# CAPITOLO 7: LA FILTRAZIONE E L’EQUAZIONE DI LAPLACE

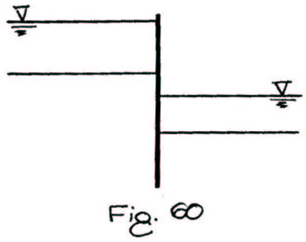
Consideriamo il caso di un terreno in quiete o in moto permanente; allora possiamo scrivere l’equazione di continuità:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}$$

la variazione di volume è direttamente collegata alla comprimibilità dello scheletro solido. Nel caso di moto permanente la deformazione volumetrica risulta però costante e quindi l’equazione di continuità è omogenea:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

La variazione è nulla anche nel caso in cui lo scheletro solido possa essere considerato incomprimibile.




Un problema tipico del moto di filtrazione si ha quando una paratia[5] divide due porzioni in cui il livello di falda è diverso; in questa situazione dopo un periodo di tempo transitorio ci sarà un moto a regime e le quantità non variano nel tempo. Il fenomeno può essere trattato con un problema disaccoppiato.

*Figura 7.1*

Facendo riferimento a tale situazione possiamo scrivere la legge di Darcy e l’espressione della quota piezometrica.

$$\begin{cases} v_c=-k\dfrac{\partial h}{\partial l} \\ h=z+\dfrac{u}{\gamma_w} \end{cases}$$

Possiamo considerare che la costante di permeabilità *k* sia indipendente dalla posizione (mezzo omogeneo) ma che dipenda dalla direzione considerata (anisotropia di permeabilità).
Sostituendo nell’equazione di continuità di si ottiene che:

$$k_x\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+k_z\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0$$

Nel caso in cui il mezzo fosse isotropo nei confronti della permeabilità ($k_x=k_y=k_z$) allora l’equazione di continuità si riduce all’equazione di Laplace:

$$\nabla^2 h=0$$

Anche nel caso di anisotropia si può comunque ridurre l’equazione all’espressione di Laplace operando un cambiamento di variabili.

$$x^I=x\sqrt{\frac{k_z}{k_x}} \quad \rightarrow \quad x=x^I\sqrt{\frac{k_x}{k_z}} \qquad dx=dx^I\sqrt{\frac{k_x}{k_z}}$$

$$y^I=y\sqrt{\frac{k_z}{k_y}} \quad \rightarrow \quad y=y^I\sqrt{\frac{k_y}{k_z}} \qquad dy=dy^I\sqrt{\frac{k_y}{k_z}}$$

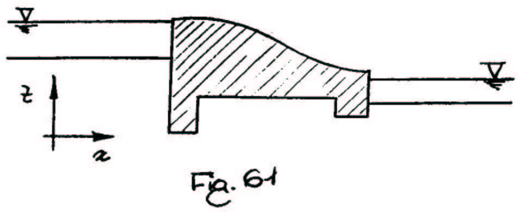
$$z^I=z\sqrt{\frac{k_z}{k_z}} \quad \rightarrow \quad z=z^I\sqrt{\frac{k_z}{k_z}} \qquad dz=dz^I\sqrt{\frac{k_z}{k_z}} \qquad \sqrt{\frac{k_z}{k_z}}=1$$

E quindi sostituendo si ottiene che:

5 Il termine PARATIA non è da confondere con PARATOIA che è un dispositivo idraulico e non geotecnico.

$$\frac{\partial^2 h}{(\partial x^I)^2}+\frac{\partial^2 h}{(\partial y^I)^2}+\frac{\partial^2 h}{(\partial z^I)^2}=0$$

Questa equazione può essere applicata ad esempio per analizzare il moto di un fluido sotto una traversa di sbarramento.



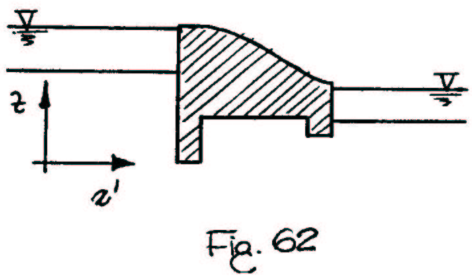

Questo tipo di problema è di tipo bidimensionale e quindi viene trascurata la direzione di *y*.

*Figura 7.2*

Supponiamo che la permeabilità sia diversa nella direzione *x* e nella direzione *z* ed in particolare che $k_x > k_z$ (ad esempio per la diversa disposizione del materiale nelle due direzioni).
Per ottenere l'equazione di Laplace viene fatta una sostituzione della variabile *x*.

$$x^I = x\sqrt{\frac{k_z}{k_x}} \qquad se \quad k_x > k_z \qquad \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad x^I < x$$

Per poter scrivere l'equazione di Laplace sarà necessario cambiare scala sul disegno, bisogna applicare una distorsione nella direzione *x*.




Una volta applicata la distorsione alla geometria del problema sarà necessario andare a risolvere l'equazione di Laplace allo scopo di determinare l'andamento delle quote piezometriche. A questo punto sarà necessario andare a studiare i metodi di risoluzione di tale equazione.

*Figura 7.3*

## Tracciamento del reticolato di flusso (risoluzione grafica dell'equazione di Laplace)

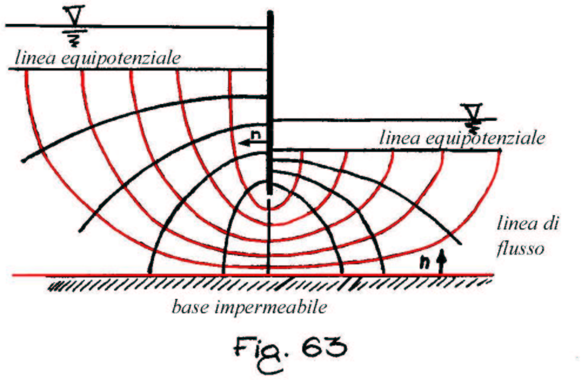



*Figura 7.4*

Le linee di flusso, quelle tracciate in rosso sono caratterizzate dalla proprietà

$$\frac{\partial h}{\partial n}=0$$

si può osservare che anche l'interfaccia con la base impermeabile rappresenta una linea di flusso in quanto tale linea non può essere attraversata dal liquido e quindi la velocità deve essere ad essa tangente.
Le superfici orizzontali del terreno sono superfici equipotenziali in quanto sono disposte orizzontalmente.
Tenendo conto di tutte queste informazioni è possibile tracciare un reticolato di flusso qualitativo.
Questa è una condizione di moto confinato.

- Esiste anche una categoria di moti di filtrazione a pelo libero in cui non è definita la zona all'interno della quale avviene il moto; infatti in queste situazioni il pelo libero rappresenta una incognita ulteriore del problema; l'informazione che conosciamo riguardo a tale linea è che rappresenta una linea di flusso, cioè

$$\frac{\partial h}{\partial n}=0$$

inoltre su di essa agisce una pressione neutra nulla.

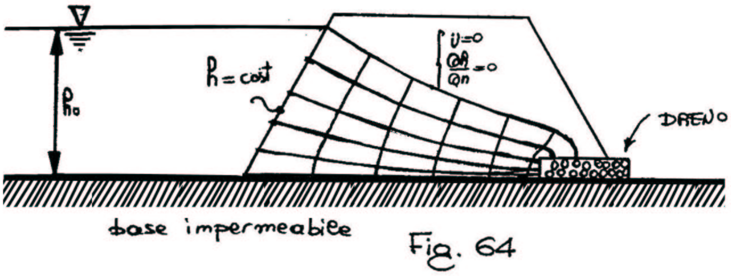



*Figura 7.5*

La superficie di base essendo impermeabile rappresenta una linea di flusso per il moto di filtrazione e quindi tale che

$$\frac{\partial h}{\partial n}=0$$

Possiamo inoltre osservare che la superficie del terrapieno a contatto con il bacino rappresenta una superficie equipotenziale per il moto di filtrazione qualsiasi sia la sua forma, infatti vale che:

$$h=z+\frac{u}{\gamma_w}$$

ma $u=\gamma_w(h_0-z)$

per cui: $h=z+h_0-z=h_0=cost.$

Vediamo ora come di comporta il moto di filtrazione attorno al dreno.

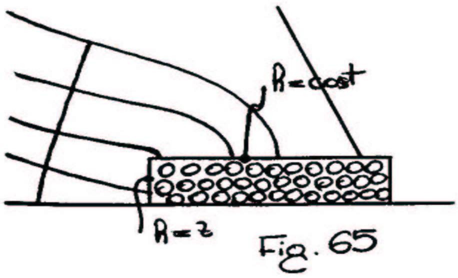



Figura 7.6

Possiamo dire che la pressione all'interno del dreno è pari a quella atmosferica e quindi sulle superfici di contatto con il terrapieno la quota piezometrica coincide con quella geodetica. La superficie superiore del dreno è orizzontale quindi $h$=*cost*, per cui le linee di corrente cadono su tale superficie perpendicolarmente.
Lungo la superficie di sinistra la quota piezometrica non è costante $h=z$.
Il dreno viene inserito a valle del terrapieno per evitare che il moto di filtrazione arrivi in superficie dando origine a dei fenomeni di erosione.

Per risolvere i problemi supponiamo di realizzare un reticolato di flusso a maglie quadre.

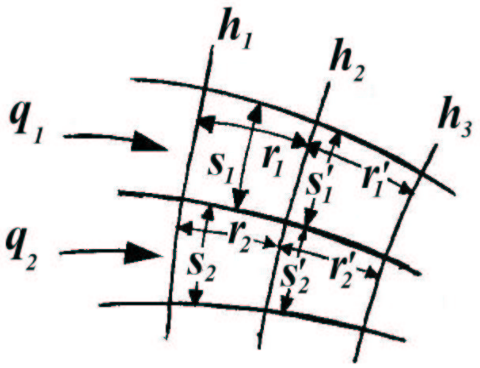



Figura 7.7

Possiamo calcolare la portata entrante in un tubo di flusso:

$$q_1 = v_1 s_1 = k \frac{h_1 - h_2}{r_1} s_1$$

La portata deve essere uguale a quella calcolata facendo riferimento alla seconda maglia:

$$q_1 = v_1^I s_1^I = k \frac{h_2 - h_3}{r_1^I} s_1^I$$

Se il reticolato di flusso viene realizzato a maglie quadrate allora il rapporto

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_1^I}{r_1^I} = 1$$

e quindi confrontando le due espressioni di $q_1$ si può dire che:

$$h_1 - h_2 = h_2 - h_3$$

ossia passando da una superficie equipotenziale all'altra abbiamo la stessa variazione di quota piezometrica .
Scrivendo la seconda portata:

$$q_2 = v_2 s_2 = k \frac{h_1 - h_2}{r_2} s_2$$

e considerando sempre l'ipotesi di maglie quadrate che matematicamente si esprime dicendo che:

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2}$$

allora si può ottenere l'uguaglianza tra le portate:

$$q_1 = q_2$$

Tracciando un reticolato di flusso, con maglie quadre, si possono ricavare le quote piezometriche e le portate direttamente dal disegno.

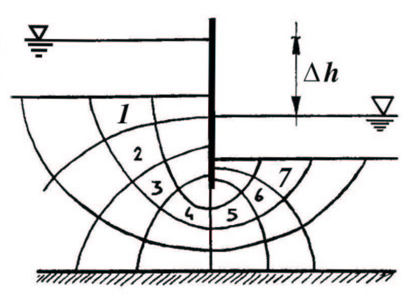



Figura 7.8

Se si contano il numero delle maglie $n$ appartenenti ad un tubo di flusso allora si può dire che:

$$\Delta h_i = \frac{\Delta h}{n}$$

La velocità attraverso un tubo di flusso è data da:

$$v_i = k \frac{\Delta h_i}{r_i}$$

e quindi la portata

$$q_i = v_i s_i = k \Delta h_i \frac{s_i}{r_i}$$

Nel caso del reticolato che è stato definito le maglie sono di tipo quadrato e quindi il rapporto $s_i/r_i$ è unitario. Si ottiene quindi che:

$$q_i = k \Delta h_i$$

Per calcolare la portata totale del moto di filtrazione si può sommare su tutti i tubi di flusso:

$$q = \sum_i q_i$$

ma siccome il reticolato è stato costruito in modo che le singole portate di ogni tubo di flusso siano uguali allora è sufficiente contare il numero *m* dei tubi di flusso e scrivere che:

$$q = m q_i \qquad q = m k \Delta h_i \qquad q = \frac{m}{n} k \Delta h$$

OSSERVAZIONE: Una volta che si è instaurata la condizione di moto a regime l'andamento delle quote piezometriche è indipendente dal tipo di materiale, infatti il problema è governato dall'equazione $\nabla^2 h=0$. Date le condizioni al contorno il problema è univocamente determinato. Possiamo tracciare immediatamente le quote piezometriche perchè sono indipendenti dalla permeabilità ed il regime di filtrazione è sempre identico. Quello che dipende dalla permeabilità e dalla rigidezza del materiale è la durata del transitorio ossia il processo di consolidazione del terreno. La portata in condizioni di regime permanente è direttamente proporzionale alla permeabilità.

## Risoluzione alle differenze finite

Per impostare il metodo di risoluzione alle differenze finite determiniamo l’espressione della derivata seconda di una funzione reale in termini discreti.

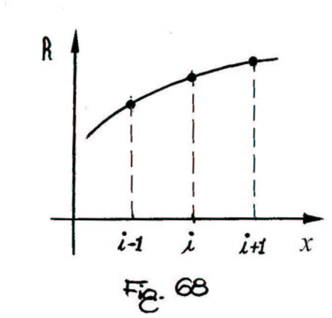



*Figura 7.9*

Calcoliamo le derivate prime in ($i-1$) ed $i$:

$$h^I_{i-1} = \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x} \qquad h^I_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x}$$

Con queste due derivate prime possiamo determinare la derivata seconda:

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{h^I_i - h^I_{i-1}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x} - \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

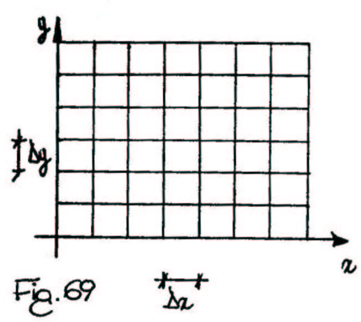



*Figura 7.10*

Questa relazione cerchiamo di applicarla al caso delle funzioni a più variabili. A tale scopo discretiziamo il dominio di una funzione a più variabili con una serie di rettangolini.

Il generico nodo della discretizzazione sarà individuato da una coppia di indici *i,j*; se consideriamo tale nodo assieme ai quattro elementi che lo circondano possiamo scrivere l’equazione di Laplace in tale posizione.

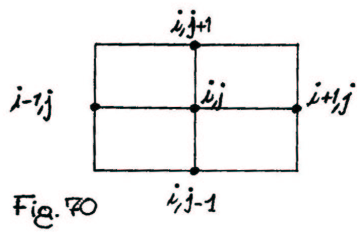



*Figura 7.11*

Applicando la formula precedente nelle due direzioni $x$ e $y$ possiamo scrivere la derivata seconda della funzione h rispetto a tali variabili.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{\Delta x^2} \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

a questo punto si può pensare di imporre l’equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

Se la discretizzazione viene fatta in modo tale che $\Delta x = \Delta y$ allora si ottiene che:

$$h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1} = 0$$

$$h_{i,j} = \frac{h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1}}{4}$$

Il valore della quota piezometrica in un punto è uguale alla media aritmetica delle quote piezometriche dei 4 punti che lo circondano. Un’equazione di questo tipo può essere scritta per ogni nodo della discretizzazione; inoltre conosciamo i valori della quota piezometrica al contorno e quindi quello che otteniamo è un sistema di equazioni lineari che può essere facilmente risolto con l’ausilio del computer.