha:

 $\left[\mathbf{R'}\right]^{-1}M_{I}\left\{\mathbf{\ddot{u}}\right\}_{I}+\left[\mathbf{R'}\right]^{-1}K_{I}\left\{\mathbf{u}\right\}_{I}=\left[\mathbf{R'}\right]^{-1}\left\{\mathbf{f}(t)\right\}_{I}.$

Esprimendo dunque le coordinate nodali nel sistema di riferimento globale, si ottiene:

$$[\mathbf{R'}]^{-1}M_{l}[\mathbf{R'}]\{\mathbf{\ddot{u}}\}_{g} + [\mathbf{R'}]^{-1}K_{l}[\mathbf{R'}]\{\mathbf{u}\}_{g} = [\mathbf{R'}]^{-1}\{\mathbf{f}(t)\}_{l};$$

oppure, considerando che le matrici di rotazione inverse e trasposte coincidono:

$$\left[\mathbf{R}^{\prime}\right]^{T} M_{I}\left[\mathbf{R}^{\prime}\right] \left\{\mathbf{\ddot{u}}\right\}_{g} + \left[\mathbf{R}^{\prime}\right]^{T} K_{I}\left[\mathbf{R}^{\prime}\right] \left\{\mathbf{u}\right\}_{g} = \left[\mathbf{R}^{\prime}\right]^{T} \left\{\mathbf{f}(t)\right\}_{I}.$$

A questo punto, indicando con:

$$M_{g} = [\mathbf{R'}]^{T} M_{l} [\mathbf{R'}];$$
$$K_{g} = [\mathbf{R'}]^{T} K_{l} [\mathbf{R'}];$$

$$\left\{\mathbf{f}(t)\right\}_{g} = \left[\mathbf{R'}\right]^{T} \left\{\mathbf{f}(t)\right\}_{l};$$

l'equazione matriciale di moto può essere riscritta come segue:

 $M_g \{ \mathbf{\ddot{u}} \}_g + K_g \{ \mathbf{u} \}_g = \{ \mathbf{f}(t) \}_g;$

da cui risulta chiaro che con le precedenti operazioni si è solamente effettuata una trasformazione dell'equazione di moto del sistema: sfruttando le equazioni ottenute rispetto al sistema di riferimento locale, si sono trovate relazioni egualmente valide (caratterizzanti la dinamica dell'elemento), ma espresse nel sistema di riferimento globale.

4.5. Assemblaggio delle Equazioni di Moto

Una volta ottenuta l'equazione di moto per ciascun elemento del sistema (e tutte le equazioni riferite al medesimo sistema di riferimento), è possibile *assemblare* le matrici di massa e rigidezza ed il vettore delle forzanti nodali in modo da ottenere una unica equazione (matriciale) per l'intero sistema che conservi le stesse caratteristiche meccaniche del sistema originario. Ciò significa imporre che il sistema globale abbia la stessa energia cinetica e potenziale, e che compia lo stesso lavoro del sistema fisico, se sottoposto allo stesso 'set' di spostamenti virtuali.

In tale operazione ci aiuta il fatto che l'energia potenziale e quella cinetica sono grandezze semplicemente additive, per le quali si ha quindi che:

$$2T = \sum_{i} \{\dot{\mathbf{u}}_{i}\}_{g}^{T} [M_{i}]_{g} \{\dot{\mathbf{u}}_{i}\}_{g}$$
$$2U = \sum_{i} \{\mathbf{u}_{i}\}_{g}^{T} [K_{i}]_{g} \{\mathbf{u}_{i}\}_{g}$$

in cui

 $[K_i]_g$, $[M_i]_g$ e $\{\mathbf{u}_i\}_g$ sono rispettivamente le matrici di rigidezza, massa e vettore degli spostamenti nodali di ogni singolo elemento (i-esimo).

Si procede costruendo un unico vettore $\{\mathbf{u}\}_g$ che contiene tutte le coordinate modali di tutti i nodi del sistema. Ovviamente quindi le coordinate nodali $\{\mathbf{u}_i\}_g$ del generico elemento del sistema altro non sono che un sottoinsieme del vettore $\{\mathbf{u}\}_g$. L'obiettivo è quello di ricavare una unica equazione (matriciale) che governi la dinamica del sistema, le cui le matrici di massa e rigidezza dovranno assicurare l'uguaglianza con l'energia cinetica e potenziale del sistema fisico, ovvero:

 $2T = \{\dot{\mathbf{u}}\}_{g}^{T} [M]_{g} \{\dot{\mathbf{u}}\}_{g};$ $2U = \{\mathbf{u}\}_{g}^{T} [K]_{g} \{\mathbf{u}\}_{g}.$

Dalle precedenti relazioni si ottiene quindi che:

$$\begin{aligned} \left\{ \dot{\mathbf{u}} \right\}_{g}^{T} \left[M \right]_{g} \left\{ \dot{\mathbf{u}} \right\}_{g} &= \sum_{i} \left\{ \dot{\mathbf{u}}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[M_{i} \right]_{g} \left\{ \dot{\mathbf{u}}_{i} \right\}_{g} ; \\ \left\{ \mathbf{u} \right\}_{g}^{T} \left[K \right]_{g} \left\{ \mathbf{u} \right\}_{g} &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[K_{i} \right]_{g} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} ; \end{aligned}$$

ovvero che le matrici di massa e rigidezza globali del sistema si possano ottenere 'sommando' le matrici di massa e rigidezza dei vari elementi che lo compongono.

Il termine 'somma' è in effetti improprio e andrebbe sostituito con 'assemblaggio'; tale fatto è assai evidente se si pensa al fatto che la matrici di massa e rigidezza dei singoli elementi hanno dimensioni dipendenti dal numero di gradi di libertà del singolo elemento, mentre quelle relative all'intero sistema hanno dimensioni pari alla somma dei gradi di libertà di tutti i nodi del sistema.

Tuttavia è possibile ridursi ad una somma vera e propria di matrici, al fine di ottenere le matrici globali del sistema. Si può infatti osservare che il vettore $\{\mathbf{u}\}_g$ degli spostamenti nodali dell'intero sistema altro non è che l'estensione del vettore degli spostamenti nodali del generico elemento (i-esimo) $\{\mathbf{u}_i\}_g$ del sistema.

Estendendo in maniera analoga le matrici di massa e di rigidezza e il vettore delle forzanti nodali del singolo elemento (aggiungendo un cero numero di zeri nelle posizioni più opportune) è possibile riscrivere l'equazione di moto dell'elemento lasciando inalterata la sua energia cinetica e potenziale (nonché il lavoro virtuale), ma facendo in modo di portare le matrici di massa e rigidezza del sistema, e il vettore delle forzanti nodali, alle medesime dimensioni delle matrici del sistema globale:

 $[M_i]_g \{ \ddot{\mathbf{u}}_i \}_g + [K_i]_g \{ \mathbf{u}_i \}_g = \{ \mathbf{f}_i(t) \}_g \implies [\overline{M}_i]_g \{ \ddot{\mathbf{u}} \}_g + [\overline{K}_i]_g \{ \mathbf{u} \}_g = \{ \overline{\mathbf{f}}_i(t) \}_g;$ in cui si avrà:

$$\begin{bmatrix} \overline{M}_i \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ \ddots & & & \\ & & [M_i]_g & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \overline{K}_i \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ \ddots & & & \\ & & [K_i]_g & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix};$$
$$\{\overline{\mathbf{f}}_i(t)\}_g = \begin{cases} 0 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_i(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_g ; \{\mathbf{u}\}_g = \begin{cases} \{\mathbf{u}_1\} \\ \vdots \\ \{\mathbf{u}_i\} \\ \vdots \\ \{\mathbf{u}_n\} \end{cases}_g$$

Riprendendo le espressioni già ricavate in precedenza si ha quindi che:

$$\begin{aligned} \left\{ \dot{\mathbf{u}} \right\}_{g}^{T} \left[M \right]_{g} \left\{ \dot{\mathbf{u}} \right\}_{g} &= \sum_{i} \left\{ \dot{\mathbf{u}}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[M_{i} \right]_{g} \left\{ \dot{\mathbf{u}}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \dot{\mathbf{u}} \right\}_{g}^{T} \left[\overline{M}_{i} \right]_{g} \left\{ \dot{\mathbf{u}}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[\overline{M}_{i} \right]_{g} \left\{ \dot{\mathbf{u}}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[\overline{K}_{i} \right]_{g} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[\overline{K}_{i} \right]_{g} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[\overline{K}_{i} \right]_{g} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[\overline{K}_{i} \right]_{g} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[\overline{K}_{i} \right]_{g} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[\overline{K}_{i} \right]_{g} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[\overline{K}_{i} \right]_{g} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[\overline{K}_{i} \right]_{g} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[\overline{K}_{i} \right]_{g} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[\overline{K}_{i} \right]_{g} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[\overline{K}_{i} \right]_{g} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left[\overline{K}_{i} \right]_{g} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g}^{T} \left\{ \mathbf{u}_{i} \right\}_{g} \\ &= \sum_{i} \left\{ \mathbf{$$

da cui si evince che le matrici di massa e di rigidezza dell'intero sistema si ottengono semplicemente sommando le matrici di massa e rigidezza '*estese*' relative a ciascun elemento:

$$[M]_{g} = \left(\sum_{i} \left[\overline{M}_{i}\right]_{g}\right);$$
$$[K]_{g} = \left(\sum_{i} \left[\overline{K}_{i}\right]_{g}\right).$$

Procedendo in maniera analoga si può ottenere che il vettore delle forzanti nodali globale si ottiene sommando i singoli vettori delle forzanti nodali '*estese*' relative a ciascun elemento:

$$\left\{\mathbf{f}(t)\right\}_{g} = \left(\sum_{i} \left\{\overline{\mathbf{f}}_{i}(t)\right\}_{g}\right)$$

Va tuttavia fatto notare che all'interno dei vettori rappresentanti le forze nodali agenti sui singoli elementi vanno computate anche le '*reazioni vincolari*', ovvero le forze a cui è soggetto l'elemento considerato e che nascono dall'interazione con gli elementi contigui in corrispondenza dei nodi. Se tali forze sono evidentemente da considerarsi come 'esterne' all'elemento, esse sono tuttavia 'interne' all'intero sistema: esse sono infatti essenziali per la dinamica del singolo elemento, ma non altrettanto per la dinamica dell'intero sistema.

Se quindi la forza nodale $\mathbf{f}_{ki}(t)$ agente sul k-esimo nodo appartenente all' i-esimo elemento è la reazione vincolare che si origina a causa della interazione con il contiguo j-esimo elemento, è evidente che per il Principio di Azione e Reazione sul medesimo nodo agirà anche la forza nodale $\mathbf{f}_{ki}(t)$ e sarà tale che:

$$\mathbf{f}_{kj}(t) = -\mathbf{f}_{ki}(t) \, .$$

Nell'equazione che regola la dinamica dell'i-esimo elemento apparirà quindi la forzante nodale $\mathbf{f}_{ki}(t)$; nell'equazione che regola la dinamica del j-esimo elemento apparirà la forzante nodale $\mathbf{f}_{ki}(t)$; nell'equazione che regola la dinamica dell'intero sistema apparirà invece la somma:

 $\mathbf{f}_{k}(t) = \mathbf{f}_{ki}(t) + \mathbf{f}_{ki}(t) = -\mathbf{f}_{ki}(t) + \mathbf{f}_{ki}(t) = 0.$

In sostanza nel vettore delle forzanti nodali dell'equazione globale del sistema appariranno esclusivamente le forze effettivamente esterne al sistema.

4.6. Introduzione dei Vincoli

Una volta espresse le equazioni del sistema 'libero', ovvero non soggetto a condizioni vincolari esterne, è opportuno imporre le effettive 'condizioni al contorno'. E' questa una delle fasi più delicate della modellazione in quanto, ad esempio, un vincolo che può essere in prima approssimazione interpretato come un incastro perfetto può non essere in grado di descrivere con sufficiente approssimazione la realtà.

E se la soluzione più naturale al su citato problema sembra essere quella di sostituire l'incastro perfetto con un vincolo cedevole, l'attribuire a tale vincolo la giusta rigidezza è tutt'altro che banale.



Nel caso più semplice in cui tutti i vincoli si considerano ideali, si ha dunque che un certo numero k di nodi sono costretti a rimanere bloccati, per cui si sa già che le soluzioni delle relative equazioni di moto saranno:

${\bf u}_{i}(t) = 0;$

in cui l'indice j assume tutti i k valori corrispondenti ai nodi rigidamente vincolati.

Le equazioni del sistema vincolato si possono quindi ricavare dalle equazioni del sistema libero eliminando le equazioni differenziali relative ai nodi vincolati, ovvero eliminando dal

vettore degli spostamenti nodali i componenti relativi ai nodi vincolati (stesso trattamento ovviamente per il vettore delle forzanti nodali). Contemporaneamente, dalle matrici di massa e rigidezza dovranno essere eliminate tutte le righe e le colonne con gli indici caratteristici dei nodi vincolati. L'eliminazione delle equazioni di moto dei suddetti nodi comporta la perdita completa dei contributi all'energia potenziale e cinetica dell'intero sistema dovuti agli spostamenti (e alla velocità) di tali nodi.

Questa procedura richiede, da una parte una riduzione delle dimensioni delle matrici e dei vettori del sistema con meccanismi che a volte possono risultare piuttosto complessi, dall'altra non consente il calcolo delle reazioni vincolari.

Una tecnica assai frequentemente utilizzata è quella di inserire nella matrice di rigidezza del sistema, in corrispondenza dei nodi vincolati, una rigidezza fittizia di valore assai elevato. Con tale tecnica le matrici di massa, rigidezza e i vettori degli spostamenti nodali possono rimanere inalterati. I nodi che dovrebbero essere rigidamente vincolati subiscono in effetti spostamenti piccolissimi (tanto più piccoli quanto maggiore sarà la rigidezza fittizia che viene introdotta), che il che comporta quindi l'introduzione di un certo margine di errore. Tale piccolo errore consente tuttavia di calcolare le reazioni vincolari come il prodotto tra gli spostamenti risultanti dei nodi vincolati e le rigidezze fittizie appositamente introdotte.

Se quindi si considera anche il fatto che un vincolo reale non sarà mai del tutto ideale, tale tecnica ci consente di poter effettuare il 'tuning' delle rigidezze vincolari affinché i risultati del modello siano il più aderenti possibile alla realtà, e permette inoltre il calcolo contestuale delle reazioni vincolari.

Volendo generalizzare i discorsi fin qui sviluppati, nel caso in cui si supponga di avere vincoli ideali, si avrà che alcuni nodi saranno vincolati, gli altri saranno liberi. Riorganizzando opportunamente il vettore delle coordinate nodali è possibile raggruppare tali nodi nei due sottoinsiemi rispettivamente indicati con $\{\mathbf{u}_v\}$ e $\{\mathbf{u}_l\}$. Così facendo anche le matrici di massa, rigidezza e forzanti nodali dovranno essere riorganizzati nella forma seguente:

$$\left[\overline{M}\right]_{g}\left\{\mathbf{\ddot{u}}\right\}_{g}+\left[\overline{K}\right]_{g}\left\{\mathbf{u}\right\}_{g}=\left\{\mathbf{f}(t)\right\}_{g} \implies \left[\frac{\overline{M}_{vv}}{\overline{M}_{lv}},\frac{\overline{M}_{vl}}{\overline{M}_{ll}}\right]_{g}\left\{\!\!\begin{array}{c} \left\{\mathbf{\ddot{u}}_{v}\right\}\right\}_{g} + \left[\frac{\overline{K}_{vv}}{\overline{K}_{lv}},\frac{\overline{K}_{vl}}{\overline{K}_{ll}}\right]_{g}\left\{\!\!\begin{array}{c} \left\{\mathbf{u}_{v}\right\}\right\}_{g} \\ \left\{\mathbf{u}_{l}\right\}\!\right\}_{g} = \left\{\!\!\begin{array}{c} \left\{\!\overline{R}_{i}(t)\right\}\right\}_{g} \\ 0 \end{array}\!\right\}_{g}$$

Poiché si sa già che:

 $\{\mathbf{u}_{v}\} = \{0\};$

le uniche equazioni utili per determinare il comportamento del sistema risulteranno dunque: $\left[\overline{M}_{II}\right]_{g} \left\{\ddot{\mathbf{u}}_{I}\right\}_{g} + \left[\overline{K}_{II}\right]_{g} \left\{\mathbf{u}_{I}\right\}_{g} = \left\{0\right\};$

e sarà impossibile determinare il vettore delle reazioni vincolari:

 $\left\{\overline{R}_i(t)\right\}.$

Se invece si suppone che i vincoli siano cedevoli (anche se con alta rigidezza), si ha che le reazioni vincolari possono essere calcolate sulla base dei seppur minimi spostamenti nodali dei nodi vincolati. In sostanza si può supporre che:

$$\left\{\overline{R}_{i}(t)\right\}_{g} = -\left[K_{v}\right]_{g}\left\{\mathbf{u}_{v}\right\}_{g} \implies \left\{\left\{\overline{R}_{i}(t)\right\}\right\}_{g} = -\left[\begin{matrix}K_{v} & 0\\0 & 0\end{matrix}\right]_{g}\left\{\left\{\mathbf{u}_{v}\right\}\right\}_{g}.$$

In questo caso le equazioni di moto diventano:

 $\begin{bmatrix} \overline{M}_{vv} & \overline{M}_{vl} \\ \overline{M}_{lv} & \overline{M}_{ll} \end{bmatrix}_{g} \begin{cases} \{ \ddot{\mathbf{u}}_{v} \} \\ \{ \ddot{\mathbf{u}}_{l} \} \\ g \end{cases}_{g} + \begin{bmatrix} \overline{K}_{vv} & \overline{K}_{vl} \\ \overline{K}_{lv} & \overline{K}_{ll} \end{bmatrix}_{g} \begin{cases} \{ \mathbf{u}_{v} \} \\ \{ \mathbf{u}_{l} \} \\ g \end{cases}_{g} = -\begin{bmatrix} K_{v} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{g} \begin{cases} \{ \mathbf{u}_{v} \} \\ \{ \mathbf{u}_{l} \} \\ g \end{cases}_{g};$

da cui:

$$\begin{bmatrix} \overline{M}_{vv} & \overline{M}_{vl} \\ \overline{M}_{lv} & \overline{M}_{ll} \end{bmatrix}_{g} \begin{cases} \{\ddot{\mathbf{u}}_{v}\} \\ \{\ddot{\mathbf{u}}_{l}\} \end{cases}_{g} + \begin{bmatrix} \overline{K}_{vv} - K_{v} & \overline{K}_{vl} \\ \overline{K}_{lv} & \overline{K}_{ll} \end{bmatrix}_{g} \begin{cases} \{\mathbf{u}_{v}\} \\ \{\mathbf{u}_{l}\} \end{pmatrix}_{g} = \{0\}.$$

La matrice di massa e rigidezza rimangono delle stesse dimensioni di quelle del sistema libero (prima dell'inserimento delle condizioni di vincolo). Inoltre non vi è la necessità di riorganizzare né il vettore delle coordinate nodali né le matrici di massa e di rigidezza. La matrice di massa del sistema vincolato coincide infatti con quella del sistema libero; la matrice di rigidezza del sistema vincolato differisce da quella del sistema rigido solo in alcuni elementi delle diagonale principale in corrispondenza dei nodi vincolati.

4.7. Un esempio pratico: trave incastrata tramite elementi BAR

Si analizzerà in tale paragrafo la definizione di un semplice modello FEM per il calcolo della dinamica delle vibrazioni longitudinali di una trave continua a sezione costante incastrata rigidamente in corrispondenza dell'estremo sinistro. Supporremo che questa possa essere modellata utilizzando tre elementi BAR del tutto identici tra loro.



4.7.1. Funzioni di Forma dell'Elemento BAR

L'elemento BAR è caratterizzato da due soli nodi, ciascuno dotato di un solo grado di libertà. Si può quindi cominciare con il definire un sistema di riferimento x, e determinando le funzioni di forma dell'elemento. Si avrà infatti:



Come di consueto si ipotizza che le funzioni di forma siano di tipo polinomiale in funzione della coordinata *x*. Nel caso in oggetto si dimostrerà che, per un elemento BAR, sono possibili solo funzioni di forma di primo ordine (ovvero funzioni lineari), per cui si avrà:

$$u(x,t) = \begin{bmatrix} S_1(x) & S_2(x) \end{bmatrix} \begin{cases} u_1(t) \\ u_2(t) \end{cases} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 x & a_2 + b_2 x \end{bmatrix} \begin{cases} u_1(t) \\ u_2(t) \end{cases}$$

dalle quali si ottiene:

 $u(x,t) = a_1 \cdot u_1(t) + b_1 x \cdot u_1(t) + a_2 \cdot u_2(t) + b_2 x \cdot u_2(t) \,.$

Il fatto di dover utilizzare al più funzioni lineari deriva dalla necessità di calcolare i coefficienti delle funzioni di forma in funzione delle poche 'condizioni al contorno' disponibili. In questo caso infatti le uniche condizioni che potranno essere sfruttate saranno:

$$u(0,t) = u_1(t);$$

$$u(l,t) = u_2(t);$$

essendo l la lunghezza dell'elemento considerato. Imponendo la prima delle suddette condizioni si ottiene:

 $u(0,t) = u_1(t) \implies a_1 \cdot u_1(t) + a_2 \cdot u_2(t) = u_1(t);$

da cui si ha:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Inserendo tali valori nella seconda condizione si ha inoltre:

$$u(l,t) = u_2(t) \implies u_1(t) + b_1 l \cdot u_1(t) + b_2 l \cdot u_2(t) = (1 + b_1 l) \cdot u_1(t) + b_2 l \cdot u_2(t) = u_2(t)$$

da cui si ha:

$$\begin{cases} (1+b_1l)=0\\ b_2l=1 \end{cases} \implies \begin{cases} b_1=-\frac{1}{l}\\ b_2=\frac{1}{l} \end{cases}.$$

La matrice delle funzioni di forma risulta quindi:

$$S(x) = \begin{bmatrix} S_1(x) & S_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \frac{x}{l} \end{bmatrix}.$$

Il vettore dello stato di deformazione si riduce in questo caso ad un solo elemento:

$$\varepsilon_{xx} = \{\varepsilon\} = [b(x)] \begin{cases} u_1(t) \\ u_2(t) \end{cases} = \left[\frac{dS_1(x)}{dx} \quad \frac{dS_2(x)}{dx} \right] \begin{cases} u_1(t) \\ u_2(t) \end{cases} = \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right] \begin{cases} u_1(t) \\ u_2(t) \end{cases} = \\ = -\frac{1}{l} u_1(t) + \frac{1}{l} u_2(t) = \frac{1}{l} (u_2(t) - u_1(t)); \end{cases}$$

La matrice E che lega lo stato di tensione a quello di deformazione si riduce anch'essa ad un solo elemento, ovviamente pari al Modulo di Young del materiale:

$$\sigma_{xx} = (\mathbf{\sigma}) = [E] \{ \mathbf{\varepsilon} \} = E \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right] \left\{ \begin{matrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{matrix} \right\} = \frac{E}{l} \left(u_2(t) - u_1(t) \right).$$

Per quanto riguarda la definizione della matrice di massa si ha:

$$2T = \begin{cases} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{cases}^T M \begin{cases} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{cases} = \int_{\mathcal{V}} \rho (\dot{u}(x,t) \cdot \dot{u}(x,t)) dV = \int_{\mathcal{V}} \rho \begin{cases} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{cases}^T \left[\left(1 - \frac{x}{l} \right) \quad \frac{x}{l} \right]^T \left[\left(1 - \frac{x}{l} \right) \quad \frac{x}{l} \right] \begin{cases} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{cases} dV =$$
$$= \{ \dot{\mathbf{u}}(t) \}^T \int_{\mathcal{V}} \rho \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \\ \frac{x}{l} \end{cases} \left[\left(1 - \frac{x}{l} \right) \quad \frac{x}{l} \right] dV \{ \dot{\mathbf{u}}(t) \};$$

dalla quale, ipotizzando costante la densità del materiale, come pure la sezione A della trave (da cui $dV = \rho A dx$), si ottiene:

$$2T = \begin{cases} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{cases}^T M \begin{cases} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{cases} = \{ \dot{\mathbf{u}}(t) \}^T \int_{\nu} \rho \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \\ \frac{x}{l} \end{cases} \left[\left(1 - \frac{x}{l} \right) & \frac{x}{l} \end{bmatrix} dV \{ \dot{\mathbf{u}}(t) \} = \\ = \{ \dot{\mathbf{u}}(t) \}^T \rho A \int_{0}^{l} \left[\left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 & \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \\ \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) & \frac{x^2}{l^2} \end{cases} dx \{ \dot{\mathbf{u}}(t) \};$$

da cui si ottiene:

$$M = \rho A \int_{0}^{l} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{2} & \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \frac{x^{2}}{l^{2}} \end{bmatrix} dx = \rho A \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{bmatrix} = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Procedendo in maniera analoga è possibile determinare la matrice delle rigidezze:

$$2U = \{\mathbf{u}\}^T K\{\mathbf{u}\} = \int_{V} \{\mathbf{\varepsilon}\}^T \{\mathbf{\sigma}\} dV = \int_{V} \{\mathbf{\varepsilon}_{xx}\}^T \{\mathbf{\sigma}_{xx}\} dV = \int_{V} \{\mathbf{u}(t)\}^T [b(x)]^T [E] [b(x)] \{\mathbf{u}(t)\} dV = \\ = \{\mathbf{u}(t)\}^T \int_{V} E \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right]^T \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right] dV \{\mathbf{u}(t)\};$$

relazione dalla quale, ipotizzando che anche il modulo di Young sia indipendente dalla coordinata x, si ottiene:

$$K = E \int_{V} \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right]^{T} \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right] dV = EA \int_{0}^{l} \left[\frac{1}{l^{2}} \quad -\frac{1}{l^{2}} \\ -\frac{1}{l^{2}} \quad \frac{1}{l^{2}} \right] dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per il primo elemento del sistema considerato l'equazione di moto sarà dunque:

$$M \begin{cases} \ddot{u}_{1}(t) \\ \ddot{u}_{2}(t) \end{cases} + K \begin{cases} u_{1}(t) \\ u_{2}(t) \end{cases} = \begin{cases} f_{1}(t) \\ f_{2}(t) \end{cases} \implies \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{cases} \ddot{u}_{1}(t) \\ \ddot{u}_{2}(t) \end{cases} + \frac{E A}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1}(t) \\ u_{2}(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} f_{1}(t) \\ f_{2}(t) \end{cases}$$

Poiché inoltre supporremo vi sia assenza di forze distribuite, le forze nodali saranno costituite esclusivamente dalle reazioni vincolari scambiate in corrispondenza dei nodi. Le equazioni del singolo elemento saranno quindi esprimibili come:

$$\begin{cases} \frac{\rho A l}{3} \ddot{u}_1(t) + \frac{\rho A l}{6} \ddot{u}_2(t) + \frac{EA}{l} u_1(t) - \frac{EA}{l} u_2(t) = f_1(t) \\ \frac{\rho A l}{6} \ddot{u}_1(t) + \frac{\rho A l}{3} \ddot{u}_2(t) - \frac{EA}{l} u_1(t) + \frac{EA}{l} u_2(t) = f_2(t) \end{cases}$$

4.7.2. Rotazione e Assemblaggio

Nel caso in esame i sistemi di riferimento locali e quello globale hanno la medesima orientazione, per cui le matrici di rotazione $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$ ' degenerano nella matrice unità. Le matrici di massa e rigidezza di ogni elemento (tutte identiche) fino qui ricavate, sono espresse di già nel sistema di riferimento globale e quindi non è necessario 'ruotarle'.

Le equazioni di moto dei tre elementi che compongono il sistema vanno dunque semplicemente assemblate. Poiché esse sono formalmente identiche, queste saranno:

$$\begin{split} M_{1} \begin{cases} \ddot{u}_{1}(t) \\ \ddot{u}_{2}(t) \end{cases} + K_{1} \begin{cases} u_{1}(t) \\ u_{2}(t) \end{cases} = \begin{cases} f_{1}(t) \\ f_{2}(t) \end{cases} \implies \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{1}(t) \\ \ddot{u}_{2}(t) \end{bmatrix} + \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1}(t) \\ u_{2}(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} f_{1}(t) \\ f_{2}(t) \end{bmatrix}; \\ M_{2} \begin{cases} \ddot{u}_{2}(t) \\ \ddot{u}_{3}(t) \end{bmatrix} + K_{2} \begin{cases} u_{2}(t) \\ u_{3}(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} f_{2}(t) \\ f_{3}(t) \end{bmatrix} \implies \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{2}(t) \\ \ddot{u}_{3}(t) \end{bmatrix} + \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2}(t) \\ u_{3}(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} f_{2}(t) \\ f_{3}(t) \end{bmatrix}; \\ M_{3} \begin{cases} \ddot{u}_{3}(t) \\ \ddot{u}_{4}(t) \end{bmatrix} + K_{3} \begin{cases} u_{3}(t) \\ u_{4}(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} f_{3}(t) \\ f_{4}(t) \end{bmatrix} \implies \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{3}(t) \\ \ddot{u}_{4}(t) \end{bmatrix} + \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{3}(t) \\ u_{4}(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} f_{3}(t) \\ f_{4}(t) \end{bmatrix}. \end{split}$$

Il vettore contenente tutte le coordinate nodali del sistema è dunque:

$$\{\mathbf{u}(t)\} = \begin{cases} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{cases};$$

quindi tutte le matrici di massa e rigidezza delle e equazioni di moto di ogni elemento vanno estese in modo da poter utilizzare tale vettore.

Le matrici 'estese' diventano quindi:

In modo analogo si estendono i vettori delle forzanti nodali:

$$\left\{ \mathbf{\bar{f}}_{1}(t) \right\} = \left\{ \begin{matrix} f_{1}(t) \\ f_{2}(t) \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}; \ \left\{ \mathbf{\bar{f}}_{2}(t) \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ f_{2}(t) \\ f_{3}(t) \\ 0 \end{matrix} \right\}; \ \left\{ \mathbf{\bar{f}}_{3}(t) \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ f_{3}(t) \\ f_{4}(t) \end{matrix} \right\}.$$

Le equazioni di moto dei singoli elementi diventano quindi:

$$\overline{M}_{1}\{\ddot{\mathbf{u}}(t)\} + \overline{K}_{1}\{\mathbf{u}(t)\} = \{\overline{\mathbf{f}}_{1}(t)\};$$

$$\overline{M}_{2}\{\ddot{\mathbf{u}}(t)\} + \overline{K}_{2}\{\mathbf{u}(t)\} = \{\overline{\mathbf{f}}_{2}(t)\};$$

$$\overline{M}_{3}\{\ddot{\mathbf{u}}(t)\} + \overline{K}_{3}\{\mathbf{u}(t)\} = \{\overline{\mathbf{f}}_{3}(t)\}.$$

L'intero sistema può essere quindi descritto attraverso una unica equazione di moto matriciale:

$$\overline{M}\{\ddot{\mathbf{u}}(t)\} + \overline{K}\{\mathbf{u}(t)\} = \{\overline{\mathbf{f}}(t)\};$$

le matrici di massa e di rigidezza dell'intero sistema risultano quindi:

Se si ha come obiettivo lo studio delle pulsazioni proprie del sistema, è diretta conseguenza che il sistema non dovrà essere sottoposto ad alcuna forza esterna, con eccezione della reazione vincolare con il telaio in corrispondenza dell'incastro R_{01x} . Si ha quindi

$$\left\{ \mathbf{\bar{f}}(t) \right\} = \sum_{i} \left\{ \mathbf{\bar{f}}_{i}(t) \right\} = \left\{ \mathbf{\bar{f}}_{1}(t) \right\} + \left\{ \mathbf{\bar{f}}_{2}(t) \right\} + \left\{ \mathbf{\bar{f}}_{3}(t) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} R_{01x}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

L'equazione completa del sistema è quindi:

$$\frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \end{bmatrix} + \frac{E A}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{01x}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.7.3. Imposizione delle Condizioni di Vincolo

Nell'ipotesi che il vincolo di incastro sia perfetto, si avrà quindi:

 $u_1(t) = 0;$

condizione che consente di ridurre l'equazione matriciale di moto nella forma seguente:

$$\frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \end{bmatrix} + \frac{E A}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le precedenti costituiranno le equazioni di moto del sistema vincolato in assenza di forzanti esterne, attraverso il cui studio è possibile ricavare le prime pulsazioni proprie del sistema. Dall'analisi della precedente equazione, come è facilmente verificabile, non è possibile determinare il valore della reazione vincolare R_{0lx} .

Una possibilità alternativa sarà quella di sostituire il vincolo di incastro perfetto (e quindi la reazione vincolare R_{01x}) con un vincolo cedevole ad altissima rigidezza. Per fare ciò basterà sommare alla matrice di rigidezza del sistema la matrice caratteristica del vincolo K_v , che nel caso in oggetto potrà essere espressa come segue:

in cui ovviamente dovrà risultare $k_{\nu} >> 2$.

La matrice di rigidezza del sistema vincolato sarà dunque:

per cui l'equazione di moto del sistema vincolato risulterà:

$$\frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \end{bmatrix} + \frac{E A}{l} \begin{bmatrix} 1+k_v & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le precedenti costituiranno le equazioni di moto del sistema vincolato, attraverso il cui studio è possibile ricavare le prime pulsazioni proprie del sistema (appena differenti da quelle ottenibili con l'ipotesi di incastro perfetto). La reazione vincolare R_{0lx} potrà essere determinata come:

$$R_{01x}(t) = -k_v \cdot u_1(t) \,.$$

Naturalmente si avrà che le vibrazioni del nodo vincolato saranno trascurabili rispetto a quelle degli altri nodi:

$$u_1(t) \cong 0$$
 ovvero $u_1(t) << u_i(t)$ con $i = 2,3,4;$

inoltre le vibrazioni dei nodi 2, 3 e 4 differiranno solo di una minima quantità rispetto a quelle calcolate con l'ipotesi di vincolo perfetto.

5. Tecniche di Riduzione

Effettuare analisi dinamiche su sistemi continui può comportare oneri computazionali assai elevati: si pensi – ad esempio – al metodo agli elementi finiti, che usualmente conduce ad un numero molto elevato di gradi di libertà. Non è infrequente utilizzare modelli con centinaia (o decine di centinaia) di gradi di libertà. Nel caso di analisi statiche ciò non costituisce un serio problema per i moderni calcolatori, ma la soluzione di un problema agli autovalori di quella dimensione può ancora risultare un grave ostacolo (per non parlare poi della effettiva simulazione dinamica, ossia la risoluzione numerica del sistema di equazioni differenziali, che è praticamente infattibile).

Per queste (ed altre) ragioni è opportuno ricorrere a tecniche di riduzione dinamica che sostituiscano ad un modello computazionalmente "pesante", un modello più leggero che riproduca nella maniera più fedele possibile la dinamica del modello primitivo. Le tecniche

che di seguito descriveremo basano la loro efficacia nella riduzione di gradi di libertà: nel primo caso verranno ridotte le coordinate fisiche, nel secondo le coordinate modali.

5.1. Criterio di Condensazione Statica (o di Guyan)

Sia dato il modello $M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = F$. Si partizioni il vettore delle coordinate in due sottovettori $\mathbf{x}_m \mathbf{e} \ \mathbf{x}_s$, detti rispettivamente gradi di libertà *master* e gradi di libertà *slave*. Vedremo più avanti quali considerazioni conducano a questa distinzione ma, per ora, in maniera grossolana si pensi ad una distinzione tra gradi di libertà "più importanti" e "meno importanti". Siano riordinate in maniera coerente le matrici di massa e rigidezza cosicché si possa scrivere:

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_m \\ \ddot{\mathbf{x}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix}.$$

Si noti che, per la simmetria delle matrici di massa e rigidezza primitive, le sottomatrici che stanno sulle diagonali principali sono simmetriche, mentre le extradiagonali sono una la trasposta dell'altra.

In condizioni statiche si può scrivere che:

$$\begin{cases} K_{mm}\mathbf{x}_m + K_{ms}\mathbf{x}_s = \mathbf{f}_m \\ K_{sm}\mathbf{x}_m + K_{ss}\mathbf{x}_s = \mathbf{f}_s \end{cases}$$

Dalla seconda si ricava $\mathbf{x}_{s} = -K_{ss}^{-1}K_{sm}\mathbf{x}_{m} + K_{ss}^{-1}\mathbf{f}_{s}$.

Oltre a supporre che le forze generalizzate \mathbf{f}_s applicate alle coordinate slave siano costanti $(\dot{\mathbf{f}}_s(t)=0)$, la più pesante approssimazione del metodo consiste nel considerare *sempre* vera la precedente relazione che coinvolge i nodi slave. Si suppone quindi che, anche in caso dinamico le coordinate lave sono sempre ottenibili come combinazione lineare delle coordinate master (e delle forze generalizzate \mathbf{f}_s). In pratica con la riduzione di Guyan si nega alle coordinate slave "la dignità di veri e propri gradi di libertà" e quindi si riduce il sistema ad uno 'equivalente' (nelle ipotesi i cui sopra) con un numero di gradi di libertà pari al numero dei nodi master. Per ottenere le equazioni di moto ridotte (che riguardano esclusivamente le coordinate master) si parte quindi dalla sgeuente relazione.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ -K_{ss}^{-1}K_{sm}\mathbf{x}_m + K_{ss}^{-1}\mathbf{f}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1}K_{sm} \end{bmatrix} \mathbf{x}_m + \begin{bmatrix} 0 \\ K_{ss}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{f}_s = T_G \mathbf{x}_m + \begin{bmatrix} 0 \\ K_{ss}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{f}_s.$$

La matrice evidenziata T_G è detta matrice di trasformazione di Guyan.

Dopo aver notato che nelle ipotesi fatte $\dot{\mathbf{x}} = T_G \dot{\mathbf{x}}_m \mathbf{e}$ $\ddot{\mathbf{x}} = T_G \ddot{\mathbf{x}}_m$, si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} T_G \ddot{\mathbf{x}}_m + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} T_G \mathbf{x}_m + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ K_{sm}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{f}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix}.$$

Riordinando e premoltiplicando l'intera equazione matriciale per la trasposta della matrice di Guyan, si ha:

$$T_{G}^{T}\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} T_{G} \ddot{\mathbf{x}}_{m} + T_{G}^{T}\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} T_{G} \mathbf{x}_{m} = T_{G}^{T}\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{m} \\ \mathbf{f}_{s} \end{bmatrix} - T_{G}^{T}\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ K_{sm} \end{bmatrix} \mathbf{f}_{s}.$$

Svolgendo faticosamente i prodotti matriciali (se lo studente volesse effettuarli ricordi che $K_{ms} = K_{sm}^{T}, M_{ms} = M_{sm}^{T} e T_{G}^{T} = \begin{bmatrix} I^{T} & (-K_{ss}^{-1}K_{sm})^{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -K_{ms}K_{ss}^{-1} \end{bmatrix}$, si giunge al modello: $M_{G}\ddot{\mathbf{x}}_{m} + K_{G}\mathbf{x}_{m} = \mathbf{f}_{G}$,

dove

$$\begin{split} M_{G} &= M_{mm} - K_{ms} K_{ss}^{-1} M_{sm} - M_{ms} K_{ss}^{-1} K_{sm} + K_{ms} K_{ss}^{-1} M_{ss} K_{ss}^{-1} K_{sm} \\ K_{G} &= K_{mm} - K_{ms} K_{ss}^{-1} K_{sm} \\ \mathbf{f}_{G} &= \mathbf{f}_{m} - K_{ms} K_{ss}^{-1} \mathbf{f}_{s} \end{split}$$

Si noti che utilizzare il modello ridotto in caso statico non porta ad alcun errore e dunque, ad esempio, questa tecnica di riduzione può convenire per focalizzare l'attenzione su alcuni gradi di libertà (che dunque verranno scelti come master) rispetto ad altri (che verranno dunque scelti slave) in ipotesi di moto quasi statico. In realtà affinché sia verificata con sufficiente approssimazione la relazione $\mathbf{x}_s = -K_{ss}^{-1}K_{sm}\mathbf{x}_m + K_{ss}^{-1}\mathbf{f}_s$, può anche essere sufficiente che sia molto piccola l'inerzia "legata" alle coordinate slave; si pensi ad esempio ad una trave schematizzata con elementi di Timoshenko (gradi di libertà sono le traslazioni *y* e rotazioni φ delle sezioni estremali dell'elemento): se la trave è snella, $M_{\varphi\varphi}$ e $M_{y\varphi}$ sono molto "piccole", ed è dunque è lecito ridurre il modello utilizzando come gradi di libertà master le traslazioni nodali.

In maniera simile a quanto visto per la matrice di massa, è possibile ridurre anche matrici di smorzamento viscoso o strutturale.

È infine da rilevare che in maniera duale alla condensazione statica è possibile ottenere una riduzione del modello primitivo con una *condensazione dinamica:* come suggerisce l'aggettivo, si trova la relazione tra gradi master e gradi slave a frequenza infinita (e dunque divengono teoricamente trascurabili le forze elastiche rispetto alle forze di inerzia), e con un

procedimento duale a quello descritto si trova un modello ridotto che, ovviamente, riproduce in maniera sufficientemente accurata il modello primitivo in condizioni di alta frequenza.

5.2. Troncamento Modale

Si abbia $M\mathbf{x} + K\mathbf{x} = \mathbf{f} \operatorname{con} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Introduciamo le coordinate principali:

$$\mathbf{x} = \begin{cases} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{cases} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \cdots & \Psi_n & \Psi_{n+1} & \cdots & \Psi_N \end{bmatrix} \begin{cases} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ p_{n+1} \\ \vdots \\ p_N \end{cases}$$

Passando dalle coordinate fisiche a quelle modali $\mathbf{p} = \Psi^{-1} \mathbf{x}$, si ha:

$$\begin{bmatrix} \overline{m}_{1} & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \overline{m}_{n} & & \\ & & & \overline{m}_{n+1} & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \overline{m}_{N} \end{bmatrix} \mathbf{\ddot{p}} + \begin{bmatrix} \overline{k}_{1} & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \overline{k}_{n} & & \\ & & & \overline{k}_{n+1} & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & \overline{k}_{N} \end{bmatrix} \mathbf{p} = \Psi^{T} \mathbf{f}$$

dove $\overline{m}_i \in \overline{k_i}$ indicano la *i*-esima massa e rigidezza modale rispettivamente.

Si considerino solamente le prime n equazioni, che si possono ottenere a posteriori del calcolo dei soli primi n autovettori/autovalori, come segue:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Psi}_n \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Psi}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \vdots \\ \ddot{p}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Psi}_n \end{bmatrix}^T K \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Psi}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Psi}_n \end{bmatrix}^T \mathbf{f} \ .$$

Si ottengono *n* equazioni disaccoppiate più facili da integrare del sistema primitivo di ordine N >> n. È importante notare che ciascuna delle *n* equazioni differenziali di cui sopra è scritta correttamente, (le *n* equazioni sono semplicemente un sottoinsieme delle equazioni di moto in coordinate modali!); <u>l'approssimazione consiste nel ricostruire il vettore delle coordinate fisiche attraverso la relazione approssimata:</u>

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}_1 & \cdots & \mathbf{\Psi}_n \end{bmatrix} \begin{cases} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{cases} = \mathbf{\Psi}_{rid} \mathbf{p}_{rid} ,$$

al posto della corretta $\mathbf{x} = \Psi \mathbf{p}$. È evidente che imporre trascurabile una coordinata modale, presuppone che le forze applicate non "stuzzichino" il modo corrispondente. In altri termini, il metodo è valido se la pulsazione della forzante è molto minore dell'*n*-esima pulsazione naturale del sistema, cosicché il contributo delle coordinate di modi superiori all'*n*-esimo sia trascurabile.

6. Linee guida per l'allestimento di prove sperimentali

Metodologie ed attrezzature utilizzate per l'analisi modale sperimentale possono variare sensibilmente a seconda delle caratteristiche del sistema oggetto di studio, di particolari esigenze del committente e/o dello sperimentatore.

Ad esempio è evidente che le metodologie e la strumentazione utilizzata per valutare la risposta della struttura di una piattaforma petrolifera alle sollecitazioni imposte dal moto ondoso non potranno essere le stesse che vengono utilizzate per studiare analizzare le vibrazioni di una macchina utensile destinata a lavorazioni ad alta velocità.

L'obiettivo che ci si ripropone in questo breve capitolo è quello fornire delle semplici linee guida che aiutino a focalizzare l'attenzione su quelle che sono le effettive problematiche della sperimentazione ed a pianificarne l'esecuzione.

In particolare l'attenzione si concentrerà su come il montaggio dei diversi componenti che compongono l'apparato sperimentale può influenzare l'identificazione delle Funzioni di Risposta in Frequenza di un sistema meccanico.

6.1. Obiettivo della Attività Sperimentale

Per poter pianificare una attività sperimentale, come del resto tutte le attività, è indispensabile individuare chiaramente l'OBIETTIVO dell'attività stessa. L'*obiettivo* condiziona infatti fortemente tutti gli aspetti fondamentali del progetto dell'attività, tra cui si ricordano:

- Metodologie che si intende utilizzare;
- Quantità e caratteristiche della strumentazione da utilizzare;
- Costo Economico (Budget);
- Tempi disponibili per l'esecuzione delle prove e l'elaborazione dei risultati.

Ancora una volta degli esempi possono chiarire come l'obiettivo condizioni il tipo di studio:

- Stima Approssimata delle frequenze proprie e dei modi del sistema meccanico. Tale attività può essere richiesta specificatamente da un cliente, e viene generalmente realizzata modificando un modello già in produzione. Se ad esempio si fa riferimento ad una macchina utensile destinata ad eseguire particolari lavorazioni meccaniche, tale attività diventa fondamentale quando si verifica che la macchina non soddisfa le specifiche di progetto. Ad esempio può accadere che in determinate condizioni (es. particolari posizioni di lavoro o regime di giri) si avvertono delle vibrazioni che ne compromettono il funzionamento. L'ufficio tecnico potrebbe aver individuato alcune possibili cause di questo fenomeno, ma ha bisogno di ulteriori informazioni prima di procedere. In questo semplice esempio, l'individuazione anche approssimativa delle frequenze a cui si manifesta il fenomeno e una stima anche molto rozza dei modi associati, può contribuire ad individuare, tra le possibili concause, quella che effettivamente determina il cattivo funzionamento della macchina.
- Valutazione di Modi, frequenze proprie e fattori di smorzamento, identificazione di un modello matematico per il sistema meccanico. Si immagini di partecipare alla progettazione di un nuovo prodotto, ad esempio una lavatrice industriale. Precedenti esperienze hanno evidenziato problemi di forti vibrazioni del cestello della macchina all'avvio della centrifuga che ne limitano il regime di giri ed il carico. Per studiare il problema ed ottimizzare, ad esempio la posizione e le caratteristiche delle sospensioni del cestello, può essere utile la costruzione di un modello matematico più o meno semplice del sistema. Questo scopo può essere ottenuto utilizzando tecniche di identificare direttamente le caratteristiche matematiche del modello a partire da misure sperimentali effettuate su un prototipo. Attraverso le misure non è solo possibile ricavare un modello matematico, ma è anche possibile validare il modello matematico stesso (comunque questo sia stato ottenuto) e/o sperimentare gli effetti delle soluzioni proposte.
- Studio Approfondito/Valutazione di non linearità presenti nel sistema/ creazione di librerie di sotto-modelli modali assemblabili, ecc... Se l'importanza dell'applicazione lo richiede si possono eseguire studi estremamente accurati tesi a ricostruire con la massima accuratezza la risposta del sistema tenendo conto di aspetti spesso trascurati come ad esempio la non linearità di alcuni componenti e/o le

interazione tra i vari componenti di una macchina. Se il numero dei componenti e la complessità degli stessi risulta particolarmente elevate, può risultare indispensabile la messa a punto separatamente di diversi modelli matematici che riproducono la risposta delle varie componenti della macchina. Questi, una volta validati, possono essere assemblati per generare un macro-modello più grande in grado di tener conto delle reciproche interazioni. Un esempio in tal senso può essere la progettazione della trasmissione di un locomotore ferroviario o di un autoveicolo: per i vari organi di trasmissioni (rinvii, giunti omocinetici, treni di ingranaggi, supporti) possono essere costruiti dei sotto-modelli dinamici molto accurati. Questi, una volta validati singolarmente, possono essere utilizzati assemblati e il modello complessivo può essere utilizzato per prevedere e/o eliminare alcuni problemi caratteristici della trasmissione (es. oscillazioni torsionali/flessionali non desiderate, vibrazioni, rumore, ecc...).

6.2. Scelta del Layout

Una volta individuato l'obiettivo dell'attività sperimentale occorre definire l'*architettura* (o Layout) dell'apparato sperimentale che si intende realizzare. Questo generalmente è composto dai seguenti elementi:

- *Sistema meccanico oggetto della sperimentazione*. Alcune scelte, come ad esempio il tipo di vincolo utilizzato per bloccare il sistema durante le prove, possono influenzare la risposta dinamica del sistema ed alterare quindi il risultato della prova.
- Eccitazione. Per studiarne la risposta dinamica del sistema, esso deve essere sottoposto a una qualche forma di eccitazione (una forza esterna). L'eccitazione deve essere NOTA, RIPETIBILE e CONTROLLABILE. Per questo motivo la forza effettivamente erogata dall'attuatore deve essere misurata tramite apposite celle di carico interposte tra l'attuatore stesso ed il sistema. L'attuatore, controllato dal relativo DRIVER, deve essere capace di riprodurre nella maniera più fedele possibile la forma d'onda richiesta dallo sperimentatore per verificare la risposta del sistema. Il montaggio degli attuatori ed il loro collegamento con il sistema deve essere effettuato in modo da ridurre/eliminare la possibilità che vengano trasmesse anche sollecitazioni non completamente note, non desiderate o comunque non riproducibili.
- Misurazione. La risposta del sistema viene misurata utilizzando uno o più sensori posti sul sistema oggetto di sperimentazione. Una oculata scelta dei punti di misura, delle grandezze acquisite, del tipo di sensori può contribuire sensibilmente a migliorare il rapporto segnale/rumore e quindi l'esito della prova. La maggior parte dei sensori non possono essere direttamente collegati alle schede di acquisizione (se si utilizzano PC) e/o agli analizzatori spettrali, ma necessitano di particolari apparecchiature dette "Centraline di Condizionamento del Segnale". Le Centraline di Condizionamento del Segnale (specifiche per ciascuna tipologia di sensore) assolvono numerosi funzioni:
 - o Alimentazione Stabilizzata dei sensori;
 - Amplificazione/Conversione del Segnale proveniente dai sensori;
 - Filtraggio (Anti-Aliasing) del Segnale proveniente dai sensori.

La verifica di cablaggi, connettori, messe a terra, protezioni da disturbi EMI sono indispensabili per ridurre al minimo l'entità di rumori/interferenze sul segnale acquisito.

E'inutile ricordare che dimensioni, peso e montaggio dei sensori devono essere tali da non influenzare in maniera significativa la dinamica del sistema studiato.

- *Controllo ed Acquisizione*. Uno speciale dispositivo elettronico (un analizzatore spettrale, o un PC equipaggiato con schede di acquisizione) gestisce in tempo reale tutta la prova assolvendo alle seguenti funzioni:
 - Generazione della forma d'onda desiderata per l'eccitazione;
 - Controllo e sincronizzazione dell'unità di Attuazione e della acquisizione dei dati;
 - Memorizzazione dei Dati;
 - Altre Attività opzionali (es. valutazione in tempo reale e/o in postprocessing di funzioni di trasferimento e/o grandezze correlate come Cross-Spettri, Auto-Spettri, funzioni di Coerenza, Trigger, medie eseguite su sequenze di prove ripetitive generate automaticamente, operatori statistici vari, ecc...).



Esempio di Layout di prova con catena d misura

6.2.1. Montaggio del sistema da sperimentare

E' evidente che per poter effettuare delle prove è indispensabile vincolare in qualche modo su un telaio il sistema meccanico che si intende identificare. La risposta del sistema meccanico risulta pesantemente influenzata dall'interazione con il vincolo prescelto. E'opportuno quindi vincolare il componente oggetto della sperimentazione in modo da rendere facilmente individuabili ed isolabili dalla risposta del sistema i contributi derivanti dall'interazione tra sistema in analisi e vincolo.

Di solito si fa riferimento a due configurazioni limite: FREE e GROUND. Le condizioni di vincolo reali saranno sempre una 'via di mezzo' tra tali due configurazioni, ma si cercherà sempre di tendere il più possibile ad una di esse.



La trave di forma 'complessa' riportata nella figura soprastante è stata semplicemente appoggiata su una lastra di metallo. Lastra e trave sono geometricamente a contatto lungo due direttrici su cui risultano tangenti.

Il vincolo così realizzato è monolatero ed inoltre il contatto praticamente puntiforme che si genera introduce una cedevolezza del vincolo sicuramente non trascurabile.

Lo spostamento della trave in direzione tangenziale alla lastra è inoltre impedito dal solo attrito tangenziale tra le superfici per cui risulta difficile quantificarne l'entità o simularne l'effetto.

E' superfluo aggiungere che un vincolo di questo tipo non risulta idoneo all'esecuzione di prove sperimentali sulla trave perché influenza pesantemente la risposta della trave in maniera difficilmente modellabile dallo sperimentatore.

In sintesi occorre evitare tutte quelle condizioni di montaggio in cui risulta difficile modellare la risposta del vincolo e/o discriminare tra la risposta modale del componente oggetto della sperimentazione e quella dovuta all'interazione con il vincolo stesso.

6.2.2. Montaggio FREE

Un montaggio di tipo rigorosamente FREE prevede la scelta di un vincolo talmente cedevole da approssimare la condizione di assenza di vincoli (sistema labile): le frequenze introdotte dalla cedevolezza del vincolo sono generalmente molto basse. Agendo sulla rigidezza del vincolo si fa dunque in modo che queste cadono molto al di sotto del campo di frequenze che si intende investigare.

In questo modo il vincolo risulta facilmente modellabile come una completa labilità del sistema (assenza di vincoli/tutti i nodi sono liberi).

Tipiche tecniche di montaggio FREE consistono nel sospendere tramite uno o più tiranti (meglio se relativamente lunghi) il componente. Un'altra soluzione frequentemente adottata è quella di appoggiarlo su una sede costituita da materiale estremamente cedevole (es. gommapiuma, un letto di molle) incapace di esercitare forze tali da influenzare consistentemente la risposta dinamica del componente.



Esempi di montaggio FREE

Adottando un montaggio di tipo FREE risulta difficile esercitare sul componente eccitazioni molto forti o a frequenze molto basse perché essendo il sistema praticamente labile, a sollecitazioni anche molto piccole corrispondono in genere spostamenti notevoli del vincolo: ciò si traduce quasi esclusivamente nella generazione di moti rigidi del componente in prova.

Tali modi rigidi possono producono nella risposta del sistema dei "falsi modi" caratterizzati da frequenze proprie molto basse che tuttavia possono essere facilmente individuati e trascurati dallo sperimentatore.



Se ad esempio si eccita tramite un martello strumentato un pezzo che è stato appeso tramite un tirante e si misura con un accelerometro posto sul corpo stesso l'accelerazione di un suo punto, nella risposta del sistema si otterrà sicuramente un picco in corrispondenza della frequenza caratteristica associata al moto del pendolo.

Vista l'elevata lunghezza del tirante, la frequenza del moto rigido risulta molto bassa rispetto alle vibrazioni del componente che si intende sperimentare. Risulta quindi facile individuare la frequenza caratteristica del moto rigido.

Inoltre vista l'estrema cedevolezza del vincolo (solo nella direzione dell'eccitazione) solo in corrispondenza delle basse frequenze la risposta del sistema viene influenzata dalla interazione tra componente da identificare e sistema di serraggio.



6.2.3. Montaggio Ground

Il montaggio si definisce GROUND (o Grounded) quando il vincolo realizzato approssima la condizione di incastro perfetto: il vincolo è talmente rigido che eventuali frequenze introdotte dalla "cedevolezza" del vincolo risultano ben al di sopra di quelle di interesse. In queste condizioni è possibile approssimare l'interazione tra vincolo e corpo con un vincolo molto facile da modellare (incastro perfetto, in cui i nodi vincolati sono immobili in posizioni assegnate).

Evidentemente il vincolo GROUND prescelto deve essere tale da non compromettere la mobilità del componente stesso, almeno per quanto riguarda il campo di frequenze di interesse, altrimenti viene ovviamente meno la possibilità ottenere risultati attendibili dalla la prova.



Esempio di Montaggio Ground corretto: Asta snella saldata ad una estremità ad un blocco pieno molto rigido e molto pesante. Il vincolo approssima un incastro perfetto e la risposta flessionale e torsionale dell'asta è facilmente analizzabile.



Esempio di Montaggio Ground errato: Asta snella saldata lungo la sua dimensione prevalente ad un blocco molto rigido e pesante. Il vincolo approssima un incastro perfetto ma la risposta flessionale e torsionale dell'asta è difficilmente studiabile perché il vincolo sopprime proprio le mobilità che si vogliono analizzare.

...

Nessun vincolo GROUND reale può effettivamente realizzare un incastro perfetto: esisterà sempre una frequenza oltre la quale il vincolo non può essere considerato come rigido. L'importante è che tale campo di frequenze cada ben al di sopra di quello di interesse. E' tutto il caso speculare a quello del montaggio FREE: la risposta alle basse frequenze è quella propria del sistema, alle alte frequenze vi sono importanti contributi del sistema di fissaggio.

6.3. Montaggio degli Attuatori

E' buona norma adottare un montaggio FREE per gli attuatori utilizzati per eccitare il sistema in prova: in questo modo si riduce il rischio di introdurre nel sistema sollecitazioni indesiderate e non facilmente quantificabili. Queste possono essere trasmesse dall'attuatore al componente in prova per via solida, attraverso il telaio cui sono collegati tutti gli elementi dell'apparato sperimentale.



Nella figura su riportata è stato schematizzato un esempio in grado di chiarire tale problema: un'asta incastrata ad un telaio viene sollecitata con un attuatore, montato sul medesimo telaio, che esercita su di essa una forza F. Trascurando l'inerzia e la dinamica interna dell'attuatore stesso, si ha che (per il Principio di Azione e Reazione) una forza vincolare F_{θ} con modulo pari a F si scambia tra l'attuatore e il telaio.

Se questa forza F_0 è tale da far vibrare il telaio, in corrispondenza dell'incastro può nascere una forza F^* indotta dalle vibrazioni del telaio stesso. Tale forza, non prevista dallo sperimentatore, può influenzare in maniera determinate la dinamica della trave.

Montando in maniera FREE l'attuatore ed aggiungendo una opportuna massa M allo stesso (in modo da incrementarne l'inerzia) si può impedire la trasmissione della forza F_0 al telaio; si ha infatti:

$$F - F_0 = M\ddot{x} \Longrightarrow F_0 = F - M\ddot{x}$$

Dalla equazione precedente si ricava che se il vincolo è molto cedevole e l'inerzia dell'attuatore è grande (*M* molto grande) la forza trasmessa al telaio è relativamente piccola. Il problema è comunque riconducibile allo studio di una sospensione ottima atta a ridurre le sollecitazioni trasmessa al telaio dall'attuatore.

Nel caso non sia possibile montare l'attuatore in modo FREE e si debba ricorrere ad un montaggio "GROUND" di quest'ultimo, è possibile risolvere il problema interrompendo la continuità meccanica tra attuatore telaio e componente oggetto di sperimentazione.

Il metodo più semplice è comunque quello di ricorrere ad un montaggio FREE del componente oggetto di sperimentazione. In questo caso sarebbe bene che l'inerzia stessa del componente oggetto dello studio fosse sufficientemente elevata rispetto alla frequenza di eccitazione: ciò limiterebbe l'insorgenza di moti rigidi di ampiezza troppo elevata.



6.3.1. Collegamento degli Attuatori al Sistema

La forza effettivamente trasmessa dall'attuatore al sistema meccanico oggetto della sperimentazione deve essere misurata nella maniera più esatta possibile per ridurre il rischio di ottenere funzioni di trasferimento del sistema falsate dalla dinamica dell'attuatore e/o dalle caratteristiche modali del collegamento tra attuatore e oggetto della prova.

E' inoltre buona norma collegare l'attuatore al sistema da identificare tramite componenti che impediscano meccanicamente la trasmissione di sforzi di natura diversa da quello desiderato dallo sperimentatore.



6.4. Principali Tipi di Attuatori

La scelta del tipo di attuatore più adatto a sollecitare opportunamente la struttura (in funzione dell'obiettivo della sperimentazione e delle caratteristiche stesse della struttura) è

strettamente dipendente dal tipo di eccitazione che si vuole fornire al sistema. Tale argomento verrà trattato nel paragrafo successivo, ma nel presente l'obiettivo è analizzare il principio di funzionamento dei trasduttori di forza più frequentemente utilizzati.

6.4.1. Shaker Elettromagnetico

Se la struttura da eccitare è sufficientemente leggera e flessibile, e le forze richieste sono relativamente limitate in ampiezza, il trasduttore più largamente utilizzato è lo shaker elettromagnetico.



Attraverso un generatore di segnali si comanda un amplificatore in modo tale da fornire allo shaker una corrente elettrica di alimentazione proporzionale alla forza che si vuole applicare alla struttura. Lo shaker è costituito da un solenoide, elasticamente vincolato al telaio dello shaker stesso, che si muove in funzione della corrente che circola nella bobina che lo avvolge.

Nel caso ideale il segnale in uscita dal generatore di segnali viene trasformato senza errori in un segnale elettrico che va ad alimentare la bobina. Questa mette in movimento il solenoide con la legge di moto assegnata e quindi alla struttura da eccitare viene impressa (tramite la testa del solenoide) una forza del tutto simile a quella impostata tramite il generatore di segnali. Nella realtà, anche trascurando il fatto che l'amplificatore non può trasformare perfettamente il segnale in ingesso in un segnale di corrente (in uscita) puramente proporzionale, il segnale di forza risultante può essere molto diverso da quello impostato. Ciò è naturalmente determinato dal fatto che il sistema molla-solenoide ha una sua dinamica interna, che a grandi linee fa sì che il sistema si comporti come un filtro passa-basso: se si richiede allo shaker di applicare forzanti con un contenuto in frequenza troppo elevato, il segnale di forza risultante sarà totalmente diverso da quello imposto. Va inoltre detto che una volta che la testa viene collegata alla struttura da eccitare, l'inerzia dello shaker aumenta, e quindi le sue prestazioni diminuiscono rispetto a quelle nominali (a vuoto). Più leggera sarà la struttura da eccitare, maggiore sarà la possibilità di sfruttare le capacità dello shaker.

Va comunque chiarito che, poiché il segnale di comando (dal generatore di segnali) e la forza realmente applicata alla struttura sono generalmente diverse, vi è sempre la necessità di una misura diretta della forza applicata attraverso una cella di carico.

6.4.2. Attuatore Oleodinamico

Sostituendo il sistema bobina-solenoide con un sistema pistone-olio in pressione è possibile applicare alla struttura forze di ampiezza decisamente più elevata. Per utilizzare tale sistema occorre un sistema per il mantenimento di un serbatoio di olio a pressioni anche elevate, un generatore di segnali e un sistema di elettrovalvole. Il generatore di segnali comanda le elettrovalvole che fanno in modo che l'olio in pressione entri nel cilindro attraverso una delle due luci in figura con la pressione desiderata. Quando l'olio in pressione entra in una delle due camere, si determina uno squilibrio tra le pressioni che insistono sulle due facce del pistone, determinandone lo spostamento (o comunque la generazione di una forza approssimativamente pari al prodotto tra l'area trasversale del cilindro e la differenza di pressione che si viene a generare).

Le forze che possono essere sviluppate sono notevolmente superiori a quelle dello skaher: basta pensare che, a parità di pressione, la forza generata è proporzionale alla sezione del cilindro, per cui utilizzando cilindri molto grandi si possono generare forze elevatissime. Tuttavia tale sistema ha grossi limiti sulla dinamica che sono dovuti sia alla dinamica delle elettrovalvole che, e soprattutto, al circuito oleodinamico. Se infatti si vogliono generare significativi spostamenti del pistone (specialmente in corrispondenza di forze elevate), necessario movimentare una grossa quantità di fluido. Per via delle perdite nel circuito idraulico e della viscosità del fluido, la massima portata di olio circolante è relativamente limitata, e di conseguenza anche le caratteristiche dinamiche del trasduttore.

6.4.3. Vibrodina

Quando vi è la necessità di eccitare strutture estremamente grandi (ponti, palazzi, ecc...) è evidente che né shaker né attuatore oleodinamico possono garantire una eccitazione sufficientemente elevata alla struttura. Inoltre tali trasduttori necessitano di un telaio su cui scaricare le razioni vincolari derivanti dall'eccitazione stessa; nel caso fosse necessario eccitare un ponte sospeso (ad un'unica campata) in corrispondenza della sezione mediana del ponte (a sezione con maggior flessibilità) sarebbe estremamente difficile realizzare un telaio (e per di più sufficientemente rigido) su cui montare, ad esempio, un gigantesco trasduttore oleodinamico.

La soluzione più utilizzata è quella di sfruttare le forze di inerzia per l'eccitazione strutturale. La vibrodina in particolare sfrutta la forza centrifuga che si determina quando un corpo è portato in rotazione attorno ad un asse che non sia baricentrico. Schematicamente di può pensare ad un telaio su cui sono montate due grandi ruote dentate (a dentatura esterna) di uguale raggio che ingranano tra loro. Su ciascuna di queste due ruote è fissata una massa eccentrica in posizione angolare opportuna (le due masse devono essere sempre simmetriche rispetto alla tangente comune alle primitive delle ruote dentate); l'eccentricità delle masse può essere regolata a piacere. Un motore movimenta una delle due ruote (ipotizziamo in modo da imporre una velocità angolare ω costante), e l'altra viene trascinata dal collegamento dentato in un moto controrotante con la medesima velocità angolare.



Se le masse squilibranti sono uguali e con la medesima eccentricità, le due forze centrifughe che si generano come conseguenza della rotazione con velocità angolare ω , si combinano in

una forza sempre orizzontale (lungo la tangente comune alle primitive delle ruote dentate) e puramente armonica se la velocità angolare ω è costante. Regolando la velocità angolare è possibile controllare la frequenza dell'eccitazione, tramite l'eccentricità si controlla invece l'ampiezza.

6.4.4. Martello Strumentato

In molti casi, specie per l'analisi modale di strutture relativamente leggere, è conveniente eccitare la struttura con forze impulsive, ossia di durata estremamente breve (ma di ampiezza significativa). Lo strumento più utilizzato a tale scopo è il martello strumentato.



Il martello strumentato è molto simile a un normale martello con una testa metallica relativamente pesante (che può essere ulteriormente appesantita da un contrappeso in modo da aumentare le forze di inerzia che con la martellata eccitano la struttura). Sulla testa è montata una cella di carico che misura la forza che effettivamente si scambiano il martello e la struttura all'atto della eccitazione. I cavi che trasportano il segnale di forza scorrono all'interno dell'impugnatura che a volte contiene anche un primo embrione di condizionamento del segnale analogico. Sulla cella di carico (sulla parte che andrà a contatto della struttura da eccitare) possono essere avvitati dei puntali, costituiti di vario materiale. I puntali possono essere interamente in metallo, oppure ricoperti da vari spessori di gomma più o meno dura. Il compito di tali componenti è quello di costituire un primo

filtro meccanico (ovviamente passa-basso) tra il martello e la struttura da eccitare: se la struttura necessita di eccitazione ad alte frequenze si utilizzerà il puntale in metallo, se le frequenze a cui si vuole sollecitare le struttura sono via via decrescenti, si utilizzeranno puntali con spessori crescenti di gomma e/o di materiale più morbido.

Ovviamente la martellata deve essere impartita alla struttura da mani esperte. Alcune regole di base sono: il polso deve essere il più morbido possibile (non irrigidire l'articolazione), l'angolo tra il braccio e l'avambraccio deve approssimare il più possibile l'angolo retto, la martellata deve essere la più rapida possibile, e in tale ottica un rapido movimento del polso subito dopo l'urto è grandemente utile per allontanare rapidamente la testa del martello dalla struttura. Un rapido allontanamento del martello è tanto più necessario quanto più rigida è la struttura; in tale caso dopo un primo contatto e il conseguente distacco tra martello e struttura, quest'ultima tende rapidamente a ritornare nella sua configurazione originaria, urtando nuovamente la punta del martello (che nel frattempo non ha fatto in tempo ad allontanarsi). Tale fenomeno determina la cosiddetta martellata doppia (due picchi ravvicinati di forza applicata alla struttura) che sono particolarmente deleteri per i risultati dell'analisi modale sperimentale.

6.5. Tecniche di Eccitazione per Analisi Modale

Nel caso dell'analisi modale sperimentale, ovvero della misura delle Funzioni di Risposta in Frequenza dei sistemi meccanici, due sono le principali classi per le modalità di eccitazione che possono essere utilizzati:

- 1. Tecniche monofrequenziali;
- 2. Tecniche multifrequenziali.

Le prime, che si differenziano semplicemente per le modalità pratiche di eccitazione della struttura, consistono nell'applicare alla struttura una forza di tipo armonico, o almeno il più possibile simile ad una forza puramente sinusoidale (caratterizzata da una unica componente spettrale alla pulsazione ω).

Le tecniche multifrequenziali sono più varie, e le principali sono:

- o eccitazione tramite sweep;
- o eccitazione tramite forze impulsive;
- o eccitazione tramite forze casuali (random rumore bianco).

In ogni caso si ricorda ancora che l'analisi modale ha come obiettivo la misura sperimentale delle Funzioni di Risposta in Frequenza dei sistemi meccanici. Se si fa riferimento alla Ricettanza $\alpha(\omega)$ si ha quindi:

$$\alpha(\omega) = \frac{X_0(\omega)}{F_0(\omega)}.$$

La ricettanza, come tutte le altre FRFs, è quindi una funzione complessa (dotata di modulo e fase) della variabile reale ω . La ricettanza può essere calcolata come il rapporto tra la Trasformata di Fourier della risposta (es. spostamento $X_0(\omega)$) e quella della eccitazione (in genere una forza $F_0(\omega)$).

6.5.1. Eccitazione Monofrequenziale

Se si applica ad un sistema una forza di tipo puramente armonico con modulo F_0 e con pulsazione ω , nell'ipotesi che il sistema sia lineare, questo risponderà *a regime* con degli spostamenti di ampiezza X_0 e sfasati di un angolo φ rispetto alla forzante.

Il rapporto tra le ampiezze di spostamenti e forza X_0/F_0 costituisce il modulo della ricettanza, in corrispondenza della pulsazione ω dell'eccitazione. Lo sfasamento φ tra gli spostamenti e la forzante costituisce la fase della ricettanza.

I vantaggi di tale tecnica risiedono nella estrema precisione della misura del modulo e della fase e nei limitati mezzi richiesti per la identificazione (non è richiesto un pesante postprocessing dei segnali).

Gli svantaggi, se si trascurano le difficoltà di generare una forza eccitatrice rigorosamente sinusoidale, consistono nei tempi di misura. Per ogni sessione di misura è infatti possibile misurare un solo punto della FRF corrispondente alla pulsazione della forzante. Se si intende coprire un campo di frequenze vasto, e con una sufficiente risoluzione in frequenza della FRF sperimentale, è dunque necessario effettuare un gran numero di prove. Inoltre modulo e fase degli spostamenti vanno misurati solo dopo che si è esaurito il transitorio (devono essere relativi al comportamento a regime del sistema): nei sistemi poco smorzati il transitorio può avere tuttavia durata abbastanza rilevante, e quindi ciò comporta un ulteriore allungamento dei tempi di misura.

6.5.2. Sweep in Frequenza

La tecnica dello sweep è, fra le tecniche multifrequenziali, quella che più somiglia alla eccitazione monofrequenziale.

Lo sweep è costituito da una forzante analiticamente molto simile a quella sinusoidale, in cui però la pulsazione non è costante, ma viene fatta variare linearmente (e ciclicamente) tra un valore massimo e un minimo.



Si può dimostrare che la trasformata di Fourier di uno sweep (e quindi il suo contenuto in frequenza) è pressoché costante tra le pulsazioni ω_{min} e $2\omega_{max}$, mentre per le frequenze al di fuori del suddetto range, i contributi diminuiscono progressivamente.



Se il contenuto in frequenza dell'eccitazione è rilevante nell'intervallo $[\omega_{\min}, 2\omega_{\max}]$, lo stesso si potrà dire della risposta del sistema. Effettuando quindi il rapporto tra la Trasformata di Fourier e risposta e quella dell'eccitazione, è quindi possibile ricavare l'andamento della FRF nell'intervallo $[\omega_{\min}, 2\omega_{\max}]$. Al di fuori di tale intervallo, il rapporto tra le due trasformate non è in generale relazionato alla FRF e quindi non va minimamente considerato nella fase di identificazione. Per tali frequenze l'eccitazione e la relativa risposta del sistema sono talmente piccole da risultare in ombra rispetto agli immancabili rumori (disturbi) presenti nei segnali misurati.

Ovviamente vi sono dei precisi legami che permettono di settare in modo ottimale le pulsazioni limite dello sweep ($\omega_{min} \in \omega_{max}$) in funzione dell'ampiezza del semiperiodo T. E' infatti impensabile effettuare uno sweep che parta dalla pulsazione $\omega_{min} = 1 \ rad/s$ fino ad arrivare a $\omega_{max} = 1000 \ rad/s$ in un tempo T pari a 10 s, e con esso sperare di eccitare in maniera opportuna il campo di frequenze 1÷2000 rad/s. In pratica si utilizzano un certo numero di sweep con contenuto in frequenza relativamente limitato, ma che riescono globalmente a ricoprire tutto il campo di frequenze di interesse.

6.5.3. Eccitazione Impulsiva

Per eccitazione impulsiva si intende una eccitazione di durata estremamente breve (in teoria infinitesima) e di ampiezza significativa. Analiticamente l'impulso unitario è descritto dalla funzione Delta di Dirac $\delta(t-\tau)$, costituita da un segnale nullo per ogni tempo $t \neq \tau$ e da un segnale non nullo in corrispondenza dell'istante $t = \tau$ con ampiezza tale da rendere unitaria l'area sottesa dalla curva rappresentante la funzione stessa sul piano ampiezza-tempo.

In sostanza la Delta di Dirac può essere immaginata come la funzione limite di quella successivamente rappresentata analiticamente e graficamente, per $\varepsilon \rightarrow 0$.



Ovviamente l'area sottesa dalla curva vale:

$$base \cdot altezza = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$$

Si ha quindi che $\delta(\tau) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\tau, \varepsilon)$.

La funzione Delta di Dirac $\delta(t)$ ($\tau=0$) assume particolare interesse in quanto la sua Trasformata di Fourier (e quindi il suo contenuto in frequenza) è rigorosamente costante e pari a $\frac{1}{2\pi}$.

Poiché è noto che la Trasformata di Fourier della risposta del sistema si può ottenere come prodotto tra la FRF e la Trasformata di Fourier dell'eccitazione, si ha che nel caso della forzante impulsiva agente all'istante t=0 (e della ricettanza):

$$X_0(\omega) = \alpha(\omega)F_0(\omega) = \frac{1}{2\pi}\alpha(\omega);$$

ovvero il contenuto in frequenza della risposta è proporzionale alla FRF considerata.

In teoria quindi, se si fosse sicuri di riuscire ad applicare al sistema un impulso perfetto, non sarebbe neppure necessario misurare la forza effettivamente applicata: a meno di un fattore di scala facilmente identificabile, il contenuto in frequenza della risposta sarebbe già la FRF che si voleva misurare.

Nella pratica non è tuttavia pensabile di poter applicare un impulso ideale: anche le 'martellate migliori' hanno una durata finita, e la forza scambiata tra martello e struttura in tale periodo è tutt'altro che costante. Sta di fatto che comunque minore è la durata della

forzante impulsiva, maggiore e più 'piatto' è il contenuto in frequenza effettivo dell'eccitazione.



Se quindi la martellata è applicata sufficientemente bene, allora il contenuto in frequenza dell'eccitazione è maggiore del campo di frequenze di interesse per la misura: misurando contemporaneamente la forza applicata dal martello strumentato e la relativa risposta del sistema (dopo aver effettuato le Trasformate di Fourier e averne fatto il rapporto) è possibile ottenere con unica prova la FRF del sistema (almeno per ciò che riguarda il campo di frequenze di interesse).

6.5.4. Eccitazione Random

Se si applica al sistema una forza con andamento temporale del tutto casuale (random), al pari di quanto succede per l'impulso, si riesce ad eccitare il sistema in corrispondenza a tutte le frequenze. Sempre analogamente al caso dell'impulso, un segnale random del tutto casuale (anche detto white, bianco) *avrebbe* un contenuto in frequenza costante, almeno per ciò che riguarda il modulo.

Si potrebbero quindi ripetere i ragionamenti già fatti per l'impulso e quindi concludere che teoricamente basta una sola prova per riuscire a identificare completamente le FRFs del sistema.



Anche se la filosofia è in effetti la medesima, è d'obbligo utilizzare il condizionale per le affermazioni precedenti. In effetti i passaggi già sviluppati per l'impulso non possono essere ripetuti per una forza casuale perché questa <u>non soddisfa la condizione di Dirichelet</u>:

$$\int_{0}^{T} |f(t)| dt < \infty;$$

è perciò impossibile effettuare la Trasformata di Fourier della forzante, e di conseguenza calcolare le FRFs.

E' necessario allora utilizzare degli operatori statistici, ovvero delle funzioni di correlazione dei segnali che operino nel dominio di tempo. Un operatore di tale tipo può essere indicato come segue:

$$R_{ff}(\tau) = E[f(t), f(t+\tau)].$$

Il simbolo *E* rappresenta un operatore statistico come il valor medio, o il valor quadratico medio, e la funzione assume il nome di Valore Atteso (Expected Value) della funzione f(t). Per lo scopo che si è prefisso, si utilizzerà la funzione detta AUTOCORRELAZONE del segnale f(t) definita come segue:

$$R_{ff}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{T}\right) \int_0^T f(t) f(t+\tau) dt;$$

in cui in pratica si esegue l'integrale del prodotto della funzione f(t) con la funzione medesima, ma shiftata (sfasata, traslata) rispetto alla funzione 'originale' di τ secondi. E' facile immaginare che l'Autocorrelazione sia una funzione con massimo in corrispondenza del valore τ =0, e modulo via via decrescente con l'allontanarsi dall'asse delle ordinate.



L'Autocorrelazione di un segnale random (a differenza del segnale random stesso), rispetta la Condizione di Dirichelet, ed è quindi possibile effettuarne la Trasformata di Fourier. La Trasformata di Fourier dell'Autocorrelazione $R_{ff}(\tau)$ viene generalmente indicata con $S_{ff}(\omega)$ e prende il nome di (MEAN-SQUARE) POWER SPECTRAL DENSITY (Densità di Potenza Spettrale):



Tale funzione è un indice del 'contenuto in frequenza' di segnali che non rispettano la Condizione di Dirichelet (e quindi anche dei segnali random).

Ovviamente la Power Spectral Density può essere utilizzata anche su segnali che rispettano tale condizione, e anche su segnali periodici. Quello che si ottiene è un diagramma molto simile a quello della Trasformata di Fourier (e quindi del vero contenuto in frequenza del segnale): i moduli risulteranno generalmente più bassi, ma i picchi negli spettri si avranno in corrispondenza delle stesse frequenze.

In maniera analoga è possibile definire la finzione di CROSSCORRELAZIONE tra l'eccitazione f(t) e la risposta del sistema x(t):

$$R_{fx}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{T}\right) \int_0^T f(t) x(t+\tau) dt;$$

dalla quale, effettuando la Trasformata di Fourier, si ottiene il CROSS-SPETTRO (Cross Spectral Density) dei due segnali:

$$S_{fx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{fx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \,.$$

Si può dimostrare che le FRFs dei sistemi meccanici (sia nel caso di eccitazione random, che di altro tipo) si possono ottenere come rapporto tra il Cross-Spettro di eccitazione e risposta e la Power Spectral Density della eccitazione:

$$\alpha(\omega) = \frac{S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)}.$$

Va inoltre aggiunto che come non è possibile ottenere un impulso perfetto, parimenti non è possibile riprodurre una forzante puramente casuale (*white*, bianca). Anche se un generatore di segnali riuscisse effettivamente a generare un segnale di tale tipo, il sistema fisico di eccitazione (shaker o altro) priverebbe sicuramente il segnale di forza effettivo del suo contenuto alle alte frequenze. Il segnale così ottenuto si indica generalmente come *pink* (rosa), se si vuole indicare che è genericamente privo delle alte frequenze, oppure *coloured* (colorato) se in esso alcune frequenze spiccano più delle altre.

Le considerazioni già espresse per l'impulso possono in questo caso ripetersi: anche se il segnale non è del tutto casuale, ma il suo 'contenuto in frequenza' è sufficientemente elevato, è possibile comunque identificare con una unica prova la FRF considerata, ovviamente solo limitatamente all'intervallo di interesse.

6.6. Metodo di Duhamel

Il metodo di Duhamel è una tecnica per la risoluzione delle equazioni differenziali che si basa sul dominio del tempo. Nel caso in oggetto può essere utilizzato come alternativa alla Trasformata di Fourier per trovare la risposta, nel dominio del tempo, di un sistema lineare eccitato da una forzante di tipo transitorio.

La risposta nel dominio del tempo di un sistema eccitato con una forza impulsiva ideale (Delta di Dirac) è detta Funzione di Risposta all'Impulso o IRF (Impulse Response Function) e, come si è già detto ha una stretta relazione con la Funzione di Risposta in Frequenza del sistema (a meno di una costante moltiplicativa, ne è l'Antitrasformata di Fourier).

Tale funzione viene di solito indicata con:

$h(t-\tau);$

che sta ad indicare che è una risposta che varia con il tempo, ma che dipende anche dall'istante τ in cui viene applicato l'impulso $\delta(t-\tau)$. Intuitivamente si capisce come questa funzione sarà nulla per t $<\tau$, avrà un massimo in corrispondenza (o comunque nell'intorno) dell'istante t= τ , ed per t> τ si svilupperà con oscillazioni smorzate che si annulleranno quindi per t $\rightarrow\infty$.

Più in particolare sarà:

$$h(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) F_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) \left(\frac{1}{2\pi} e^{-i\omega \tau}\right) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega$$

Infatti se è vero che la Trasformata di Forurier della Delta di Dirac $\delta(t)$ (con $\tau=0$) vale esattamente (1/2 π), ciò non è esattamente vero per la generica Delta di Dirac $\delta(t-\tau)$. La generica Delta di Dirac $\delta(t-\tau)$ può essere interpretata come una traslazione (di ampiezza pari a τ secondi) lungo l'asse temporale della $\delta(t)$. Nella precedente formulazione si è quindi sfruttata una delle proprietà della Trasformata di Fourier riguardante la traslazione del tempo, ovvero:

se risulta $x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\Rightarrow} X(f)$, si ha anche che $x(t-t_1) \stackrel{\mathcal{F}}{\Rightarrow} X(f) e^{-i\omega t_1}$.

In pratica si ha che la Funzione di Risposta all'Impulso all'istante generico t= τ ($h(t - \tau)$) risulta traslata di τ secondi rispetto alla Funzione di Risposta all'Impulso all'istante t=0, generalmente indicata con h(t).

Passando poi ad analizzare la generica forzante di tipo transitorio, è facile comprendere come questa possa essere approssimata tramite una sommatoria di forze 'quasi impulsive' di ampiezza $f(\tau)$ e di durata ε .



Passando al limite si può quindi interpretare la forzante f(t) come un integrale di impulsi generici $\delta(t-\tau)$ caratterizzati non più da modulo unitario, ma ciascuno di una ampiezza pari a $f(\tau)$, ovvero:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) f(\tau) d\tau .^{8}$$

Passando alla Trasformata di Fourier si ha:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\delta(t-\tau)) f(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau) d\tau$$

in cui si è indicato con \mathcal{F} l'operatore lineare 'Trasformata di Fourier'.

La risposta del sistema nel dominio del tempo può dunque essere calcolata come segue:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \tau} f(\tau) d\tau \right) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \tau} f(\tau) d\tau \right) e^{i\omega t} d\omega; \end{aligned}$$

dalla quale, sfruttando una delle numerose proprietà degli integrali multipli, si ottiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau) d\tau \right) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) e^{-i\omega\tau} e^{i\omega\tau} d\omega \right) f(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \right) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

La precedente formulazione è nota come *l'integrale di sovrapposizione* o *di Duhamel*, e che ha un significato **fondamentale** nella teoria dei sistemi lineari. Esso afferma che:

il segnale di uscita da un sistema lineare e stazionario è la convoluzione di due funzioni: l'eccitazione e la risposta all'impulso.

Che possiamo, in sintesi scrivere formalmente:

$$x(t) = f(t) * h(t - \tau).$$

E' anche possibile riscrivere l'integrale in una forma del tutto equivalente:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau.$$

Il vantaggio maggiore dell'analisi che fa uso dell'integrale di sovrapposizione consiste nel fatto che una volta trovata la risposta all'impulso, le successive operazioni sono *completamente formalizzate*. Anche se non si riesce a risolvere analiticamente l'integrale, è

 $^{^{8}}$ Nel caso in cui la forza sia transiente, gli estremi di integrazione possono essere limitati agli istanti t₁ e t₂, rispettivamente gli istanti iniziale e finale della forzante.

sempre possibile calcolarlo numericamente attraverso l'uso di metodi computazionali (calcolatori).

Da quanto fin qui osservato è quindi chiara l'importanza della risposta alla Delta di Dirac dei sistemi stazionari e lineari. Volendo riassumere, si possono estrarre le seguenti sintetiche osservazioni.

Come abbiamo visto la Trasformata di Fourier di una funzione delta, $\delta(t)$, è una funzione costante. Questo significa che, nel dominio delle frequenze ω , tutte le frequenze sono possibili con la stessa ampiezza, ovvero lo spettro di una funzione Delta è infinitamente esteso. Quindi sollecitare un sistema con un segnale impulsivo, la Delta di Dirac, vuol dire sollecitarlo anche con tutte le frequenze possibili da 0 a infinito.⁹

⁹ Alla stessa conclusione si può giungere anche per via euristica, senza invocare le trasformazioni integrali. Infatti se ricordiamo il Principio di Indeterminazione di Heisenberg secondo il quale il prodotto $\Delta E^* \Delta t \approx \hbar$ ne ricaviamo che $\Delta \omega^* \Delta t \approx 1$ e quindi ad un impulso infinitamente stretto nel dominio temporale ($\Delta t \rightarrow 0$), corrisponde un intervallo di frequenze infinitamente esteso nel dominio delle frequenze ($\Delta \omega \rightarrow \infty$).

7. Sistemi non lineari

7.1. Introduzione

Finora sono stati studiati sistemi vibranti di tipo lineare. Lo studio di tali sistemi ha consentito di ottenere una trattazione generale sempre applicabile ai vari sistemi, sia con uno che con più gradi di libertà, sia in condizioni di moto libero (assenza di forzanti e/o transitori) che di moto forzato. Tale trattazione, pur sviluppata essenzialmente ipotizzando spostamenti e/o forzanti di tipo puramente armonico, fornisce una soluzione ingegneristicamente completa e valida per qualunque tipo di forzante applicata.

Lo studio dei sistemi lineari sfrutta infatti pesantemente il *principio di sovrapposizione degli effetti* grazie al quale è possibile analizzare separatamente, per poi accorpare tutte le informazioni così ottenute, la posizione di equilibrio (unica e sempre stabile), il transitorio e il comportamento di regime del sistema.

Nello studio dinamico di tali sistemi si ha a che fare con una equazione (o un sistema di equazioni nel caso di più gradi di libertà) differenziale, ordinaria, lineare e del secondo ordine: studiando l'equazione omogenea si determina il comportamento libero o il transitorio, studiando la soluzione "particolare" dell'equazione completa (non omogenea) si determina il comportamento forzato.

Tuttavia è necessario ricordare che di per sé non esistono sistemi reali perfettamente lineari: i sistemi lineari costituiscono solamente un modello semplificato dei sistemi meccanici fisici. E' però vero che quando i sistemi evolvono compiendo piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibro, una modellazione lineare non comporta di norma l'introduzione di errori ingegneristicamente significativi, consentendo d'altra parte di ottenere velocemente la soluzione delle equazioni di moto. Prima di introdurre lo studio dei più semplici sistemi non lineari, è utile quindi ricordare alcune delle principali caratteristiche necessarie affinché un sistema possa essere efficacemente modellato come lineare:

- i materiali con cui è realizzato non devono raggiungere lo snervamento;
- le deformazioni non devono essere eccessive;
- non devono essere introdotti elementi propriamente lineari (giochi, saturazioni, etc..);
- gli attriti, pur ineliminabili, devono essere ridotti al minimo.

Si fa ancora presente che le precedenti sono solo alcune tra le moltissime condizioni che devono essere rispettate affinché un sistema possa essere validamente modellato come lineare. Se tali condizioni non sono verificate, è inevitabile dover ricorrere a modelli non lineari, e quindi affrontare lo studio delle equazioni differenziali, sempre di secondo ordine, che ne conseguono.

Deve comunque essere ben chiaro che per le equazioni on lineari non sempre, anzi ciò sarà assai raro, sarà possibile ottenere una soluzione in forma chiusa, né tantomeno una metodologia generale come quella sviluppata per i sistemi lineari.

Basti pensare al fatto che non è più applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti: ciò ha come diretta conseguenza il fatto che non vi è più una relazione di diretta proporzionalità tra causa ed effetto (forza e spostamenti), e che non sarà più possibile ridurre lo studio a forzanti e spostamenti di tipo puramente armonico. E' proprio per tali motivi che lo studio dinamico dei sistemi non lineari viene condotto quasi esclusivamente tramite tecniche numeriche.

7.2. Equazione di moto

Per cominciare l'analisi dei sistemi non lineari, è d'obbligo iniziare dall'analisi dei sistemi con un solo grado di libertà (gli unici a cui si farà cenno in codesto Corso): il più generico modello fisico di tali sistemi è riportato nella figura seguente.



Ci si pone nel caso più generico in cui si ha:

- x_A variabile con il tempo;
- non si può trascurare l'effetto del peso;
- è applicata al sistema una forza tempovariante di legge F(t) qualsiasi;
- la non linearità del sistema è stata introdotta attraverso la "molla" non lineare;
- le caratteristiche non lineari si sono ipotizzate tempoinvarianti: la molla modella una forza dipendente dalla sua deformazione e dalla sua velocità di deformazione, ma indipendente dal tempo.

Applicando le equazioni cardinali della dinamica, si ottiene facilmente l'equazione di moto del sistema:

$$m\ddot{x} = F(t) - mg - f(x - x_A, \dot{x} - \dot{x}_A);$$

dove con $f(x - x_A, \dot{x} - \dot{x}_A)$ si è indicata la forza sviluppata dalla molla non lineare.

La stessa equazione può essere semplificata, o comunque riscritta in un'altra forma, introducendo lo spostamento relativo dei due estremi della molla, ovvero indicando:

$$x_{rel} = x - x_A;$$

da cui si ottiene:

$$m\ddot{x}_{rel} = F(t) - mg - f(x_{rel}, \dot{x}_{rel}) - m\ddot{x}_A.$$

L'ultima espressione rappresenta quindi l'equazione di moto più generica per i sistemi non lineari SDOD, che solo apparentemente risulta molto simile a quella dei sistemi lineari.

Il passo successivo è quello individuare la posizione di equilibrio del sistema. Come già detto, ai sistemi non lineare non è possibile applicare il *principio di sovrapposizione degli effetti*, e quindi non è possibile assolutamente trascurare i termini costanti (come ad esempio la forza peso). In ogni caso la posizione di equilibrio si individua introducendo nell'equazione precedente le seguenti ipotesi:

- la forza esterna deve essere costante $(F(t)=F_0)$;
- il terreno (il telaio) deve essere fermo $\ddot{x}_A = 0$;
- l'accelerazione e la velocità del sistema devono entrambe essere nulle $(\ddot{x}_{rel} = \dot{x}_{rel} = 0).$

Introducendo le precedenti ipotesi nell'equazione di equilibrio si ottiene la seguente equazione algebrica non lineare:

$$F_0 - mg = f(x_{rel0}, 0);$$

dalla quale, esplicitando x_{rel0} , si ottengono le eventuali posizioni di equilibrio del sistema. Infatti, a differenza dei sistemi lineari in cui la posizione di equilibrio era sempre presente, nei problemi non lineari questa può non esistere, come pure non essere unica.

Una volta individuate le posizioni di equilibrio, è necessario analizzare se queste sono stabili (a seguito di uno spostamento infinitesimo il sistema ritorna nella posizione iniziale) o instabili (a seguito di uno spostamento infinitesimo il sistema si allontana definitivamente dalla posizione iniziale). Per far questo è necessario differenziare la caratteristica della molla non lineare $f(x_{rel}, \dot{x}_{rel})$ rispetto a x_{rel} e \dot{x}_{rel} . In tale modo l'equazione di moto viene linearizzata, ed è esprimibile come segue:

$$m\ddot{x}_{rel} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_{rel}} \bigg|_{\substack{x_{rel} = x_{rel0} \\ \dot{x}_{rel} = 0}} \dot{x}_{rel} + \frac{\partial f}{\partial x_{rel}} \bigg|_{\substack{x_{rel} = x_{rel0} \\ \dot{x}_{rel} = 0}} \left(x_{rel} - x_{rel0} \right) = F(t) - F_0 - m\ddot{x}_A.$$

Analizzando i segni delle derivate parziali della caratteristica della molla è possibile analizzare le caratteristiche delle posizioni di equilibrio:

• se $\frac{\partial f}{\partial x_{rel}}\Big|_{\substack{x_{rel}=x_{rel0}\\\dot{x}_{rel}=0}} > 0$ il sistema è stabile: per spostamenti infinitesimi la molla (non

lineare) si comporta come una molla lineare con costante elastica positiva. La posizione di equilibrio è invece instabile se la derivata è negativa;

• se $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_{rel}}\Big|_{\substack{x_{rel}=x_{rel0}\\x_{rel}=0}} > 0$ il sistema, nell'intorno della posizione di equilibrio, è smorzato: a

seguito di uno spostamento infinitesimo dalla posizione di equilibrio stabile, il sistema evolve con oscillazioni smorzate fino a ritornare (fermo) nella condizione iniziale. Se viceversa la derivata è negativa, a seguito di uno spostamento anche infinitesimo dalla posizione di equilibrio, si innescano delle vibrazioni di ampiezza via via crescenti che lo allontanano sempre di più dalla posizione iniziale: tali oscillazioni si dicono generalmente di tipo *autoeccitato*.

Individuate le posizioni di equilibrio si può quindi passare allo studio dinamico vero e proprio del sistema. Per effettuare tale analisi si farà quindi riferimento al generico sistema precedentemente illustrato (SDOF, con molla non lineare e forzante applicata) e di cui è già stata individuata l'equazione di moto.

Per brevità nella scrittura, da questo momento in poi si indicherà semplicemente con x la distanza relativa x_{rel} tra gli estremi della molla non lineare. Inoltre si fa l'ipotesi di separare

dalla caratteristica della molla la parte lineare da quella non lineare, in modo da esprimere la $f(x, \dot{x})$ nella forma $f(x, \dot{x}) = c\dot{x} + kx + f'(x, \dot{x})$. In tal modo l'equazione di moto del sistema diventa:

 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + f'(x, \dot{x}) = F(t) - mg - m\ddot{x}_A.$

Se necessario, lo stesso approccio può essere applicato anche ai sistemi con più gradi di libertà. In questo caso dovrà essere definito il vettore $\{g\}$, dipendente dal vettore spostamento $\{x\}$ e dalle velocità dei vari gradi di libertà del sistema $\{g\} = \{g_i(\{x\}, \{\dot{x}\})\}$, che caratterizzi la parte non lineare del sistema. In questo caso si otterrà dunque il seguente sistema:

 $M\{\ddot{x}\}+C\{\dot{x}\}+K\{x\}+\mu\{g\}=\overline{F}(t)\};$

in cui lo scalare μ definisce il grado di non linearità del sistema (se μ =0 si ricade nel caso di sistema lineare).

Benché tale sistema somigli molto a quello caratteristico dei sistemi lineari, ora non sarà più possibile risolverlo sfruttando le proprietà della matrice modale del sistema non smorzato: infatti che anche nel caso di smorzamento proporzionale (o di assenza di smorzamento) non sarà più possibile disaccoppiare le equazioni di moto a causa dei termini non lineari. Tuttavia a volte, nei casi di non linearità lievi, si potrà ipotizzare (introducendo errori più o meno rilevati) che il sistema sia disaccoppiabile. In tale ipotesi si potrebbe quindi ricondursi alla risoluzione di un sistema di equazioni del tipo seguente:

$$m_i \ddot{x}_{pi} + c_i \dot{x}_{pi} + k_i x_{pi} + f'(x_{pi}, \dot{x}_{pi}) = F_{pi}(t);$$

in cui con x_{pi} (*i*=1,2,...,*n*) sono state indicate le coordinate principali.

Per lo studio dei sistemi MDOF, come pure per quelli SDOF, possono anche essere sfruttate tecniche che si basano sulle variabili di stato, ma comunque non esistono metodi generali per la soluzione delle equazioni differenziali non lineari, né tantomeno di sistemi di equazioni di tale tipo. Di seguito varranno analizzati soltanto alcuni casi molto particolari per cui è possibile ottenere una qualche forma di soluzione in forma chiusa (anche parziale), o almeno avvicinarsi ad essa.

7.3. Sistemi non lineari conservativi: moto libero

Quando la funzione $f(x, \dot{x})$ non dipende da \dot{x} , il sistema è non smorzato e quindi conservativo, non essendo presenti fenomeni che comportano dissipazione di energia.

Nell'ipotesi di limitarsi allo studio delle oscillazioni del sistema nell'intorno della posizione di equilibrio corrispondente alla posizione x(0)=0 (vista l'arbitrarietà del sistema di riferimento non è riduttivo introdurre tale ipotesi), l'equazione di moto risulta come segue: $m\ddot{x} + f(x) = 0$.

Un primo tentativo per la risoluzione dell'equazione differenziale può essere lo sviluppo in serie di Taylor della f(x) nell'intorno di una configurazione di equilibrio (se stabile):

$$m\ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0} (x-x_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_{x=x_0} (x-x_0)^3 + \dots = 0$$

Con tale operazione è però evidente che non si compiono grossi progressi: al posto di una equazione non lineare qualunque ci si è ricondotti ad una equazione in cui sono contenuti solo termini polinomiali della varabile *x*. Anche per tali equazioni non esistono tecniche generali per la risoluzione, ovviamente a meno che non si limiti a risolvere l'equazione che si ottiene troncando la serie al primo termine, il che significa linearizzare il sistema.

Tale forma è comunque utile perché permette di sviluppare alcune considerazioni che possono risultare importanti per l'analisi del sistema. Innanzitutto se la posizione di equilibrio x_0 è stabile, nella serie di Taylor compaiono solo i termini con l'esponente della derivata dispari: infatti solo nel caso che la forza f(x) sia di tale tipo (di tipo dispari, ovvero simmetrica rispetto all'origine) la condizione di equilibrio può essere sempre stabile.

Infatti solo le componenti con esponenti dispari forniscono una forza di "richiamo" (una *restoring force*), ovvero una forza tale che, come succede per la molla lineare, si oppone agli spostamenti del sistema: se il sistema si sposta in una certa direzione, la forza ha un certo segno, se il sistema si sposta nella direzione opposta, la forza che ne consegue avrà il verso contrario. Viceversa le componenti con segno pari determinano una forza che rimane del medesimo segno qualunque siano gli spostamenti del sistema.

Inoltre, solo nel caso in cui ci si trovi di fronte ad una *restoring force*, è presumibile che gli spostamenti del sistema nell'intorno della posizione di equilibrio siano delle vere e proprie oscillazioni: sicuramente non armoniche (un seno o un coseno non soddisferebbero l'equazione differenziale), ma comunque di tipo periodico attorno alla posizione di equilibrio (si ricordi che il sistema non è smorzato). Il moto quindi risulterà complesso ma, come insegna l'analisi armonica, sarà comunque composto da un moto armonico ad una

frequenza di base, dipendente dall'ampiezza delle vibrazioni e dal sistema, e da una serie di armoniche.

E' possibile inoltre sviluppare ulteriori considerazioni sull'equazione di moto. Si può infatti facilmente dimostrare che:

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = d\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{1}{dt} = d\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dx}\frac{1}{dt} = d\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt}\frac{1}{dx} = \dot{x}d(\dot{x})\frac{1}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot{x}^2)}{dx}$$

Andando a sostituire nell'equazione di moto, si ottiene:

$$m\ddot{x} + f(x) = 0;$$

$$\ddot{x} = -\frac{f(x)}{m};$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(\dot{x}^2)}{dx} = \ddot{x} = -\frac{f(x)}{m};$$

$$\frac{d(\dot{x}^2)}{dx} = -\frac{2}{m}f(x);$$

$$d(\dot{x}^2) = -\frac{2}{m}f(x)dx.$$

Per capire meglio il significato della precedente equazione, con facili passaggi è possibile ottenere la seguente espressione:

$$\frac{1}{2}md(\dot{x}^2) = -f(x)dx;$$
$$d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + f(x)dx = 0$$

E' chiaro dunque che la presente equazione altro non è che il bilancio energetico del sistema, perfettamente in equilibrio in assenza di fenomeni dissipativi, in cui $\left(\frac{1}{2}m(\dot{x})^2\right)$ rappresenta la variazione dell'energia cinetica del sistema e f(x)dx il lavoro delle forze non lineari, ma conservative.

Riprendendo con i calcoli utili alla risoluzione dell'equazione differenziale, con una integrazione è possibile trovare una equazione utilizzabile almeno per la determinazione del periodo dell'oscillazione del sistema. Calcolando l'integrale indefinito di entrambi i membri della precedente equazione si ha:

$$\dot{x}^2 = -\frac{2}{m} \int f(x) dx + c;$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \sqrt{-\frac{2}{m} \int f(x) dx + c} \; .$$

Nelle ipotesi precedentemente fatte (forza di richiamo, simmetrica rispetto all'origine) si ha che quando il sistema raggiunge il massimo spostamento x_m (peraltro non ancora noto) la velocità sarà nulla. Sfruttando tale osservazione è possibile calcolare il valore della costante *c*. Alternativamente, ed è anzi consigliabile, è possibile sviluppare l'integrale definito imponendo come estremi di integrazione l'istante generico e quello in cui si raggiunge la massima oscillazione ($x=x_m$ e velocità nulla). In tale modo si ottiene:

$$\int_{\dot{x}^{2}}^{0} d(\dot{x}^{2}) = -\frac{2}{m} \int_{x}^{x_{m}} f(u) du;$$

$$-\dot{x}^{2} = -\frac{2}{m} \int_{x}^{x_{m}} f(u) du;$$

$$\dot{x}^{2} = \frac{2}{m} \int_{x}^{x_{m}} f(u) du;$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{x}^{x_{m}} f(u) du.$$

A questo punto, separando le variabili, si può integrare nuovamente la precedente relazione ottenendo la seguente relazione, valida dall'istante iniziale all'istante in cui il sistema raggiunge la massima oscillazione:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \int_{x}^{x_m} f(u) du}}.$$

Nell'ipotesi che all'istante iniziale il sistema si trovi nella posizione di equilibrio (x(t)=0 per t=0, ma ovviamente con una velocità iniziale non nulla), si ottiene:

$$\int_{0}^{t} dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{u'}^{x_{m}} f(u) du} du';$$

la cui integrazione porta alla seguente equazione:

$$t = \int_0^x \frac{du'}{\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{u'}^{x_m} f(u) du} \, .$$

Tale equazione è dunque valida per $0 \le x \le x_m$, ovvero per un qualsiasi istante compreso nel quarto di periodo tra l'istante iniziale (*t*=0 con *x*(*t*)=0) e quello in cui il sistema raggiunge la massima elongazione (*x*(*t*)=*x_m*). Tuttavia, poiché si è ipotizzato che il sistema sia simmetrico, è legittimo supporre che tutti i quarti dell'oscillazione abbiano la stessa durata. In tale ipotesi il periodo della oscillazione è esprimibile tramite la seguente relazione:

$$T = 4 \int_{0}^{x_m} \frac{du'}{\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{u'}^{x_m} f(u) du}.$$

Individuato il periodo delle oscillazioni del sistema, rimane ancora da trovare l'ampiezza massima degli spostamenti (x_m è infatti presente nell'equazione del periodo, ma il suo valore numerico è ancora incognito – il periodo è quindi funzione dell'ampiezza!). L'ampiezza potrebbe essere determinata tramite la conoscenza del valore della velocità in un istante qualsiasi. In particolare, ipotizzando di conoscere il valore della velocità all'istante iniziale, l'equazione di conservazione dell'energia permette di calcolare facilmente il valore desiderato:

$$\left(\dot{x}_0\right)^2 = \frac{2}{m}\int_0^{x_m} f(x)dx \, .$$

La relazione che lega la velocità iniziale all'ampiezza degli spostamenti si determina infatti sviluppando il precedente integrale definito, relazione che in pratica rappresenta l'uguaglianza tra l'energia cinetica iniziale del sistema e il lavoro compiuto in un quarto del periodo.

Purtroppo generalmente la relazione che lega x_m alla velocità iniziale è in forma implicita e non esiste un metodo generale né per il calcolo dell'integrale né per esplicitare x_m .

7.3.1. Esempio

Si faccia riferimento ad un sistema che presenta una molla non lineare la cui caratteristica sia composta da una parte lineare e da una non lineare costituita da un termine cubico:

$$f_{el}(x) = kx + k_1 x^3 = k \left(x + \frac{k_1}{k} x^3 \right) = kx \left(1 + \mu x^2 \right).$$

Sviluppando senza troppe difficoltà i semplici passaggi dettati dalle linee guida precedentemente esposte, è possibile ricavare la relazione che permette di calcolare l'ampiezza massima delle oscillazioni x_m . Questo costituisce infatti uno dei rarissimi casi in

cui è possibile individuare una soluzione in forma chiusa (anche se solo limitatamente all'ampiezza massima delle oscillazioni, non certo alla x(t) completa). Sviluppando i passaggi si ha:

 $(\dot{x}_{0})^{2} = \frac{2}{m} \int_{0}^{x_{m}} f(x) dx \implies (\dot{x}_{0})^{2} = \frac{2}{m} \int_{0}^{x_{m}} [kx(1+\mu x^{2})] dx = \frac{2}{m} \left[\frac{1}{2} k \left(x^{2} + \frac{1}{2} \mu x^{4} \right) \right]_{0}^{x_{m}} = \frac{k}{m} \left(x_{m}^{2} + \frac{1}{2} \mu x_{m}^{4} \right);$ $(\dot{x}_{0})^{2} = \frac{k}{m} x_{m}^{2} + \frac{1}{2} \frac{k}{m} \mu x_{m}^{4} \implies \frac{k}{m} x_{m}^{2} + \frac{1}{2} \frac{k}{m} \mu x_{m}^{4} - (\dot{x}_{0})^{2} = 0 \implies x_{m}^{4} + 2 \frac{1}{\mu} x_{m}^{2} - \frac{2m}{\mu k} (\dot{x}_{0})^{2} = 0;$ $x_{m}^{2} = -\frac{1}{\mu} \pm \sqrt{\frac{1}{\mu^{2}} + \frac{2m}{\mu k} (\dot{x}_{0})^{2}} \implies x_{m} = \sqrt{-\frac{1}{\mu} \pm \sqrt{\frac{1}{\mu^{2}} + \frac{2m}{\mu k} (\dot{x}_{0})^{2}} = \sqrt{-\frac{1}{\mu} \pm \frac{1}{|\mu|} \sqrt{1 + 2\mu \frac{m}{k} (\dot{x}_{0})^{2}} .$

Come è facile dimostrare, che al variare di k (positivo o negativo) e di μ (positivo o negativo) le soluzioni possono sempre esistere, esistere condizionatamente, oppure essere anche multiple (doppie). In particolare, se k>0 e $\mu<0$, allora si ha che la precedente diventa:

$$x_{m} = \sqrt{\frac{1}{|\mu|}} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2|\mu| \frac{m}{k} (\dot{x}_{0})^{2}} \right).$$

Ovviamente in alcuni casi la soluzione può non sussistere, ovvero quando:

$$1-2|\mu|\frac{m}{k}(\dot{x}_0)^2 < 0 \implies 2|\mu|\frac{m}{k}(\dot{x}_0)^2 > 1 \implies \dot{x}_0 > \sqrt{\frac{k}{2|\mu|m}};$$

quindi non si avrà moto periodico se il valore della velocità iniziale \dot{x}_0 supera tale limite. Se algebricamente si verifica quindi che per velocità iniziali troppo alte il radicando assume valore minore di zero; fisicamente lo stesso fenomeno si spiega osservando che se la velocità iniziale è troppo grande (elevata energia cinetica), il sistema supera la x_m limite e dopo di ciò si allontana definitivamente dalla posizione di equilibrio di partenza.

Ci si potrebbe limitare ad asserire inoltre che per motivi energetici soltanto la soluzione con il – soddisfa il problema. Tuttavia, per meglio chiarire anche il punto di vista "pratico", basta osservare che per μ <0 la forza elastica si azzera quando gli spostamenti raggiungono un certo limite: in queste condizioni in pratica la molla si rompe. Ciò succede quando:

$$\begin{pmatrix} f_{el}(x) = kx(1+\mu x^2) \\ \mu < 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f_{el}(x) = kx(1-|\mu|x^2);$$

$$\begin{pmatrix} f_{el}(x) = kx(1+\mu x^2) \\ \mu < 0 \end{pmatrix} f_{el}(x) = 0 \Rightarrow 1-|\mu|x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{|\mu|} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{|\mu|}}.$$

Dalla precedente relazione si vede come x non potrà mai essere maggiore del valore di

$$\sqrt{\frac{1}{|\mu|}}$$
, a meno di non determinare la rottura fisica della molla.

Si potrebbe obiettare che nel caso non si trattasse di una molla "fisica", ma semplicemente di un altro tipo di forzante fisica che, a seguito dello sviluppo in serie di Taylor (arrestato al II termine) nei dintorni dell'origine abbia dato origine ad una forza con la precedente espressione, allora parlare di "rottura" potrebbe essere improprio. Tuttavia in questo caso si può ancora osservare che, per spostamenti superiori al suddetto limite, il sistema si comporterebbe come se ci fosse una molla con costante elastica negativa: ciò indurrebbe il sistema ad allontanarsi sempre di più dalla posizione di equilibrio (x=0) e quindi impedirebbe l'instaurarsi di moti di tipo oscillatorio.

Osservando quindi che con il segno + nell'equazione risolutiva di x_m implicherebbe allungamenti superiore al suddetto limite, la soluzione che rimane accettabile è quindi:

$$x_{m} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 2|\mu| \frac{m}{k} (\dot{x}_{0})^{2}}}{|\mu|}}$$

Dal punto di vista algebrico è comunque possibile trovare altre soluzioni per l'equazione differenziale, anche per valori di x superiori al suddetto valore limite. In tale caso tuttavia deve essere ben analizzato anche il senso fisico dell'operazione, e la x(t) che ne consegue (si ricordi che l'identificazione di x_m non è solo che il primo passo per trovare la x(t)). Si fa infine notare che il metodo, e le formulazioni attraverso cui si è pervenuti alla x_m , sono state sviluppate nell'ipotesi di moti di tipo periodico: ovviamente se il moto risultante (la vera soluzione dell'equazione) non è periodico, esse forniscono risultati non corretti.

Di seguito si riportano una serie di grafici che permettono di analizzare più approfonditamente alcuni aspetti del comportamento di questo particolare tipo di sistema non lineare:

• Nella figura seguente sono riportati i diagrammi della caratteristica meccanica (forza/spostamento) della molla non lineare al variare del parametro μx_m^2 : se il valore di tale parametro è positivo (μ >0) si ha che la rigidezza della molla aumenta con la

deformazione (hardening), se è negativo (μ <0) si ha che la rigidezza diminuisce con la deformazione (softening)¹⁰, se è pari a zero (μ =0) la molla è lineare.



 Attraverso le formule ricavate in precedenza, è stato diagrammato come segue l'andamento del periodo e della lunghezza d'onda (grandezze tra loro reciproche) rapportati ai corrispondenti valori del sistema perfettamente lineare in funzione del parametro di non linearità del sistema. Si può vedere come le maggiori differenze rispetto al caso del sistema lineare si riscontrino per le molle di tipo softening e come tali differenze aumentino all'aumentare, in valore assoluto, del parametro di non linearità.

¹⁰ Una molla di tale tipo è una molla che si ammorbidisce con la deformazione: più si deforma e meno è in grado di opporre resistenza allo spostamento del sistema dalla posizione di equilibrio (ad esempio in condizioni di snervamento del materiale). Diminuendo la rigidezza, diminuisce anche la capacità di accumulare energia sotto forma di energia potenziale di deformazione. Maggiore sarà il valore del parametro di non linearità, minore sarà l'energia potenziale accumulabile dalla molla. Quando, a seguito di una deformazione eccessiva, la rigidezza raggiunge il valore nullo, generalmente si ha che la molla si è rotta. Nel caso di sistemi softening non ha alcun senso fisico studiare equazioni che comportino deformazioni superiori a quella di rottura della molla.


 Di seguito sono state diagrammate le leggi di moto del sistema per alcuni valori del parametro di non linearità: si può notare come siano poco marcate le differenze fra il caso lineare e non lineare. Tuttavia, come in precedenza, è da sottolineare come tali differenze siano più marcate per le molle softening, e come esse aumentino all'aumentare, in valore assoluto, del parametro di non linearità.



Concludendo si può dire che il moto di questo particolare sistema non lineare non è armonico ma periodico, il cui periodo T può essere individuato sviluppando le equazioni precedentemente identificate. Poiché quindi il moto è periodico, potrà essere scomposto in una serie in cui infinite armoniche (dispari) si sovrappongono alla fondamentale (portante):

$$x(t) = x_m \left[a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + a_3 \sin\left(\frac{6\pi}{T}t\right) + \dots + a_i \sin\left(\frac{2i\pi}{T}t\right) + \dots \right] \quad \text{con } i=1,2,\dots\infty.$$

7.4. Tecniche di approssimazione

Poiché, lo si è ampiamente detto, è rarissimo ottenere una soluzione in forma chiusa anche delle più semplici equazioni non lineari, la ricerca di soluzioni approssimate costituirà un prezioso strumento per l'analisi preliminare di tali sistemi, analisi che sarà completata tramite lo studio numerico del loro comportamento dinamico. Nel seguito si procederà ad illustrare brevemente due tra le tecniche più comunemente utilizzate per trovare la legge di moto approssimata.

7.4.1. Tecnica del bilanciamento delle armoniche

Per evitare i problemi dovuti alla difficile (se non impossibile) integrazione delle precedenti relazioni, normalmente ci si limita a ricercare delle espressioni approssimate, che legano la frequenza e l'ampiezza delle oscillazioni del sistema, che sostanzialmente si basano sull'utilizzo di una espressione della equazione di moto in cui compaiono solo i primi termini della serie di Taylor (ovvero quelli corrispondenti alla fondamentale e alle prime armoniche).

La tecnica del bilanciamento delle armoniche consiste nell'introdurre nell'equazione di moto una soluzione di tipo semplice (di solito armonica o somma di più termini armonici con periodi multipli tra loro). L'approssimazione consiste quindi nella volontà di individuare solo un numero limitato di termini (i primi) della serie di Fourier in cui la vera soluzione è sviluppabile. Ovviamente da ciò deriva il fatto che le equazioni che si otterranno tramite tale tecnica non potranno essere tutte soddisfatte: comunque forniranno utili indicazioni per relazionare (in via approssimata) ampiezze e pulsazioni delle varie componenti armoniche considerate.

Per chiarire al meglio questa tecnica si ritiene utile passare subito ad un esempio.

Esempio:

Sempre considerando il caso del sistema non lineare libero e non smorzato analizzato in precedenza (componente non lineare di tipo cubico), e di cui si è trovata una parziale soluzione in forma chiusa, si applicherà ora la tecnica del bilanciamento delle armoniche nella sua forma più semplice. Si cercherà quindi una soluzione approssimata alla sola pulsazione fondamentale (primo termine della serie di Fourier). Si fa quindi l'ipotesi che la soluzione sia del tipo:

 $x = x_m \sin(\omega t);$

funzione armonica di cui non si conoscono né l'ampiezza x_m , né la pulsazione ω .

Derivando due volte tale ipotetica soluzione e andando a sostituire nell'equazione di moto si ottiene la seguente relazione:

$$(-m\omega^2 + k)x_m \sin(\omega t) + \mu k x_m^3 \sin^3(\omega t) = 0.$$

Ovviamente se quella che si è inserita fosse la vera soluzione, la precedente relazione si trasformerebbe in una identità. Inserendo il valore della pulsazione naturale del sistema linearizzato ($\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$) e sfruttando alcune note identità trigonometriche, dalla precedente relazione si ottiene la seguente equazione:

$$k\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)x_m\sin(\omega t) + \frac{3}{4}\mu kx_m^3\sin(\omega t) - \frac{1}{4}\mu kx_m^3\sin(3\omega t) = 0;$$
$$\left[k\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)x_m + \frac{3}{4}\mu kx_m^3\right]\sin(\omega t) - \left[\frac{1}{4}\mu kx_m^3\right]\sin(3\omega t) = 0.$$

Per soddisfare quest'ultima equazione per qualsiasi t (e quindi per verificare che $x = x_m \sin(\omega t)$ sia la vera soluzione), i coefficienti delle funzioni seno con argomento ωt e $3\omega t$ dovrebbero annullarsi contemporaneamente. Dovrebbe quindi risultare verificato il seguente sistema algebrico nelle due incognite x_m e ω :

$$\begin{cases} \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right) + \frac{3}{4} \mu k x_m^2 \right] x_m = 0 \\ -\frac{1}{4} \mu k x_m^3 = 0 \end{cases}$$

E' tuttavia evidente che la seconda equazione non può essere verificata se non da spostamenti di ampiezza nulla (x_m =0). Ciò nonostante dalla prima equazione è possibile ricavare una relazione (ovviamente valida solo approssimativamente) che mette in relazione la frequenza e l'ampiezza degli spostamenti. Tale relazione, di seguito riportata, è ovviamente valida solo per la prima armonica della soluzione "vera":

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \mu x_m^2} \ .$$

Nella figura successiva vengono confrontate in via grafica la soluzione esatta e quella approssimata: è possibile verificare quanto limitati siano gli errori nel caso delle molle di

tipo hardening, e quanto anche per le molle di tipo softening questi siano rilevanti solo per elevati valori del parametro di non linearità.



Per ottenere una migliore approssimazione della relazione che lega la pulsazione e l'ampiezza della fondamentale, e per avere anche una prima stima sulla caratteristiche della prima armonica, si può ripetere la stessa procedura ipotizzando una soluzione composta dai seguenti due termini:

 $x = a_1 \sin(\omega t) + a_3 \sin(3\omega t).$

E' facile immaginare come, a seguito della derivazione di tale relazione ed al successivo inserimento dei vari termini nell'equazione di moto, si preverrà ad una equazione assai più complessa di quella ottenuta in precedenza. Affinché la quest'ultima possa costituire una identità, sarà poi necessario che venga verificato un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a_1 , $a_2 \in \omega$. Ovviamente solo alcune (due) delle equazioni che lo compongono potranno essere verificate contemporaneamente dando origine a spostamenti non nulli. Proprio tramite tali equazioni sarà possibile individuare le relazioni (purtroppo di solito in forma implicita) che legano tra loro le tre incognite del sistema.

7.4.2. Metodo di Ritz

Il metodo di Ritz o *della media* consiste nel sostituire le funzioni (le forze) non lineari con funzioni lineari "equivalenti" che, in un intervallo di tempo pari ad un multiplo intero del

periodo delle oscillazioni del sistema, compiano lo stesso lavoro delle funzioni (delle forzanti) originali (non lineari). Nel caso in esame, poiché si farà riferimento ad un sistema conservativo, tale lavoro sarà dunque pari a zero.

Poiché si è già dimostrato che gli spostamenti effettivi del sistema saranno di tipo periodico, allora essi possano essere descritti tramite una combinazione lineare di funzioni arbitrarie (ad esempio sfruttando la serie di Fourier).

In tale ipotesi la soluzione sarà esprimibile come segue:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(t);$$

in cui i termini a_i sono delle costanti (degli scalari) e i termini $\phi_i(t)$ sono funzioni arbitrarie e tra loro indipendenti del tempo t (che quindi costituiscono una base ortogonale delle funzioni).

Moltiplicando l'equazione di moto per gli spostamenti virtuali ∂x del sistema, si ottiene un'equazione che sostanzialmente esprime il principio di conservazione dell'energia: il lavoro delle forze inerziali (la variazione dell'energia cinetica) è pari in modulo (ma di segno opposto) al lavoro infinitesimo delle forze non lineari:

 $(m\ddot{x}+f(x))\partial x=0.$

Tale relazione dovrà risultare identicamente verificata se integrata su un periodo (o su suoi multipli interi) e qualunque sia la base ortogonale di funzioni $\phi_i(t)$ scelta per esprimere la soluzione esatta del sistema.

Avendo supposto che la soluzione sia x(t) sia esprimibile in funzione della base ortogonale $\phi_i(t)$ tramite coefficienti a_i , anche gli spostamenti virtuali potranno essere espressi in funzione della medesima base. Naturalmente i coefficienti saranno diversi da quelli relativi alla soluzione completa e verranno quindi indicati come ∂a_i . In tali ipotesi si ottiene:

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial t} dt = \sum_{i=0}^{n} \partial a_i \phi_i(t) dt ;$$

$$L = \oint \left(\ddot{x} + \frac{f(x)}{m} \right) \partial x = \int_0^T \left[\left(\ddot{x} + \frac{f(x)}{m} \right) \sum_{i=0}^{n} \partial a_i \phi_i(t) \right] dt = \sum_{i=0}^{n} \left[\int_0^T \left(\ddot{x} + \frac{f(x)}{m} \right) \partial a_i \phi_i(t) dt \right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left[\partial a_i \int_0^T \left(\ddot{x} + \frac{f(x)}{m} \right) \phi_i(t) dt \right] = 0$$

Ovviamente dall'ipotesi di troncare ad un numero finito n di termini le serie di Fourier per ottenere una approssimazione della soluzione reale (e degli spostamenti virtuali), e per

l'arbitrarietà degli spostamenti virtuali (i termini ∂a_i), la precedente equazione si trasforma in un sistema di *n* equazioni in *n* incognite (le a_i della serie della soluzione x(t)). Tale sistema algebrico è tuttavia generalmente altamente non lineare, e quindi per la sua risoluzione sono richieste tecniche numeriche.

Per consentire una corretta interpretazione del metodo, e per effettuare il confronto dei risultati con quelli già ottenuti con il metodo di bilanciamento delle armoniche e con la soluzione in forma chiusa, tale tecnica verrà di seguito applicata allo stesso sistema analizzato in precedenza.

Esempio:

Avendo già dimostrato che la soluzione generale è di tipo periodico, le funzioni armoniche costituiscono quindi una valida base ortogonale per esprimerla correttamente e completamente. Poiché poi l'obiettivo è quello di ricercare una soluzione approssimata, limitatamente alla sola componente fondamentale della soluzione, ci si riduce a considerare il solo primo termine delle serie (*i*=1). In tale ipotesi si avrà quindi una sola funzione nel tempo $\phi_1(t) = \sin(\omega t)$ e un solo coefficiente incognito $a_1 = x_m$. Si ottiene quindi che:

$$\int_{0}^{T} \left(\ddot{x} + \frac{f(x)}{m} \right) \phi_i(t) dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{0}^{T} \left[x_m \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) \sin(\omega t) + \frac{k}{m} \mu x_m^3 \sin^3(\omega t) \right] \sin(\omega t) dt = 0$$

Ricordando che:

$$\int_{0}^{T} \sin^{2}(\omega t) dt = \frac{\pi}{\omega};$$
$$\int_{0}^{T} \sin^{4}(\omega t) dt = \frac{3\pi}{4\omega};$$

e introducendo nell'equazione la frequenza naturale del sistema linearizzato ($\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$), la precedente equazione diventa:

$$\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)+\frac{3}{4}\mu x_m^2=0.$$

Come è facile osservare, il risultato ottenuto con la tecnica di Ritz coincide perfettamente con quello ottenuto tramite la tecnica di bilanciamento delle armoniche.

Nel caso in cui si voglia ottenere un'approssimazione migliore della fondamentale e un'indicazione anche sulla prima armonica, si dovrebbe esprimere la soluzione tramite due funzioni arbitrarie:

$$\phi_1(t) = \sin(\omega t);$$

$$\phi_3(t) = \sin(3\omega t);$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^2 a_i \phi_i(t) = a_1 \sin(\omega t) + a_3 \sin(3\omega t);$$

e procedere analogamente a quanto fatto in precedenza.

7.5. Variabili di stato

Come già accennato è possibile descrivere il comportamento dei sistemi non lineari tramite le variabili di stato. Effettuando infatti il cambiamento di variabile $v = \dot{x}$, l'equazione di moto per un sistema libero e non smorzato si trasforma nel seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{v} = -\frac{1}{m} f(x) \\ \dot{x} = v \end{cases}$$

Dal precedente sistema, eliminando la variabile tempo da entrambe le relazioni ed integrando l'equazione così ottenuta, si può ottenere la soluzione (la traiettoria) del sistema in forma implicita (in cui non compare esplicitamente la variabile indipendente, ovvero il tempo). La relazione che lega quindi le due variabili di stato x e v si ottiene come segue:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m}f(x) \\ \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v \end{cases} \implies \frac{dv}{dx} = -\frac{f(x)}{mv} \implies vdv = -\frac{1}{m}f(x)dx \implies \frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{m}\int f(x)dx + C. \end{cases}$$

Volendo studiare il comportamento del solito sistema caratterizzato dalla f(x) non lineare di tipo cubico, tramite tale tecnica si ottiene:

$$f(x) = kx(1 + \mu x^2) \quad \Rightarrow \quad v^2 + \frac{k}{m}x^2\left(1 + \frac{\mu}{2}x^2\right) = C;$$

in cui C è una costante da individuare sulla base delle condizioni iniziali.

La precedente relazione descrive completamente il comportamento dinamico del sistema e potrebbe direttamente essere diagrammata sul piano delle variabili di stato (x,v). Tuttavia, specialmente in passato, era d'uso costruire dei diagrammi adimensionali effettuando opportuni cambi di variabile: definendo infatti con $v^* = v\sqrt{|\mu|} \frac{m}{k}$ la velocità adimensionalizzata e con $x^* = x\sqrt{|\mu|}$ la coordinata adimensionalizzata, si ottengono diagrammi che descrivono il comportamento dinamico del sistema, sia per molle di tipo hardening che softening.



Nella precedente figura sono rappresentati graficamente i differenti comportamenti liberi del sistema non lineare nei due casi in cui la molla è di tipo hardering (figura **a**), a sinistra) e di tipo softering (figura **a**), a destra), entrambi relativi al caso in cui la parte lineare della molla non lineare sia caratterizzata da una rigidezza positiva (k>0).

Dal grafico a sinistra (relativo ad un sistema di tipo *hardening*) è possibile vedere che l'origine è l'unica posizione di equilibrio del sistema, tra l'altro evidentemente stabile. E' opportuno osservare che nel caso lineare le linee disegnate al variare della costante *C*, ovvero della quantità di energia cinetica iniziale, assumono la forma di cerchi perfetti. Nel caso non lineare le traiettorie sono generalmente delle ellissi, ma è evidente come al diminuire dell'energia cinetica iniziale queste tendano a confondersi con una circonferenza perfetta.

Il grafico a destra (relativo ad un sistema di tipo *softening*) mostra invece come per tale sistema esistano ben tre distinte posizioni di equilibrio: l'origine, che è una posizione di equilibrio stabile, e i due punti A e B, in cui l'equilibrio è evidentemente instabile. Dalla medesima figura è possibile osservare anche come il comportamento del sistema sia simile a quello di uno di tipo *hardening* se ci si limita ad una zona in prossimità della posizione di equilibrio, ovvero se le condizioni iniziali del sistema indicano una limitata quantità di

energia (cinetica e di deformazione) inizialmente presente nel sistema. Viceversa se le condizioni iniziali indicano un elevato contenuto iniziale di energia cinetica e/o potenziale, il moto sarà completamente diverso: il sistema evolverà allontanandosi progressivamente dalle varie posizioni di equilibrio, non dando quindi origine a moti di tipo oscillatorio.

Nella seguente figura sono invece rappresentati i grafici relativi al comportamento libero del sistema nel caso in cui la molla è di tipo hardering (figura **a**), a sinistra) e di tipo softering (figura **a**), a destra), ma in cui la parte lineare della molla (non lineare) è caratterizzata da una rigidezza negativa (k<0), condizione frequente quando si ha a che fare con campi magnetici (ad es. nei cuscini magnetici a magneti permanenti).



In tali grafici sono ancora una volta riportati gli andamenti delle variabili di stato (in effetti della velocità e dello spostamento adimensionalizzati) sia dei sistemi *hardening* che di quelli *softening*. Da tali figure si può osservare come nel caso di una molla hardening si abbiano ben tre posizioni di equilibrio: una instabile nell'origine e due stabili per $x^*\pm 1$. Nel caso di molle di tipo softening si ha invece una sola posizione di equilibrio, peraltro di tipo instabile: per un tale tipo di sistema non sarà quindi mai possibile che si inneschino moti oscillatori, come invece si può verificare in tutti gli altri casi.

7.6. Sistemi non lineari conservativi: moto forzato

L'equazione di moto di un sistema non lineare, non smorzato e sottoposto a una forzante tempovariante, assume la seguente forma:

$$m\ddot{x} + kx + f'(x) = F(t);$$

equazione a cui si perviene facilmente dall'equazione di equilibro dinamico e separando la parte lineare da quella più propriamente non lineare della caratteristica della "molla".

Per la risoluzione di tale equazione si può far ricorso alla tecnica di Ritz (ma si potrebbe anche utilizzare la tecnica del bilanciamento delle armoniche). Tramite l'applicazione di tale tecnica si ottiene facilmente la seguente relazione:

$$\int_{0}^{T} \left[\ddot{x} + \frac{k}{m} x + \frac{1}{m} f'(x) - \frac{1}{m} F(t) \right] \phi_i(t) dt = 0.$$

A questo punto occorre fare alcune ipotesi di buon senso, sempre con l'obiettivo di ottenere delle informazioni (pur approssimate) sulla sola componente fondamentale delle oscillazioni forzate: se la forza esterna applicata è di tipo armonico con pulsazione ω , sarà ragionevole ipotizzare che la pulsazione della fondamentale sia anch'essa ω , e sapendo che il sistema non è smorzato, verosimilmente non vi saranno sfasamenti fra la forzante e gli spostamenti. Tali osservazioni si traducono nelle seguenti ipotesi sulla soluzione (approssimata) dell'equazione differenziale:

- Ipotesi sul tipo degli spostamenti $x = x_m \sin(\omega t)$;
- funzione arbitraria (solo una, la prima) $\phi_1 = \sin(\omega t)$;
- forzante esterna $F(t) = f_0 \sin(\omega t)$.

L'equazione ottenibile con la tecnica di Ritz diventa allora:

$$\int_{0}^{T} \left[\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{1}{m}f'(x) - \frac{1}{m}f_0\sin(\omega t) \right] \sin(\omega t) dt = 0;$$

da cui, ponendo $\tau = \omega t$ e integrando, si ottiene:

$$\int_{0}^{T} \left[-x_{m} \sin^{2}(\omega t) + \frac{k}{m} x_{m} \sin^{2}(\omega t) + \frac{1}{m} f'(x) \sin(\omega t) - \frac{1}{m} f_{0} \sin^{2}(\omega t) \right] dt = 0;$$

$$\int_{0}^{T} \left[-x_{m} \sin^{2}(\omega t) + \omega_{n}^{2} x_{m} \sin^{2}(\omega t) + \frac{1}{k} \omega_{n}^{2} f'(x) \sin(\omega t) - \frac{1}{k} \omega_{n}^{2} f_{0} \sin^{2}(\omega t) \right] dt = 0;$$

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{\omega} \left[-x_{m} \sin^{2}(\omega t) + \omega_{n}^{2} x_{m} \sin^{2}(\omega t) + \frac{1}{k} \omega_{n}^{2} f'(x) \sin(\omega t) - \frac{1}{k} \omega_{n}^{2} f_{0} \sin^{2}(\omega t) \right] d(\omega t) = 0$$

Ricordando infine che:

$$\int_{0}^{2\pi}\sin^{2}(\tau)d(\tau)=\pi;$$

si ottiene:

$$\frac{1}{\omega} \left[-x_m \pi + x_m \omega_n^2 \pi - \frac{f_0}{k} \omega_n^2 \pi \right] + \frac{\omega_n^2}{k\omega} \int_0^{2\pi} [f'(x)\sin(\omega t)] d(\omega t) = 0;$$

$$x_m \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right) - \frac{f_0}{k} + \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} f'(x)\sin(\tau) d\tau = 0.$$

Dalla precedente relazione è possibile ricavare il valore degli spostamenti in funzione della frequenza ($x_m = x_m(\omega)$) o il valore della frequenza in funzione degli spostamenti ($\omega = \omega(x_m)$).

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - \frac{f_0}{kx_m} + \frac{1}{k\pi x_m} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin(\tau) d\tau}.$$

Esempio

Come applicazione si farà riferimento al solito sistema caratterizzato dalla molla non lineare con caratteristica cubica: l'applicazione dell'equazione di equilibrio dinamico a tale sistema da origine alla cosiddetta *equazione di Duffing* per sistemi non smorzati:

$$m\ddot{x} + kx(1 + \mu x^2) = f_0 \sin(\omega t)$$

Tale equazione è caratterizzata da una non linearità relativamente semplice ($f'(x) = k\mu x^3$), come pure da una forzante estremamente semplice (di tipo armonico). Sviluppando la precedente formulazione, la soluzione approssimata alla sola componente fondamentale risulta essere:

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - \frac{f_0}{kx_m} + \frac{3}{4}\mu x_m^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{kx_m}{f_0}\right)^{-1} + \frac{3}{4}\frac{\mu f_0^2}{k^2} \left(\frac{kx_m}{f_0}\right)^2}$$

Il termine $\frac{\sqrt{|\mu|}f_0}{k}$ rappresenta il fattore di non linearità (quando si annulla si ricade nel

problema lineare), mentre il termine $\frac{kx_m}{f_0}$ viene indicato come il *fattore di amplificazione dinamico*, ovvero il fattore che quantifica l'amplificazione della forza elastica rispetto alla

forzante applicata (f_0) a causa degli effetti dinamici (in condizioni statiche il rapporto assume ovviamente valore unitario).

Di seguito è riportata una coppia di grafici, il primo (a sinistra) è relativo a una molla *hardening* mentre il secondo (a destra) ad una *softening*, che riportano l'andamento dell'ampiezza delle oscillazioni in funzione della frequenza della forzante armonica ottenibile attraverso la precedente formula. In tali diagrammi si possono rilevare tre zone:

- alle basse frequenze il comportamento del sistema è dominato dalla molla non lineare e il fattore di amplificazione dinamica dipende dalla ampiezza della forza (la fase è zero);
- alle alte frequenze il comportamento è dominato dall'inerzia, quindi il sistema si comporta quasi come un sistema lineare (la fase è 180°);
- per le frequenze "intermedie" si osserva come l'asintoto verticale, caratteristico dei sistemi lineari non smorzati, si inclina e si incurva in avanti od all'indietro, a seconda delle caratteristiche del sistema.



Quello che si può ancora notare è che non vi è più la proporzionalità tra forza e spostamento: quelle che per un sistema lineare si chiamerebbero le FRFs (Funzioni di Risposta in Frequenza) cambiano infatti forma a seconda dell'ampiezza della forza applicata. Inoltre si verifica che, fissata la pulsazione ω ed anche il modulo f_0 della forza applicata, per i sistemi non lineari non vi è più l'unicità della soluzione.

I seguenti due grafici (sempre relativi ad una molla *hardening* ed una *softening*, ma ottenuti a seguito di una ben definita ampiezza f_0 della forza applicata) mostrano invece il "fenomeno del salto". Come è già stato osservato, per molti valori di ω si ha che il sistema ammette più soluzioni, ovvero più condizioni di equilibrio dinamico. Quando la soluzione non è unica (solitamente allora sono tre) una o più soluzioni risultano instabili: in particolare quella intermedia lo è quasi sempre.



La presenza di tali soluzioni multiple si spiega con il fatto che la vera soluzione va ricercata non soltanto sulla base della ampiezza e della pulsazione attuale della forzante applicata, ma anche sulla base della "storia" del sistema. Se ad esempio si immagina che il sistema, prima di arrivare alla condizione di carico caratterizzata da $f_0 \in \omega$, sia partito da condizioni statiche (pulsazione nulla) per poi aumentare gradualmente la pulsazione fino al valore finale, allora il sistema evolve partendo dal punto A, mantenendosi sul tratto superiore del diagramma. L'evoluzione del sistema si mantiene in tale tratto finché non si raggiunge il punto B per il quale il contenuto energetico del sistema raggiunge una condizione "limite". Continuando a percorrere lo stesso tratto della curva si entra in una zona di comportamento instabile del sistema: succede quindi che il sistema evolve repentinamente fino a portarsi nella condizione C (effettuando il cosiddetto "salto"). All'aumentare ancora della pulsazione della forzante, il sistema evolve verso la condizione D.

Se viceversa nelle condizioni di partenza il sistema era sollecitato da una forzante ad alta frequenza, al diminuire della pulsazione il sistema evolve dalla condizione D alla E, anche qui si trova in condizioni limite ed effettua quindi un "salto" fino alla condizione F. Se la pulsazione della forzante diminuisce ancora, il sistema prosegue su tale ramo fino ad arrivare alla condizione A (condizione statica).

Per calcolare il valore e pulsazioni corrispondenti ai punti "limite" (punto E per i sistemi *hardening* e punto B per quelli di tipo *softening*) si può utilizzare la seguente relazione in cui il segno + si utilizza per molle con comportamento *hardening*, il segno – per molle con comportamento *softening*.

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{81}{16} \left| \mu \right| \left(\frac{f_0}{k} \right)^2}} .$$

7.7. Sistemi non lineari smorzati: moto libero

Si consideri un sistema non lineare smorzato che oscilla intorno ad una sua condizione di equilibrio: la presenza di smorzamento, ovvero la presenza di fenomeni dissipativi, implica la dipendenza della caratteristica non lineare della "molla" anche dalla velocità. L'equazione di moto più semplice per tale sistema sarà allora:

 $m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0.$

Affinché il comportamento di tale sistema sia effettivamente smorzato, la derivata parziale della caratteristica della molla rispetto alla velocità calcolata in corrispondenza della posizione di equilibrio dovrà essere positiva, altrimenti il sistema avrebbe un comportamento autoeccitato. In sostanza dovrà essere che:

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\Big|_{\substack{x=x_0\\\dot{x}=0}} > 0.$$

Risulterà molto conveniente, nei casi in cui sia possibile, suddividere la dipendenza di

f(x,x) dalla posizione e dalla velocità. Quando ciò si verifica, l'equazione diventa:

$$m\ddot{x} + \beta(\dot{x}) + f(x) = 0.$$

In ogni caso comunque valgono ancora le seguenti relazioni:

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{x}^2)}{dx};$$
$$m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -f(x, \dot{x})$$

;

l'ultima delle quali è stata ottenuta quando si è analizzata la risoluzione dell'equazione di moto tramite la tecnica delle variabili di stato.

Contrariamente a quanto avveniva nel caso di assenza di smorzamento (dove la caratteristica non lineare della molla dipendeva solo dalla posizione), con lo smorzamento non è più possibile integrare direttamente le precedenti equazioni. Rimane quindi percorribile la sola strada dei metodi approssimati. Tuttavia è opportuno anche sottolineare come la tecnica di Ritz non sia utilizzabile in quanto nel caso di un sistema libero, ma

smorzato, non è più realistico ipotizzare per il sistema dei moti periodici. E' quindi necessario sfruttare delle tecniche alternative.

Per meglio comprendere come si possa risolvere un problema di tale tipo, si riporta a seguito un esempio piuttosto significativo.

Esempio:

Consideriamo un sistema SDOF in cui la parte non lineare, dipendente dalla sola velocità, sia costituita dal solo attrito Colombiano. Quest'ultimo evidentemente può essere caratterizzato dalla seguente espressione:

$$\beta(\dot{x}) = F \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = F \cdot sign(\dot{x}).$$

In tale ipotesi l'equazione di moto diventa:

$$m\ddot{x} + Fsign(\dot{x}) + f(x) = 0.$$

Sostituendo l'accelerazione con la sua formulazione alternativa precedentemente richiamata, con facili passaggi si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{1}{2}\frac{d(\dot{x}^2)}{dx} = \frac{-F \cdot sign(\dot{x}) - f(x)}{m}$$

Integrando la precedente si ottiene infine:

$$\dot{x}^{2} = \frac{2}{m} \int \left[-f(x) - Fsign(\dot{x}) \right] dx + C_{1} = \frac{2}{m} \int \left[-f(x) \mp F \right] dx + C_{1}.$$

A questo punto, a causa della presenza del doppio segno, non si può più procedere alla completa integrazione dell'intera equazione. In effetti si può integrare, e nel caso la f(x) sia semplice non vi sarebbero neppure particolari problemi, ma l'integrazione va interrotta ogni volta si verifica una variazione del segno della velocità. Quando ciò accade è necessario cambiare il segno della F nella formula, e ripartire con l'integrazione introducendo le condizioni iniziali ottenute alla fine del passaggio precedente. Per ogni step di integrazione si ottiene così la seguente soluzione, in cui va inserito il segno giusto in funzione del segno della velocità del sistema:

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{du}{\sqrt{\int \left[-f(x)\mp F\right]} dx + C_1} + C_2.$$

Se si studia il caso particolare (il più semplice, in effetti) in cui f(x) = kx, ovvero il sistema è lineare nella sue dipendenza dagli spostamenti, si ottiene quindi la seguente relazione:

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} \int \left[-kx \mp F \right] dx + C = \frac{2}{m} \left[-\frac{kx^2}{2} \mp Fx \right] + C_1.$$

La costante C_1 si determina imponendo la condizione iniziale che al tempo t=0 il sistema ha velocità nulla:

$$x(t) = x_0 e \dot{x}(t) = 0 \text{ per } t = 0 \implies C_1 = -\frac{2}{m} \left[-\frac{kx_0^2}{2} \mp Fx_0 \right].$$

L'equazione precedente risulta quindi:

$$\dot{x}^{2} = \frac{2}{m} \left[-\frac{kx^{2}}{2} \mp Fx \right] - \frac{2}{m} \left[-\frac{kx_{0}^{2}}{2} \mp Fx_{0} \right] = \frac{2}{m} \left[-\frac{k}{2} (x^{2} - x_{0}^{2}) \mp F(x - x_{0}) \right];$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{2}{m} \left[-\frac{kx^{2}}{2} \mp Fx \right] - \frac{2}{m} \left[-\frac{kx_{0}^{2}}{2} \mp Fx_{0} \right] = \sqrt{\frac{2}{m} \left[-\frac{k}{2} (x^{2} - x_{0}^{2}) \mp F(x - x_{0}) \right]};$$

$$dt = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{dx}{\sqrt{\left[-(x^{2} - x_{0}^{2}) \mp 2\frac{F}{k} (x - x_{0}) \right]}}.$$

Dalle precedenti si può osservare che il moto sussiste solo nel caso in cui $kx_0 > F$, altrimenti l'attrito (statico) non permette movimenti¹¹. Integrando si ottiene:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{arcsen} \frac{kx \mp F}{kx_0 \mp F} + C_2$$
$$\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi = \operatorname{arcsen} \frac{kx \mp F}{kx_0 \mp F}$$

avendo sostituito la costante C_2 con l'altrettanto costante arbitraria ϕ (ovviamente da determinare con le condizioni iniziali):

$$\phi = -C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \; .$$

Con alcuni semplici passaggi si dimostra che la precedente si può esprimere come segue:

Nell'ipotesi $x(t) = x_0 > 0$ e $\dot{x}(t) = 0$ per t=0, negli istanti successivi del moto si avrà anche che:

 $(x(t) = x_0 - \Delta x \text{ con } \Delta x > 0 \text{ (e Dx arbitrario, ma sufficientemente piccolo) e anche } \dot{x}(t) < 0.$

$$\left[-\frac{k}{2}(x+x_0)-F\right] < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{2}(x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{2}(x_0-\Delta x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad kx_0+\frac{k}{2}\Delta x > F \quad \Rightarrow \quad kx_0 > F \cdot F = \frac{k}{2}(x_0-\Delta x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad kx_0+\frac{k}{2}\Delta x > F \quad \Rightarrow \quad kx_0 > F \cdot F = \frac{k}{2}(x_0-\Delta x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad kx_0+\frac{k}{2}\Delta x > F \quad \Rightarrow \quad kx_0 > F \cdot F = \frac{k}{2}(x_0-\Delta x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad kx_0+\frac{k}{2}\Delta x > F \quad \Rightarrow \quad kx_0 > F \cdot F = \frac{k}{2}(x_0-\Delta x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad kx_0+\frac{k}{2}\Delta x > F \quad \Rightarrow \quad kx_0 > F \cdot F = \frac{k}{2}(x_0-\Delta x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad kx_0+\frac{k}{2}\Delta x > F \quad \Rightarrow \quad kx_0 > F \cdot F = \frac{k}{2}(x_0-\Delta x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad kx_0+\frac{k}{2}\Delta x > F \quad \Rightarrow \quad kx_0 > F \cdot F = \frac{k}{2}(x_0-\Delta x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad kx_0+\frac{k}{2}\Delta x > F \quad \Rightarrow \quad kx_0 > F \cdot F = \frac{k}{2}(x_0-\Delta x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad kx_0+\frac{k}{2}\Delta x > F \quad \Rightarrow \quad kx_0 > F \cdot F = \frac{k}{2}(x_0-\Delta x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad kx_0+\frac{k}{2}\Delta x > F \quad \Rightarrow \quad kx_0 > F \cdot F = \frac{k}{2}(x_0-\Delta x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad kx_0+\frac{k}{2}\Delta x > F \quad \Rightarrow \quad kx_0 > F \cdot F = \frac{k}{2}(x_0-\Delta x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad kx_0+\frac{k}{2}(x_0-\Delta x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad xx_0+\frac{k}{2}(x_0-\Delta x+x_0) > F \quad \Rightarrow \quad xx_0+\frac{k}{2}$$

¹¹ Il radicando della precedente relazione deve infatti risultare sempre positivo. In altra forma questo è così esprimibile: $\frac{2}{m}(x-x_0)\left[-\frac{k}{2}(x+x_0) \mp F\right].$

In tali ipotesi il segno giusto per la *F* è quello negativo e risulta anche $(x - x_0) < 0$. Affinché il radicando sia positivo dovrà quindi essere che:

$$\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) = \arcsin\left(\frac{kx \mp F}{kx_0 \mp F}\right) \implies \left(\frac{kx \mp F}{kx_0 \mp F}\right) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right);$$

$$kx \mp F = (kx_0 \mp F)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right);$$

$$kx = (kx_0 \mp F)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \pm F;$$

$$x = \left(x_0 \mp \frac{F}{k}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \pm \frac{F}{k}.$$

Nell'ipotesi di limitare l'analisi alla sola prima metà dell'oscillazione (per la metà del periodo $0 < t < \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$), è necessario utilizzare il segno superiore e la costante arbitraria si può determinare analizzando le condizioni iniziali:

- $x(t) = x_0 \text{ per } t = 0;$
- $\dot{x}(t) = 0$ per t=0;
- ipotizzando che $x_0 > 0$, si avrà che x diminuisce all'aumentare di t.

Analizzando le precedenti è verosimile supporre che la fase delle oscillazioni sinusoidali sarà pari a $\phi = \frac{\pi}{2}$ (ovvero le oscillazioni sono cosinusoidali).

Come già detto alla fine di tale mezzo periodo la velocità cambia segno, e quindi deve anche essere cambiato il segno di *F* nella equazione risolutiva (va usato quello inferiore). L'integrazione procede per il mezzo periodo successivo inserendo come condizioni iniziali la posizione (la velocità è sempre nulla) che si determinano alla fine del mezzo periodo precedente. Il procedimento va iterato finché non si verifica la condizione che per $\dot{x}(t) = 0$, $F \ge kx$: in tali condizioni, a sistema fermo, l'attrito vince sulla forza elastica e quindi il sistema rimane nella posizione così raggiunta.

Dalle precedenti formulazioni ed osservazioni, e come confermato dalla figura successiva, si può capire che l'ampiezza delle vibrazioni diminuisce ogni mezzo periodo di una quantità pari a $2\frac{F}{k}$.



Analizzando ulteriormente le precedenti formulazioni è possibile determinare le due rette che caratterizzano lo smorzamento delle oscillazioni (le rette che congiungono i massimi delle varie oscillazioni):

$$x = \pm \left(x_0 - \frac{2F}{\pi \sqrt{mk}} t \right);$$

ed è possibile inoltre determinare il numero di mezzi periodi necessari affinché il moto si estingua:

$$n = \operatorname{int}\left(\frac{x_0k}{2F} + \frac{1}{2}\right).$$

7.8. Smorzamento equivalente

Nei casi in cui si può considerare "piccolo" lo smorzamento non lineare, e non sia strettamente necessario ricavare la legge di moto "esatta", è possibile sostituire lo smorzamento effettivo (non lineare) con uno lineare viscoso di tipo "equivalente", in modo da linearizzare, e quindi semplificare, il problema. Ovviamente la soluzione non sarà quella vera, ma sarà molto prossima ad essa, almeno nei suoi aspetti fondamentali.

La condizione che deve essere verificata affinché lo smorzamento lineare possa ritenersi "equivalente" a quello non lineare è che, ipotizzando che il sistema evolva periodicamente, l'energia dissipata in un periodo sia la stessa. Il lavoro (negativo perché dissipativo) compiuto in un ciclo dalla caratteristica non lineare della molla è quindi esprimibile attraverso la seguente relazione:

$$L = \oint -f(x, \dot{x})dx = \int_{0}^{T} -f(x, \dot{x})\dot{x}dt$$

Ipotizzando che il sistema evolva con un moto di tipo armonico, ovvero considerando solo la pulsazione fondamentale degli spostamenti, si avrà che:

$$x = x_m \sin(\omega t).$$

In tale ipotesi il lavoro della molla non lineare è esprimibile tramite la seguente relazione.

$$L = -x_m \int_{0}^{2\pi} f(x, \dot{x}) \cos(\omega t) d(\omega t).$$

Il lavoro dissipato nel medesimo ciclo da uno smorzatore viscoso sarebbe semplicemente:

$$L = -\int_{0}^{T} c_{eq} \dot{x}^{2} dt = -x_{m}^{2} \omega c_{eq} \int_{0}^{2\pi} \cos^{2}(\omega t) d(\omega t) = -x_{m}^{2} \omega c_{eq} \pi.$$

Uguagliando le due espressioni del lavoro dissipato, è possibile ricavare il valore della costante di smorzamento viscoso equivalente allo smorzamento non lineare del sistema:

$$c_{eq} = \frac{1}{x_m \pi \omega} \int_0^{2\pi} f(x, \dot{x}) \cos(\omega t) d(\omega t).$$

Ovviamente la parte della caratteristica dipendente dallo spostamento x non influenza il valore dell'integrale: tale parte da origine a forze conservative, il cui lavoro calcolato in un ciclo è ovviamente nullo.

Inoltre nel caso in cui si riuscisse a separare anche algebricamente la dipendenza della caratteristica dallo spostamento da quella della velocità, lo smorzamento viscoso equivalente potrebbe essere più semplicemente calcolato come a seguito riportato:

$$c_{eq} = \frac{1}{x_m \pi \omega} \int_0^{2\pi} f(x, \dot{x}) \cos(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{x_m \pi \omega} \int_0^{2\pi} \beta(\dot{x}) \cos(\omega t) d(\omega t).$$

7.9. Sistemi non lineari non conservativi: moto forzato

Questo è un caso abbastanza complesso per il quale non si intende fornire altro che una panoramica sui metodi che possono essere applicati per risolverlo, e sulle caratteristiche comuni alle soluzioni che normalmente si ottengono.

Normalmente l'equazione di moto *a regime* viene ricavata uguagliando l'energia dissipata in un ciclo con quella che viene immessa nel sistema dalla forza esterna (ovviamente si parte dall'ipotesi di ricercare spostamenti di tipo periodico).

A questo punto normalmente, a meno non ci si avvalga della possibilità di utilizzare lo smorzamento equivalente, si fa ricorso a tecniche approssimate come quella di Ritz. Ovviamente si inizia sempre dall'ipotesi che le oscillazioni siano di tipo armonico e si trovano così utili informazioni sul comportamento del sistema, ovvero sul legame pulsazione (della fondamentale) e l'ampiezza delle oscillazioni (ovviamente sempre riferite alla medesima componente). La differenza rispetto al caso del moto libero è che l'ampiezza delle oscillazioni non è più l'unica incognita, ma vi è anche la fase, fattore che in molti casi può divenire determinante specie in presenza di fenomeni dissipativi importanti.

Per avere delle indicazioni sugli andamenti di quelle funzioni che in qualche modo sostituiscono le FRFs dei sistemi lineari, di seguito si riportano alcuni grafici adimensionalizzati (equivalenti alla ricettanza, sia in ampiezza che in fase) relativi a sistemi non lineari smorzati con una molla hardening (prima) e softening (dopo).





Nei grafici sono riportati i tratti stabili (linea continua) e quelli instabili (linea tratteggiata) della soluzione. La *Backbone* (costola) è l'equivalente dell'asintoto verticale nella ricettanza dei sistemi lineari non smorzati che si verifica in corrispondenza della pulsazione naturale ω_n .