

CAPITOLO 5: MOTI DI FILTRAZIONE

Il comportamento meccanico di un terreno dipende dal valore della tensione efficace σ^I .

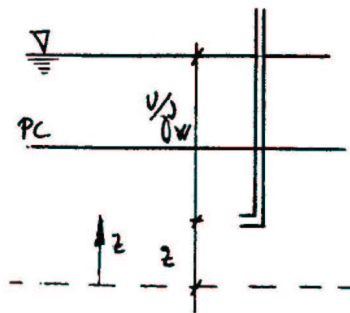
$$\sigma^I = \sigma - u$$

Il problema che si presenta è di determinare lo stato tensionale del fluido all'interno del terreno.

In ogni situazione dovremo valutare le pressioni neutre in sito, le quali dipendono dalla posizione della falda.

Lo studio del problema può essere fatto in diverse situazioni: in condizioni idrostatiche e in condizioni idrodinamiche.

In condizioni idrostatiche abbiamo la presenza di una falda e per la misura delle pressioni possiamo adottare i piezometri che se inseriti nella falda, in un certo punto, essi forniscono il valore della quota piezometrica in quel punto.



Se viene scelto un piano orizzontale di riferimento allora è possibile definire la quota piezometrica in un punto nel modo seguente:

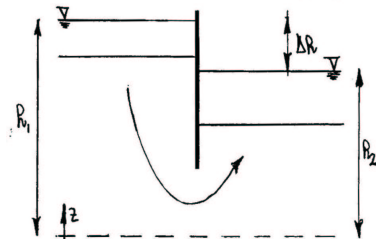
$$h = z + \frac{u}{\gamma_w}$$

In condizioni idrostatiche la quota piezometrica si mantiene costante in tutti i punti della falda.

Fig. 23

Figura 5.1

In condizioni idrodinamiche il moto è garantito da una differenza di quota piezometrica e quindi il valore di h non risulta costante ma diminuisce nella direzione del moto; la perdita di quota piezometrica, che può essere vista come perdita di energia è quella che deve essere spesa per poter vincere le resistenze che si oppongono al moto.



In realtà la perdita di energia dovrebbe essere misurata in termini di carico totale (trinomio di Bernoulli) comprensivo del contributo cinetico, però nei moti di filtrazione le velocità sono molto ridotte per cui il termine cinetico può considerarsi trascurabile rispetto a quello piezometrico. Nei moti di filtrazione una velocità di 0,02 m/s può già essere considerata molto elevata.

Nel problema rappresentato in figura se le condizioni al contorno sono stabilite allora si arriva ad un regime di filtrazione a carattere stazionario.

Fig. 24

Figura 5.2

Un regime di filtrazione in condizioni di moto vario si può avere nel caso in cui viene abbassato il livello dell'acqua trattenuta da una diga in terra.

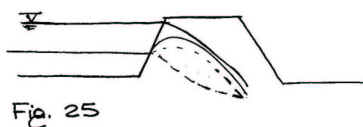


Fig. 25

Figura 5.3

Il caso più importante si ha quando il terreno viene caricato, in questo modo vengono incrementate le pressioni dello scheletro solido e della falda. Si modificano in questo modo le quote piezometriche che provocano dei moti di filtrazione aggiuntivi che possono intervenire modificando le tensioni efficaci e quindi lo stato di addensamento del terreno.

Legge di Darcy

Il moto di filtrazione all'interno del terreno avviene attraverso le fessure che ci sono tra i grani. Per capire il fenomeno del moto di filtrazione, per comodità consideriamo una unica fessura di diametro d che collega due serbatoi tra i quali esiste una differenza di quota piezometrica pari a Δh .

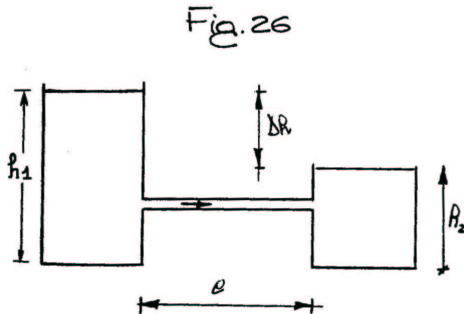


Figura 5.4

La variazione di carico Δh induce un moto di filtrazione e la velocità attraverso la fessura di diametro d può essere espressa nel modo seguente:

$$v = \frac{8d^2}{12\nu} \left(\frac{h_1 - h_2}{l} \right)^\alpha$$

In questa condizione possiamo supporre che il moto sia di tipo laminare, condizione che si verifica nel momento in cui le dimensioni delle fessure sono molto piccole e la velocità bassa. In questo caso può

essere adottato un coefficiente $\alpha=1$ (nel caso di moto turbolento $\alpha=2$).

Con queste ipotesi si può osservare che la velocità del moto risulta proporzionale al gradiente idraulico:

$$i = \frac{\Delta h}{l}$$

Nel terreno il moto di filtrazione avviene tra gli spazi presenti tra un granello e l'altro, quindi se la velocità viene calcolata come rapporto tra la portata e la sezione di passaggio allora questa non rappresenta una velocità effettiva ma una velocità media.

La velocità apparente sarà data dal rapporto tra la portata e l'area totale della sezione entro cui avviene il moto di filtrazione.

$$v = \frac{q}{A}$$

La velocità effettiva è data dal rapporto tra la portata e l'area della sezione, attraverso la quale avviene il moto di filtrazione, che non è occupata dai grani di terreno (nA).

$$v_{eff} = \frac{q}{nA}$$

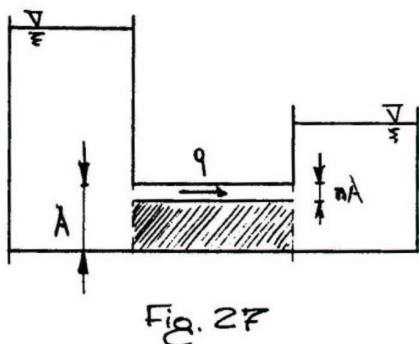


Figura 5.5

La quale, se il moto è di filtrazione e laminare, può essere correlata al gradiente idraulico attraverso la legge di Darcy:

$$v = -ki$$

Dove k è un parametro che viene denominato **CONDUCIBILITÀ IDRAULICA** o **COEFFICIENTE DI PERMEABILITÀ**.

Il coefficiente di permeabilità k dipende dalla dimensione dei pori nel terreno; al diminuire della dimensione diminuisce anche la permeabilità. In generale tale coefficiente dipende da una frazione granulometrica, cioè dalla frazione più fina che compone il terreno; esiste una relazione che correla il coefficiente di permeabilità al diametro d_{10} .

Nota Bene: In geotecnica non esiste la differenza tra terreni permeabili ed impermeabili; tutti i terreni sono permeabili solo che tale caratteristica può essere più o meno marcata.

Altri fattori da cui dipende il parametro k :

1. il primo fattore che influenza il coefficiente k è la dimensione dei pori direttamente collegata alla frazione granulometrica d_{10} .
2. Indice dei vuoti e : a parità di granulometria un materiale più denso ha permeabilità minore.
3. Viscosità cinematica ν la quale a sua volta dipende dalla temperatura e dalle caratteristiche del fluido.
4. Dal grado di saturazione S , all'aumentare del grado di saturazione nei terreni non saturi diminuisce la permeabilità in quanto questa è ostacolata dai gas presenti.
5. Dalla direzione, il mezzo non è isotropo rispetto alla permeabilità, ad esempio un terreno argilloso a causa dell'applicazione dei carichi induce le particelle di argilla, che hanno una forma allungata, a disporsi in direzione perpendicolare a quella del carico; in questo modo nasce una direzione preferenziale per un eventuale moto di filtrazione.

Anche nei moti di filtrazione è possibile introdurre il numero di Reynolds il quale ci permette di stabilire un campo di validità per la legge di Darcy che abbiamo detto essere adatta per i moti di tipo laminare.

$$Re = \frac{vd}{\nu}$$

Dal punto di vista sperimentale è stato rilevato che la legge di Darcy è valida per valori del numero di Re inferiori all'unità.

Nel caso di terreni:

$$Re = \frac{k i d_{10}}{\nu} = \frac{c i d_{10}^3}{\nu} \quad \begin{array}{l} c=100 \\ \nu=10^{-2} \end{array}$$
$$\Rightarrow Re \simeq 10^4 i d_{10}^4$$

se viene adottato un gradiente idraulico unitario, affinché $Re \leq 1$ deve risultare:

$$d_{10} \leq 0,015 \text{ cm}$$

valore che rappresenta gran parte dei terreni.

La legge di Darcy cade in difetto nel momento in cui abbiamo una elevata granulometria ed elevati gradienti idraulici.

Moti di filtrazione: effetti di natura meccanica

Per analizzare gli effetti di natura meccanica causati dai moti di filtrazione, andiamo a definire alcune grandezze che verranno utilizzate nello sviluppo della teoria.

PRESSIONE INTERTIZIALE NEUTRA: u

QUOTA PIEZOMETRICA: $h = z + \frac{u}{\gamma_w}$

PORTATA FILTRANTE: q (legata alla variazione di quota piezometrica)

SFORZO TOTALE: σ_z

SFORZO EFFICACE: $\sigma_z^I = \sigma_z - u$

DEFORMAZIONE ε_z che dipende dalla variazione della componente efficace di sforzo.

Inizialmente per inquadrare il problema supponiamo che esso possa essere schematizzato monodimensionalmente.

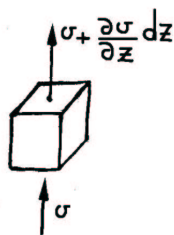


Fig. 28

Consideriamo questo elemento di volume delle dimensioni $dx \, dy \, dz$ e andiamo a valutarne la relativa variazione.

$$dV = q \, dt - \left(q + \frac{\partial q}{\partial z} dz \right) dt = - \frac{\partial q}{\partial z} dz \, dt$$

Questa variazione di volume è intesa positiva quando avviene una riduzione del volume stesso. D'altra parte la variazione di volume può anche essere determinata facendo riferimento alle deformazioni.

Per valutare la variazione di volume tra due istanti di tempo successivi consideriamo la situazione seguente:

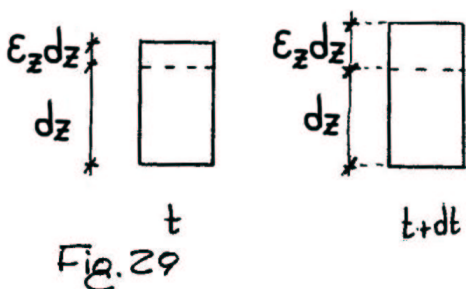


Fig. 29

L'incremento di volume tra due istanti di tempo successivi può essere valutato nel modo seguente:

$$\begin{aligned} [(\varepsilon_z dz)_{t+dt} - (\varepsilon_z dz)_t] dx \, dy &= [(\varepsilon_z)_{t+dt} - (\varepsilon_z)_t] dx \, dy \, dz = \\ &= \frac{(\varepsilon_z)_{t+dt} - (\varepsilon_z)_t}{dt} dt \, dx \, dy \, dz = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} dt \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

La variazione di volume con la convenzione che abbiamo precedentemente adottato si può scrivere come:

$$dV = - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} dt \, dx \, dy \, dz$$

A questo punto si può imporre l'eguaglianza tra le due espressioni, e si ricava che:

$$- \frac{\partial q}{\partial z} dz \, dt = - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} dt \, dx \, dy \, dz$$

ricordiamo che $q = v \, dx \, dy$

$$\frac{\partial v}{\partial z} dx dy = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} dx dy$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ NEL CASO DI SCHEMA MONODIMENSIONALE.

Questa equazione può essere estesa anche al caso tridimensionale; possiamo quindi scrivere che:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

Se ipotizziamo che il moto sia anche permanente allora è possibile annullare le derivate temporali in quanto il tutto dipende esclusivamente dalla posizione e non dal tempo.

Otteniamo quindi che:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

A questo punto sarebbe necessario introdurre le equazioni del moto che governano il comportamento del campo fluido; tali equazioni però ammettono soluzione solo per casistiche particolari di problemi. Nel caso di moti di filtrazione le equazioni di Navier–Stokes vengono sostituite con la legge di Darcy la quale può essere vista come una relazione statisticamente equivalente alle equazioni di equilibrio dinamico.

Consideriamo allora la legge di Darcy applicata in ogni direzione del campo di moto.

$$v_i = -k_i \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

in generale il coefficiente di filtrazione non è uguale nelle tre direzioni del moto, inoltre potrebbe dipendere anche dalla posizione. Consideriamo il primo addendo nell'equazione di continuità:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) = -k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

il secondo passaggio è stato fatto ipotizzando che il coefficiente k_x fosse dipendente almeno dalla coordinata x .

Gli stessi passaggi possono essere fatti anche nelle altre sue direzioni:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial v_z}{\partial z} = -k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$$

In totale l'equazione di continuità diventa:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Nel caso in cui il terreno abbia un comportamento isotropo nei confronti del moto di filtrazione allora si può dire che $k_x = k_y = k_z = k$ per cui l'equazione di continuità diventa:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \qquad \nabla^2 h = 0$$

Quindi l'andamento delle quote piezometriche è di tipo lineare.

Secondo questa relazione la funzione è armonica in quanto soddisfa l'equazione di Laplace.

Possiamo osservare che il quest'ultima formulazione non interviene la permeabilità a definire il moto di filtrazione, quindi possiamo dire che sotto queste ipotesi il moto è indipendente dalle caratteristiche di filtrazione.

Nel caso in cui il mezzo non fosse isotropo si può comunque arrivare all'equazione di Laplace al prezzo di operare un cambiamento di variabili.

$$x^I = \frac{x}{\sqrt{k_x}} \qquad y^I = \frac{y}{\sqrt{k_y}} \qquad z^I = \frac{z}{\sqrt{k_z}} \qquad \begin{cases} dx = \sqrt{k_x} dx^I \\ dy = \sqrt{k_y} dy^I \\ dz = \sqrt{k_z} dz^I \end{cases}$$

Sostituendo nel primo addendo dell'equazione di continuità abbiamo che:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = k_x \frac{\partial^2 h}{(\sqrt{k_x} dx^I)^2} = \frac{k_x}{k_x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^{I2}} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^{I2}}$$

Calcoli analoghi possono essere fatti anche nelle altre direzioni:

$$k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^{I2}} \quad k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial z^{I2}}$$

In questo modo l'equazione di continuità può essere scritta nel modo seguente:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^{I2}} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^{I2}} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^{I2}} = 0$$

vediamo che h soddisfa nuovamente l'equazione di Laplace rispetto alle nuove variabili.

Un altro tipo di sostituzione che può essere fatta è il seguente:

$$\left. \begin{aligned} x^I &= \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} x & y^I &= \sqrt{\frac{k_z}{k_y}} y & z^I &= z \end{aligned} \right\} \begin{cases} dx = \sqrt{\frac{k_x}{k_z}} dx^I \\ dy = \sqrt{\frac{k_y}{k_z}} dy^I \\ dz = dz^I \end{cases}$$

Facendo i calcoli si ottiene ancora l'equazione di Laplace nelle nuove variabili.

$$k_z \nabla^2 h = 0$$

Considerazione monodimensionale

Se abbiamo un problema di filtrazione di tipo monodimensionale allora l'equazione diventa:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

questo significa che l'andamento delle quote piezometriche è di tipo lineare.

Sostituendo all'interno dell'equazione di continuità l'espressione della quota piezometrica:

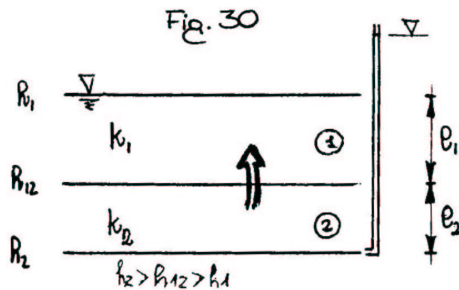
$$h = z + \frac{u}{\gamma_w}$$

allora si ottiene che:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ossia anche la distribuzione delle pressioni neutre è di tipo lineare.

Problema esplicativo

Andiamo ad analizzare il caso di un terreno con diverse permeabilità, cioè un terreno stratificato che presenti quote piezometriche diverse decrescenti dal basso verso l'alto. In questo caso si instaura un moto di filtrazione dal basso verso l'alto e vediamo di studiarne le caratteristiche principali.



Utilizzando il piezometro possiamo conoscere il valore di h_2 , mentre quello di h_1 è direttamente misurabile.

Il valore della quota piezometrica h_{12} può essere calcolato imponendo la continuità, cioè la velocità del moto di filtrazione nei due istanti deve essere uguale.

Figura 5.6

$$v_1 = k_1 \frac{h_{12} - h_1}{l_1} = k_1 i_1 \quad v_2 = k_2 \frac{h_2 - h_{12}}{l_2} = k_2 i_2$$

La continuità si esprime dicendo che deve risultare $v_1 = v_2$.

Si può quindi imporre l'equazione:

$$\begin{aligned} k_1 \frac{h_{12} - h_1}{l_1} &= k_2 \frac{h_2 - h_{12}}{l_2} \\ k_1 l_2 (h_{12} - h_1) &= k_2 l_1 (h_2 - h_{12}) \\ h_{12} (k_1 l_2 + k_2 l_1) &= k_1 l_2 h_1 + k_2 l_1 h_2 \end{aligned}$$

da cui si può ricavare la quota piezometrica esistente all'interfaccia tra i due strati.

$$h_{12} = \frac{k_1 l_2 h_1 + k_2 l_1 h_2}{k_1 l_2 + k_2 l_1}$$

Studiamo le possibili condizioni di variabilità della quota piezometrica h_{12} .

1. Supponiamo che lo strato 1 e 2 presentino delle permeabilità molto diverse tra loro, ossia ipotizziamo che $k_1 \gg k_2$. Dividiamo per k_1 sia il numeratore che il denominatore dell'espressione di h_{12} .

$$h_{12} = \frac{l_2 h_1 + \frac{k_2}{k_1} l_1 h_2}{l_2 + \frac{k_2}{k_1} l_1} \approx \frac{l_2 h_1}{l_2} = h_1$$



Figura 5.7

Si può osservare che con questa ipotesi non esiste praticamente differenza di quota piezometrica all'interno dello strato di materiale più permeabile.

2. Supponiamo ora di avere uno strato di terreno dello spessore di 1 m ad alta permeabilità:

$$l_1 = 1m \quad k_1 = 10^{-1} \frac{cm}{sec}$$

Come secondo strato scegliamo uno strato di argilla dello spessore di 1 mm :

$$l_2 = 1 \text{ mm} \quad k_2 = 10^{-8} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

A questo punto vediamo di studiare l'effetto di questo sottile strato di argilla sulla velocità o portata di filtrazione.

$$\begin{aligned} v &= k_1 \frac{h_2 - h_1}{l_1} = \frac{k_1}{l_1} (h_2 - h_1) = \frac{k_1}{l_1} \left(\frac{k_1 l_2 h_1 + k_2 l_1 h_2}{k_1 l_2 + k_2 l_1} - h_1 \right) = \\ &= \frac{k_1}{l_1} \frac{k_1 l_2 h_1 + k_2 l_1 h_2 - k_1 l_2 h_1 - k_2 l_1 h_1}{k_1 l_2 + k_2 l_1} = \frac{k_1}{l_1} \frac{k_2 l_1 (h_2 - h_1)}{k_1 l_2 + k_2 l_1} = \\ &= k_1 k_2 \frac{h_2 - h_1}{k_1 l_2 + k_2 l_1} = \underbrace{\frac{k_1 k_2 (l_1 + l_2)}{k_1 l_2 + k_2 l_1}}_b \underbrace{\frac{h_2 - h_1}{l_1 + l_2}}_a \end{aligned}$$

Il termine (a) può essere visto come il valore del gradiente idraulico medio in corrispondenza dei due strati, mentre il termine (b) può essere visto come la permeabilità equivalente dei due strati.

Supponiamo momentaneamente che anche lo strato 2 sia formato dallo stesso materiale dello strato 1, cioè $k_2 = k_1$. Applicando la formula precedente possiamo ricavare la velocità del moto di filtrazione in assenza dello strato di argilla e la indichiamo con v_0 .

$$v_0 = \frac{k_1^2 (l_1 + l_2)}{k_1 (l_1 + l_2)} \frac{h_2 - h_1}{l_1 + l_2} = k_1 \frac{h_2 - h_1}{l_1 + l_2}$$

Noto questo valore di velocità si può pensare di calcolare il rapporto tra la velocità v e v_0 rispettivamente con o senza lo strato di argilla allo scopo di poter mettere in evidenza il suo effetto.

$$\frac{v}{v_0} = \frac{k_1 k_2 (l_1 + l_2)}{k_1 l_2 + k_2 l_1} \frac{h_2 - h_1}{l_1 + l_2} \frac{1}{k_1} \frac{l_1 + l_2}{h_2 - h_1} = \frac{k_2 (l_1 + l_2)}{k_1 l_2 + k_2 l_1}$$

Arrivati a questo punto possiamo sostituire i valori assegnati dal problema.

$$\frac{v}{v_0} = \frac{10^{-10} (1 + 10^{-3})}{10^{-3} 10^{-3} + 10^{-10} \cdot 1} = \frac{10^{-10} (1 + 10^{-3})}{10^{-6} (1 + 10^{-4})} = 10^{-4} \frac{(1 + 10^{-3})}{(1 + 10^{-4})} \simeq 10^{-4}$$

Questo risultato ci permette di affermare che la valutazione delle velocità di filtrazione per terreni stratificati risulta molto difficile, infatti la presenza di un sottile strato di argilla può ridurre di circa 10.000 volte la velocità del moto di filtrazione.

A questo punto vogliamo andare a tracciare il diagramma delle tensioni totali, delle pressioni neutre e delle tensioni efficaci allo scopo di analizzare l'effetto che provoca la presenza del moto di filtrazione sulle tensioni efficaci.

Pressioni totali.

Per quanto riguarda le tensioni totali non ci sono problemi perché è sufficiente considerare il peso specifico in condizioni sature del terreno:

$$\sigma_z = \gamma_{sat} z$$

In questa equazione è stato implicitamente supposto che i pesi specifici dei due strati siano uguali in quanto quello che vogliamo fare è mettere in evidenza il comportamento in funzione del moto di filtrazione.

Pressioni neutre.

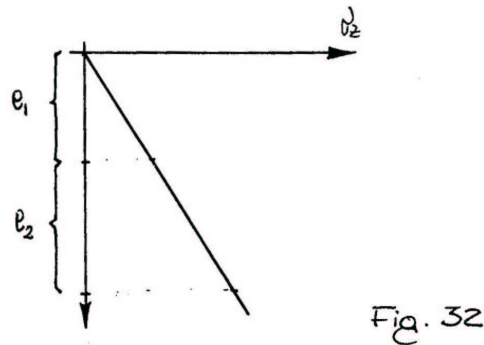


Figura 5.8

Allo scopo di determinare le pressioni neutre definiamo un piano di riferimento per calcolare le quote piezometriche h . Come piano di riferimento scegliamo il livello inferiore del secondo strato. Con questa scelta si può dire che:

$$\begin{aligned} h_1 &= l_1 + l_2 & \text{con} & \quad z_1 = l_1 + l_2 & \quad e & \quad \frac{u_1}{\gamma_w} = 0 \\ h_2 &= l_1 + l_2 + \Delta h & \text{con} & \quad z_2 = 0 & \quad e & \quad \frac{u_2}{\gamma_w} = l_1 + l_2 + \Delta h \end{aligned}$$

La quota piezometrica all'interfaccia dei due strati è stata ricavata precedentemente:

$$h_{12} = \frac{k_1 l_2 h_1 + k_2 l_1 h_2}{k_1 l_2 + k_2 l_1}$$

si può dire anche che $z_{12} = l_2$.

$$\Rightarrow \frac{u_{12}}{\gamma_w} = h_{12} - z_{12}$$

Una volta fatti questi calcoli e averli discussi in funzione dei parametri k_1, k_2 conosciamo 3 punti per il tracciamento del diagramma delle pressioni neutre. Tali punti sono quelli significativi in quanto in un moto di filtrazione di tipo permanente e schematizzabile monodimensionalmente la distribuzione delle pressioni neutre è di tipo lineare.

Calcoliamo la pressione neutra u_{12} :

$$\begin{aligned} \frac{u_{12}}{\gamma_w} &= h_{12} - z_{12} = \frac{k_1 l_2 h_1 + k_2 l_1 h_2}{k_1 l_2 + k_2 l_1} - l_2 = \\ &= \frac{k_1 l_2 (l_1 + l_2) + k_2 l_1 (l_1 + l_2 + \Delta h) - k_1 l_2^2 - k_2 l_1 l_2}{k_1 l_2 + k_2 l_1} = \\ &= \frac{k_2 l_1^2 + k_1 l_1 l_2 + k_2 l_1 \Delta h}{k_1 l_2 + k_2 l_1} = \frac{l_1 (k_1 l_2 + k_2 l_1) + k_2 l_1 \Delta h}{k_1 l_2 + k_2 l_1} = \\ &= l_1 + \frac{k_2}{k_1 l_2 + k_2 l_1} l_1 \Delta h \end{aligned}$$

Se abbiamo un unico strato cioè $k_1 = k_2$ allora la distribuzione delle pressioni neutre è lineare e può essere ottenuta unendo con una retta i due punti significativi alle estremità dei quali conosciamo già i valori di pressione. Comunque possiamo ugualmente calcolare il valore di pressione media in corrispondenza della posizione di cambiamento dello strato in modo tale da avere un confronto nelle situazioni in cui $k_1 \neq k_2$.

Se $k_1 = k_2$
$$\left(\frac{u_{12}}{\gamma_w} \right)_0 = l_1 + \frac{l_1}{l_1 + l_2} \Delta h$$

Vediamo ora quando la pressione neutra $\frac{u_{12}}{\gamma_w}$ nel caso in cui $k_1 \neq k_2$

risulta maggiore della pressione $\left(\frac{u_{12}}{\gamma_w} \right)_0$

$$\frac{u_{12}}{\gamma_w} > \left(\frac{u_{12}}{\gamma_w} \right)_0 \quad l_1 + \frac{k_2}{k_1 l_2 + k_2 l_1} l_1 \Delta h > l_1 + \frac{l_1}{l_1 + l_2} \Delta h$$

$$\frac{k_2}{k_1 l_2 + k_2 l_1} l_1 \Delta h > \frac{l_1}{l_1 + l_2} \Delta h$$

$$\frac{k_2}{k_1 l_2 + k_2 l_1} > \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

$$k_1 l_2 + k_2 l_1 < (l_1 + l_2) k_2$$

$$k_1 l_2 < l_2 k_2$$

$$k_2 > k_1$$

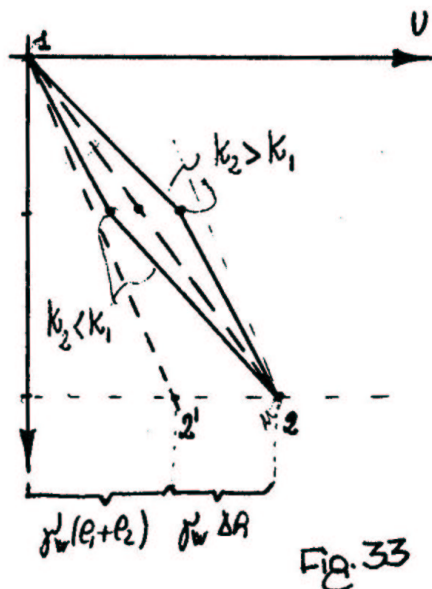


Figura 5.9

Dobbiamo osservare che la retta che esce dal punto 1 e si unisce con il punto 2' rappresenta la distribuzione delle pressioni neutre in assenza del moto di filtrazione (condizioni idrostatiche)

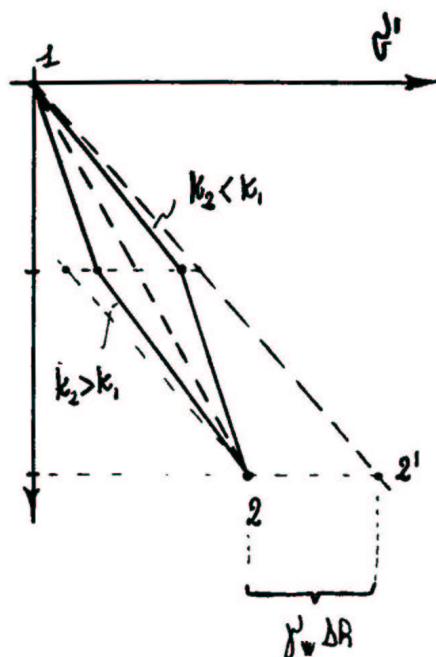
Le pressioni neutre u_{12} al variare dei coefficienti k_1 e k_2 non possono assumere qualsiasi valore, ma risultano limitate.

$$\frac{u_{12}}{\gamma_w} = l_1 + \frac{k_2}{k_1 l_2 + k_2 l_1} l_1 \Delta h = l_1 + \frac{k_2}{\frac{k_1}{k_2} l_2 + l_1} l_1 \Delta h$$

Se $k_1 \gg k_2$ allora $\frac{k_1}{k_2} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{u_{12}}{\gamma_w} \rightarrow l_1$

Se $k_1 \ll k_2$ allora $\frac{k_1}{k_2} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{u_{12}}{\gamma_w} \rightarrow l_1 + \Delta h$

Una volta determinate le pressioni neutre e le tensioni totali è possibile tracciare il diagramma delle tensioni efficaci.



Si può immediatamente osservare che il moto di filtrazione dal basso verso l'alto induce una riduzione delle tensioni efficaci nel terreno.

Fig. 34

Figura 5.10

Discutiamo ora in particolare il caso in cui il mezzo sia omogeneo.

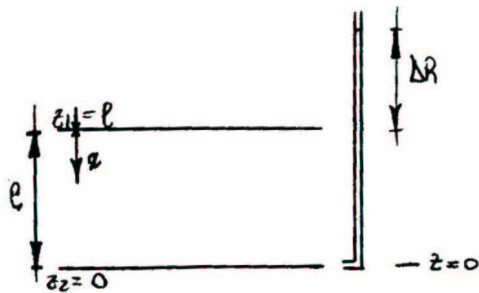


Fig. 35

Figura 5.11

$$\begin{array}{llll} h_1 = l & \text{con} & z_1 = l & \frac{u_1}{\gamma_w} = 0 \\ h_2 = l + \Delta h & \text{con} & z_2 = 0 & \frac{u_2}{\gamma_w} = l + \Delta h \end{array}$$

Possiamo calcolare le espressioni delle tensioni totali, pressioni neutre e tensioni efficaci.

$$\sigma = \gamma_{sat} x \quad u = \gamma_w (l + \Delta h) \frac{x}{l}$$

e quindi si può ricavare l'espressione della tensione efficace.

$$\begin{aligned} \sigma^I = \sigma - u &= \gamma_{sat} x - \gamma_w \frac{(l + \Delta h)}{l} x = \\ &= \gamma_{sat} x - \gamma_w x - \gamma_w \frac{\Delta h}{l} x = \underline{(\gamma_{sat} - \gamma_w) x} - \gamma_w i x \end{aligned}$$

L'espressione sottolineata rappresenta la distribuzione delle tensioni efficaci in condizioni idrostatiche; il termine aggiuntivo dipende dal gradiente piezometrico è quello che tiene conto della differenza dovuta al moto di filtrazione.

Esiste un particolare valore del gradiente idraulico detto **GRADIENTE CRITICO** i_{cr} per il quale la distribuzione delle tensioni efficaci è identicamente nulla.

$$\begin{aligned} \sigma^I &= 0 \quad (\gamma_{sat} - \gamma_w) x - \gamma_w i_{cr} x = 0 \\ \Rightarrow (\gamma_{sat} - \gamma_w) - \gamma_w i_{cr} &= 0 \\ i_{cr} &= \frac{\gamma_{sat} - \gamma_w}{\gamma_w} \end{aligned}$$

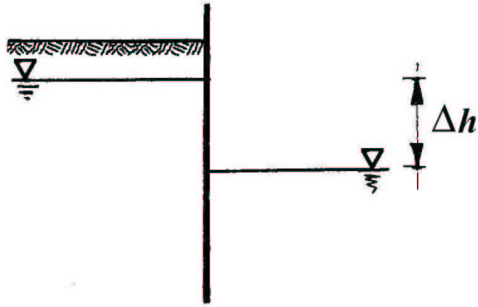
generalmente per i terreni normali i_{cr} è prossimo all'unità $i_{cr} \simeq 1$.

In questa situazione significa che le tensioni totali sono completamente assorbite e quindi i granelli del terreno non si trasmettono alcuna sollecitazione.

Questo significa che lo scheletro solido non è in grado di assorbire nessuna quota del carico; si trova come in sospensione nel campo fluido.

Fenomeno del sifonamento

Il fenomeno del sifonamento è direttamente correlato alla presenza dei moti di filtrazione dal basso verso l'alto. Questo moto induce sui granelli di terreno delle forze di trascinamento che tendono a sostenerli. Abbiamo visto che tale effetto può essere spinto fino al punto in cui le tensioni efficaci risultano nulle; questa è una situazione abbastanza pericolosa in quanto il terreno assume un comportamento simile a quello di un fluido e quindi non è più in grado di resistere a delle sollecitazioni taglienti.



In questo esempio si instaura un moto di filtrazione di aggiramento della paratia: da sinistra a destra, ed a sinistra della paratia dall'alto verso il basso, mentre nella parte a destra della paratia si muove verso l'alto. Quando il gradiente i è talmente elevato da annullare le tensioni efficaci, nella porzione di terreno a destra della paratia, allora risulterà compromessa la stabilità dell'opera. S'instaura il fenomeno di sifonamento con l'asportazione progressiva del terreno che comporta una riduzione del percorso di drenaggio e di conseguenza un'ulteriore aumento del gradiente. Il fenomeno accelera progressivamente.

Figura 5.12

La distribuzione delle tensioni efficaci è data da:

$$\sigma^I = (\gamma_{sat} - \gamma_w) z - \gamma_w i z$$

Il problema nasce quando si annulla questa distribuzione di tensioni in corrispondenza di:

$$i_c = \frac{\gamma_{sat} - \gamma_w}{\gamma_w}$$

In queste condizioni è necessario ridurre il gradiente idraulico i allo scopo di aumentare le tensioni efficaci. Esistono alcuni metodi per ottenere questo risultato:

1. aumentare la lunghezza di infissione della paratoia in modo da ridurre il gradiente idraulico medio.
2. Sul fondo dello scavo viene disposto un filtro e caricato con materiale di grossa pezzatura, in questo modo può aumentare il valore delle tensioni efficaci.
3. Può essere ridotta la pressione dell'acqua sotto lo scavo attraverso degli sistemi drenanti.

Nel caso in cui il moto di filtrazione avviene dall'alto verso il basso allora l'effetto provocato è quello di ridurre la pressione dell'acqua rispetto a quella idrostatica e di conseguenza aumentare le tensioni efficaci.

Fenomeno dei fontanazzi

Il fenomeno dei Fontanazzi si presenta lungo gli argini del fiume Adige durante la piena. Si tratta di un moto di filtrazione sotto l'argine e che si manifesta con risalita dell'acqua nei campi adiacenti il corso d'acqua questo processo può provocare la caduta dell'argine.

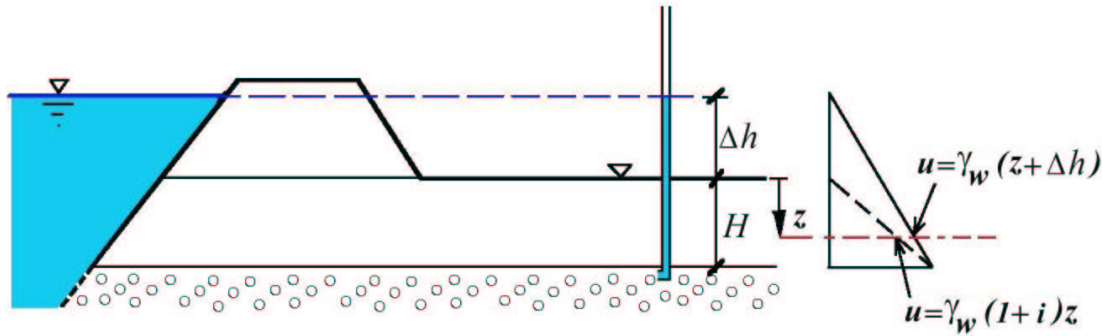


Figura 5.13

Le tensioni totali:

$$\sigma_z = \gamma z$$

La pressione neutra:

Se l'andamento della pressione neutra fosse idrostatico alla generica quota z rispetto al piano di campagna si avrebbe:

$$u = \gamma_w (z + \Delta h)$$

Nel terreno ho però il moto di filtrazione quindi alle due quote significative:

$$z_1 = 0 \quad u_1 = 0$$

$$z_2 = H \quad u_2 = \gamma_w (H + \Delta h)$$

Con questi valori ricavo l'andamento della pressione neutra nel terreno con l'equazione della retta; con z indico la coordinata generica rispetto al piano di campagna cui corrisponde la pressione u mentre con H indico lo spessore dello strato di terreno.

$$\frac{u - 0}{\gamma_w (H + \Delta h) - 0} = \frac{z - 0}{H - 0}$$

Da cui ottengo:

$$u = \gamma_w \left(\frac{H}{H} + \frac{\Delta h}{H} \right) z$$

$$u = \gamma_w (1 + i) z$$

Le tensioni efficaci:

$$\sigma_z^I = \sigma_z - u$$

$$\sigma_z^I = \gamma z - \gamma_w (1 + i) z$$

L'aumento della pressione interstiziale può annullare la tensione efficace, quando questo succede la caduta piezometrica i si dice **CADENTE CRITICA o GRADIENTE CRITICO** e si indica con i_c .

$$\sigma_z^I = 0$$

$$\gamma z - \gamma_w (1 + i) z = 0$$

$$\gamma = \gamma_w (1 + i)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_w} = 1 + i$$

$$i_c = \frac{\gamma}{\gamma_w} - 1 \quad \text{oppure come abbiamo visto in precedenza} \quad i_c = \frac{\gamma - \gamma_w}{\gamma_w}$$

L'effetto visibile di questo fenomeno è la sabbia che ribolle.

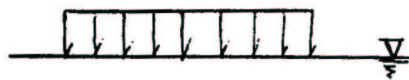
Moti di filtrazione in regime transitorio

Questi tipi di moti sono quelli per cui esistono dei meccanismi di evoluzione delle deformazioni; possono esistere due categorie di tali meccanismi, quelli dipendenti dalla variazione delle tensioni efficaci (a cui corrisponde una diffusione dell'acqua interstiziale) e quelli che avvengono con tensioni efficaci e pressione neutra costanti.

Nel primo caso questi fenomeni vengono denominati CONSOLIDAZIONE o RIGONFIAMENTO (dipendente dalla variazione di volume), mentre nel secondo caso assumono la denominazione di FENOMENI DI CREEP.

Nel processo di consolidazione la sua evoluzione nel tempo dipende dalle proprietà del mezzo poroso (permeabilità e deformabilità) e dalle condizioni al contorno del problema.

Vediamo di capire questo problema mediante un esempio:



$$u_0 + \Delta u$$

Fig. 37

Se viene applicato un carico sul terreno allora si genera un incremento delle pressioni interstiziali. Tale incremento dello stato tensionale dell'acqua varia da punto a punto e ad una distanza sufficientemente grande le sovrappressioni sono nulle. In questo modo può nascere un moto di filtrazione allo scopo di dissipare le sovrappressioni. La durata di questo moto dipende dalla permeabilità e dalla deformabilità del terreno: in un terreno sabbioso l'evoluzione del processo è molto veloce, mentre in un terreno argilloso tale processo è molto più lento. Tutto questo porta a dire che la resistenza del terreno a seguito dell'applicazione del carico varia nel tempo, infatti quando viene caricato le sovrappressioni vengono assorbite in parte dallo scheletro solido ed in parte dal campo fluido, mentre alla fine del processo la sovrappressione interstiziale è nulla e tutto il carico viene assorbito dallo scheletro solido sotto forma di tensioni efficaci.

Il comportamento meccanico del materiale dipende dalle interazioni che si trasmettono i granelli di materiale. Avevamo visto che il problema della deformazione è governato dall'equazione di continuità:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Questa è l'equazione di continuità nel caso di schematizzazione monodimensionale.

Vedi il paragrafo "I moti di filtrazione: effetti di natura meccanica".

A questo punto è necessario esplicitare entrambi i membri dell'equazione di continuità in funzione delle caratteristiche del terreno.

La velocità può essere espressa in funzione della quota piezometrica attraverso il coefficiente di permeabilità.

$$v = -k \frac{dh}{dz}$$

il segno meno compare perché l'asse z è stato scelto in direzione della quota piezometrica decrescente.

Supponiamo che il mezzo sia omogeneo e quindi possiamo adottare un valore di k costante, per cui:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{d}{dz} \left(-k \frac{dh}{dz} \right) = -k \frac{d^2 h}{dz^2}$$

Ricordiamo la definizione di quota piezometrica: $h = z + \frac{u}{\gamma_w}$

quindi
$$\frac{d^2 h}{dz^2} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{d^2 u}{dz^2}$$

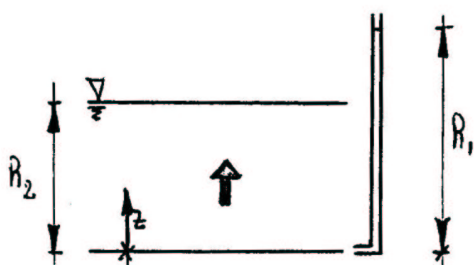


Fig. 38

da cui si ottiene che: $\frac{dv}{dz} = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{d^2 u}{dz^2}$

Per poter esplicitare il secondo membro dell'equazione di continuità è necessario andare ad analizzare le caratteristiche deformative del terreno.

Per un terreno possono essere messi in evidenza diversi contributi che intervengono a definire la deformazione; tali contributi sono dati da:

- deformazione volumetrica del fluido
- deformazione volumetrica dei granelli
- deformazione dovuta all'assestamento dei grani.

Se viene fatto un confronto tra queste diverse aliquote di deformazione allora si può dire che quelle relative alla deformabilità del fluido e dei granelli risulta trascurabile rispetto al contributo dovuto al riassetamento.

Possiamo quindi dire che una variazione di volume viene associata esclusivamente ad una variazione della porosità.

Sappiamo che le tensioni efficaci governano il comportamento dello scheletro solido, quindi una variazione di tensione efficace viene associata ad una variazione dello stato di deformazione.

Consideriamo il problema monodimensionale e quindi possiamo dire che:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0 & \quad \varepsilon_z \neq 0 \\ \varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z & \Rightarrow \varepsilon_v = \varepsilon_z \end{aligned}$$

il comportamento dello scheletro solido lo supponiamo di tipo elastico lineare, quindi se con **M** indichiamo il **MODULO DI COMPRESSIONE** in condizioni di comportamento monodimensionale allora possiamo scrivere che:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d\sigma^I}{dt}$$

Una **CONDIZIONE DI COMPRESSIONE MONODIMENSIONALE** è definita **CONDIZIONE DI COMPRESSIONE EDOMETRICA**.

Se ricordiamo la definizione di tensione efficace:

$$\sigma^I = \sigma - u$$

allora si può dire che:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{M} \left(\frac{d\sigma}{dt} - \frac{du}{dt} \right)$$

A questo punto è possibile andare a sostituire all'interno dell'equazione di continuità

$$-\frac{k}{\gamma_w} \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{1}{M} \left(\frac{d\sigma}{dt} - \frac{du}{dt} \right)$$

Viene fatta la seguente ipotesi: si suppone di applicare un carico sul piano di campagna e di mantenere tale carico costante nel tempo. Questo significa che lo stato tensionale totale rimane costante nel tempo a partire dall'istante di applicazione del carico, cioè possiamo dire che:

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0$$

per cui l'equazione diventa:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\gamma_w} \frac{d^2 u}{dz^2} &= \frac{1}{M} \frac{du}{dt} \\ \frac{kM}{\gamma_w} \frac{d^2 u}{dz^2} &= \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

Quest'ultima è l'equazione della consolidazione di Terzaghi; si evidenzia che: $c_v = \frac{kM}{\gamma_w}$

c_v è definito **COEFFICIENTE DI CONSOLIDAZIONE**.

Il fenomeno della consolidazione dei terreni può essere schematizzato mediante una analogia meccanica. Prendiamo un recipiente pieno d'acqua all'interno del quale sia presente un pistone collegato al fondo mediante una molla. Sul pistone è praticato un piccolo forellino che permette la fuoriuscita dell'acqua.

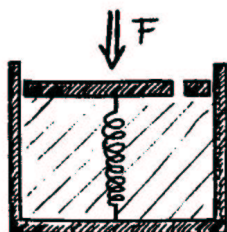


Fig. 39

La molla in questo sistema meccanico rappresenta la comprimibilità del terreno, mentre il forellino praticato nel pistone ha lo scopo di rappresentare l'effetto dissipativo dell'acqua all'interno dei granelli di sabbia, tale fenomeno è governato dalla legge di Darcy.

Nell'istante in cui viene applicato il carico l'acqua ha difficoltà ad uscire dal foro per un problema di resistenza al moto questo significa che istantaneamente il pistone non è in grado di muoversi, per cui tutto il carico applicato deve scaricarsi sul campo fluido, e la molla rimane scarica.

$$t=0 \quad w=0 \quad \sigma^I=0 \quad u=\sigma \quad \text{dove} \quad \sigma = \frac{F}{A}$$

Negli istanti di tempo successivi l'acqua è sottoposta ad una differenza di pressione tra l'interno e l'esterno e quindi tende a defluire attraverso il foro (si instaura in questo modo l'analogo del moto di filtrazione dei terreni).

Questo moto dell'acqua permette il movimento del pistone e quindi il carico applicato scarica un'aliquota anche sulla molla; tutto il processo avanza fino a quando il carico totale è completamente assorbito dalla molla e la sovratensione nell'acqua è nulla.

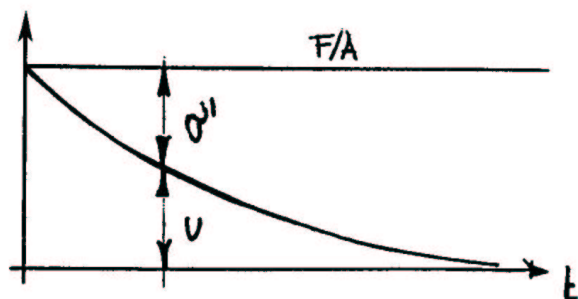


Fig. 40

La consolidazione di un terreno dipende dai due coefficienti k e M entrambi questi valori intervengono sulla velocità del processo.

Anche il peso specifico dell'acqua γ_w interverrebbe nella definizione della velocità del fenomeno, ma questo è un parametro costante. Nell'analogia che abbiamo appena esposto il parametro k è rappresentato dal diametro del forellino mentre M è rappresentato dalla costante elastica della molla. All'aumentare di k cioè della permeabilità del terreno aumenta il diametro del foro quindi l'evoluzione del processo di consolidazione sarà via via più veloce.

Invece all'aumentare del modulo di compressione M del terreno aumenta la rigidità della molla e quindi è necessario uno

spostamento w inferiore per arrivare al valore del carico applicato. Questo significa che deve essere espulso un quantitativo di acqua minore per poter far assorbire tutto il carico allo scheletro solido e quindi il processo di consolidamento sarà più veloce.

Per poter introdurre la variabilità rispetto a z delle caratteristiche meccaniche del terreno è possibile fare affidamento ad un sistema di pistoni direttamente collegati tra loro.

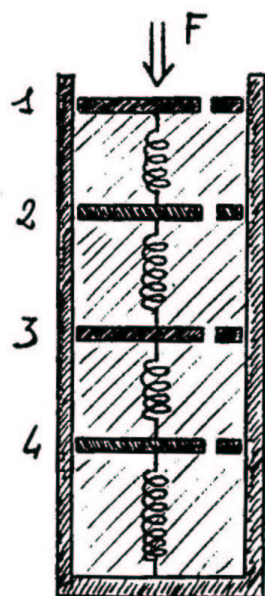


Fig. 41

All'istante $t=0$, momento in cui viene applicato il carico, questo viene completamente assorbito dalla fase liquida e quindi il sistema non subisce alcun movimento. In questo istante di tempo esiste comunque una differenza di pressione; tale gradiente si verifica solamente in corrispondenza del 1° pistone. Il moto di filtrazione si attiva quindi per primo in corrispondenza del primo pistone. Quando questo ha subito i primi cedimenti diminuisce la pressione dell'acqua nel 1° vano e contemporaneamente attraverso la molla una quota di carico viene trasferita al secondo pistone; questo effetto induce una differenza di pressione a cavallo del secondo pistone e quindi si instaura un nuovo moto di filtrazione. Il procedimento continua in questo modo fino a raggiungere l'ultimo elemento in fondo alla serie; si può osservare che il trasferimento del carico sullo scheletro solido del terreno procede con un certo ritardo a partire dal bordo superiore verso il basso.

Figura 5.16

Adimensionalizzazione dell'equazione di Terzaghi

$$\frac{kM}{\gamma_w} \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{du}{dt} \quad c_v = \frac{kM}{\gamma_w}$$

Dimensionalmente il coefficiente di consolidazione può essere scritto come $[L]^2/[t]$.

Scegliendo una dimensione di riferimento H in modo tale da definire una coordinata adimensionale:

$$Z = \frac{z}{H}$$

sostituendo e differenziando otteniamo che la derivata seconda¹ diventa:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{d^2 u}{H^2 dZ^2}$$

e quindi sostituendo nell'equazione di Terzaghi è possibile scrivere che:

$$\frac{c_v}{H^2} \frac{d^2 u}{dZ^2} = \frac{du}{dt}$$

Il parametro c_v/H^2 ha la dimensione di un $[t]^{-1}$ quindi se moltiplichiamo il tempo t per tale parametro si ottiene una definizione adimensionale del tempo:

$$T = \frac{c_v t}{H^2} \quad dt = \frac{H^2}{c_v} dT$$

per cui possiamo sostituire nell'equazione di Terzaghi:

$$\frac{c_v}{H^2} \frac{d^2 u}{dZ^2} = \frac{du}{\frac{H^2}{c_v} dT} \quad \Rightarrow \quad \frac{c_v}{H^2} \frac{d^2 u}{dZ^2} = \frac{c_v}{H^2} \frac{du}{dT}$$

$$\frac{d^2 u}{dZ^2} = \frac{du}{dT}$$

equazione di Terzaghi in forma adimensionale.

Con questa equazione in forma adimensionale, una volta assegnate le condizioni al contorno la soluzione del problema in termini di variabili adimensionali è identica indipendentemente dal tipo di materiale.

¹ Nella pagina successiva ci sono i passaggi della sostituzione di $Z=z/H$ nella derivata seconda di u rispetto a z .

OSSERVAZIONE sulla sostituzione di variabile nella adimensionalizzazione dell'equazione di Terzaghi:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dz} &= \lim_{z_2 \rightarrow z_1} \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1} = \lim_{HZ_2 \rightarrow HZ_1} \frac{u_2 - u_1}{HZ_2 - HZ_1} = \lim_{HZ_2 \rightarrow HZ_1} \frac{u_2 - u_1}{H(Z_2 - Z_1)} = \\ &= \frac{1}{H} \lim_{H(Z_2 - Z_1) \rightarrow 0} \frac{u_2 - u_1}{(Z_2 - Z_1)} = \frac{du}{H dZ}\end{aligned}$$

derivando nuovamente:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{dz^2} &= \lim_{z_2 \rightarrow z_1} \frac{\left(\frac{du}{H dZ}\right)_2 - \left(\frac{du}{H dZ}\right)_1}{z_2 - z_1} = \lim_{HZ_2 \rightarrow HZ_1} \frac{\left(\frac{du}{H dZ}\right)_2 - \left(\frac{du}{H dZ}\right)_1}{HZ_2 - HZ_1} = \\ &= \lim_{HZ_2 \rightarrow HZ_1} \frac{\frac{1}{H} \left[\left(\frac{du}{dZ}\right)_2 - \left(\frac{du}{dZ}\right)_1 \right]}{H(Z_2 - Z_1)} = \frac{1}{H^2} \lim_{H(Z_2 - Z_1) \rightarrow 0} \frac{\left[\left(\frac{du}{dZ}\right)_2 - \left(\frac{du}{dZ}\right)_1 \right]}{Z_2 - Z_1} = \\ &= \frac{d^2 u}{H^2 dZ^2}\end{aligned}$$

Soluzione dell'equazione della consolidazione di Terzaghi

Per chi fosse incuriosito dall'equazione della consolidazione monodimensionale studiata da Terzaghi nel 1923, per piccoli spessori, ma che poi utilizziamo anche per spessori non piccoli, di seguito riporto la soluzione in serie e alcuni grafici. Vedremo il concetto di sovrappressione interstiziale da non confondere con la pressione interstiziale o pressione neutra presente nel banco di terreno prima e dopo il processo di consolidazione. Introduciamo il grado di consolidazione puntuale-temporale o locale e il grado di consolidazione medio. Verranno ripresi e chiariti anche più avanti negli Appunti di Geotecnica. Si tratta di nozioni che risulteranno molto utili negli esercizi.

Soluzione dell'equazione di Terzaghi con lo sviluppo in serie²:

$$u_e = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2u_0}{M} (\sin MZ) e^{-M^2 T_v} \quad M = \frac{\pi}{2}(2m+1) \quad T = T_v = \frac{C_v t}{H^2} \quad Z = \frac{z}{H_{dr}}$$

u_e è la sovrappressione interstiziale al tempo T in posizione Z rispetto al valore iniziale dell'eccesso di pressione u_0 .

$$u_e = u(Z, T)$$

Può essere utile scrivere lo sviluppo in questo modo:

$$u_e = u_0 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} (\sin MZ) e^{-M^2 T_v}$$

Anche riscritta così è utile:

$$\frac{u_e}{u_0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} (\sin MZ) e^{-M^2 T_v}$$

Questo sviluppo in serie può essere rappresentato in due grafici, dove uno dei tre elementi variabili funziona da parametro. Si può anche utilizzare lo sviluppo in serie di Fourier impiegando il coseno come funzione trigonometrica, ed essendo una funzione pari si presta alla descrizione del fenomeno dall'asse di simmetria del problema ad esempio dal centro del banco di terreno che sta consolidando. Con lo sviluppo che utilizza la funzione seno ci si posiziona su un lato del banco di terreno.

2 Renato Lancellotta, *Geotecnica*, Zanichelli Editore, Bologna 1993, pp. 145–150.

Cesare Bonaccina–Alberto Cavallini–Lino Mattarolo, *Trasmissione del calore*, Cleup editore, Padova 1989, pp. 120–127. Vi è spiegato come sviluppare in serie e si capisce come disegnare l'equazione di Fourier.

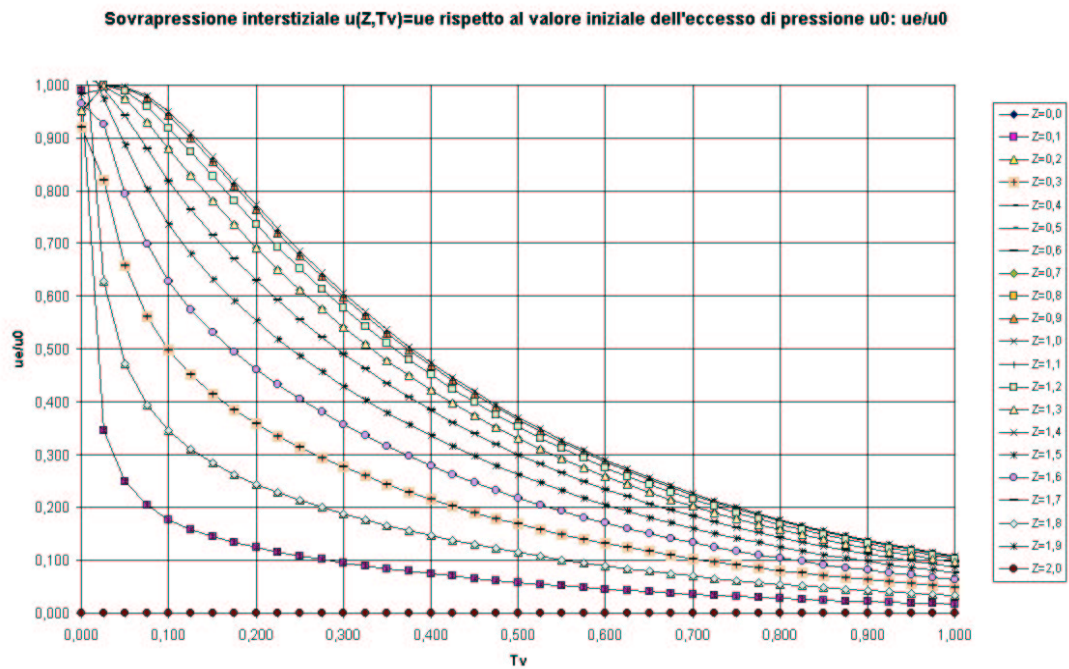


Figura 5.17

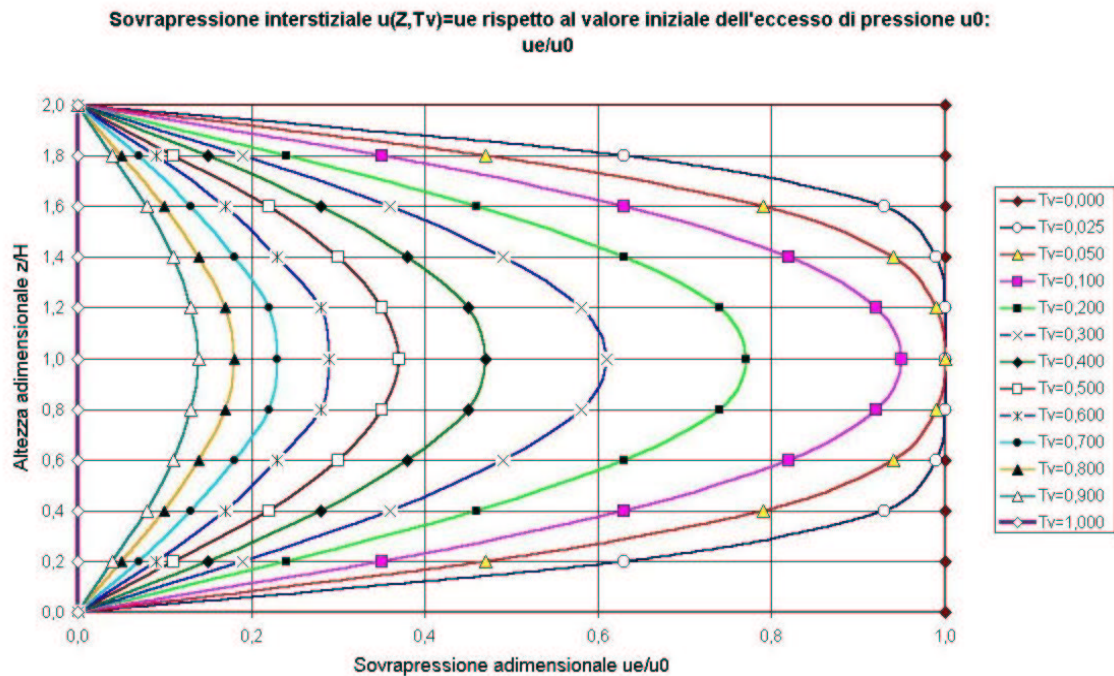


Figura 5.18

Il **GRADO DI CONSOLIDAZIONE** (puntuale-temporale o locale) U_z , da non confondere con quello medio U_m :

$$U_z = \frac{u_0 - u_e}{u_0} = 1 - \frac{u_e}{u_0} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} (\sin MZ) e^{-M^2 T_v}$$

Questo grado di consolidazione “puntuale-temporale o locale” sviluppato in serie è rappresentata nel grafico che segue.

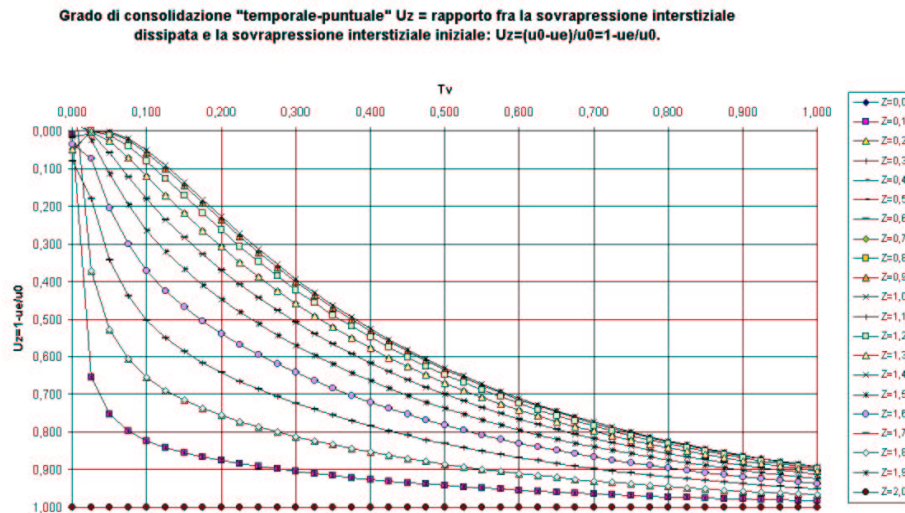


Figura 5.19

Il **GRADO DI CONSOLIDAZIONE MEDIO** U_m :

$$U_m = \frac{\Delta H(t)}{\Delta H_{fin}}$$

Il grado di consolidazione medio U_m con lo sviluppo in serie³:

$$U_m = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} \cdot e^{-M^2 T_v} \quad M = \frac{\pi}{2} (2m+1) \quad T = T_v = \frac{C_v t}{H_{dr}^2}$$

I percorsi di drenaggio, tratti dalla teoria della consolidazione di Terzaghi per campioni di piccolo spessore, sono:

Drenaggio su un due lati: $H_{dr} = \frac{H}{2}$

Drenaggio su un solo lato: $H_{dr} = H$

Per grandi spessori serve un aggiustamento, il Lancellotta⁴ propone una media:

$$H_{dr} = \frac{2H_{t=\infty, \text{ fine consolidazione}} + 2H_{t=0, \text{ inizio consolidazione}}}{4}$$

³ Renato Lancellotta, *Geotecnica*, Zanichelli Editore, Bologna 1993, p. 148.

⁴ Renato Lancellotta, *Geotecnica*, Zanichelli Editore, Bologna 1993, p. 152.

Il grado di consolidazione medio sviluppato in serie è rappresentato sia in forma di grafico che di tabella.

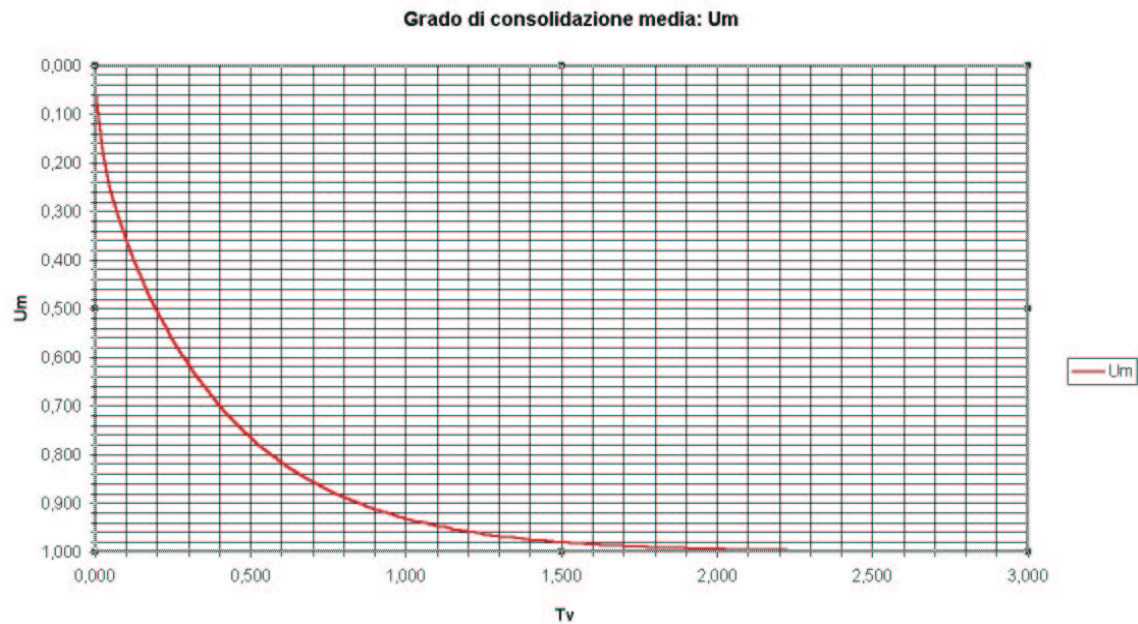


Figura 5.20

Tv	Um	Tv	Um	Tv	Um	Tv	Um
0,000	0,033696292	0,750	0,872618533	1,475	0,978708234	2,225	0,996653987
0,025	0,178412557	0,775	0,880238625	1,500	0,979981929	2,250	0,996854149
0,050	0,252313252	0,800	0,887402875	1,525	0,981179431	2,275	0,997042337
0,075	0,309019328	0,825	0,894138551	1,550	0,982305297	2,300	0,997219267
0,100	0,356823400	0,850	0,900471293	1,575	0,983363812	2,325	0,997385613
0,125	0,398927990	0,875	0,906425203	1,600	0,984359006	2,350	0,997542009
0,150	0,436949960	0,900	0,912022943	1,625	0,985294666	2,375	0,997689048
0,175	0,471813783	0,925	0,917285821	1,650	0,986174355	2,400	0,997827292
0,200	0,504087820	0,950	0,922233869	1,675	0,987001419	2,425	0,997957265
0,225	0,534142432	0,975	0,926885919	1,700	0,987779007	2,450	0,998079464
0,250	0,562233542	1,000	0,931259678	1,725	0,988510080	2,475	0,998194352
0,275	0,588549188	1,025	0,935371795	1,750	0,989197419	2,500	0,998302368
0,300	0,613236071	1,050	0,939237921	1,775	0,989843640	2,525	0,998403922
0,325	0,636414857	1,075	0,942872771	1,800	0,990451204	2,550	0,998499401
0,350	0,658189100	1,100	0,946290181	1,825	0,991022423	2,575	0,998589169
0,375	0,678650472	1,125	0,949503157	1,850	0,991559471	2,600	0,998673566
0,400	0,697881906	1,129	0,949999078	1,875	0,992064392	2,625	0,998752915
0,425	0,715959499	1,150	0,952523931	1,900	0,992539108	2,650	0,998827517
0,450	0,732953721	1,175	0,955363998	1,925	0,992985426	2,675	0,998897656
0,475	0,748930212	1,200	0,958034169	1,950	0,993405045	2,700	0,998963599
0,500	0,763950331	1,225	0,960544609	1,975	0,993799562	2,725	0,999025598
0,525	0,778071562	1,250	0,962904871	2,000	0,994170479	2,750	0,999083887
0,550	0,791347834	1,275	0,965123940	2,025	0,994519207	2,775	0,999138690
0,575	0,803829785	1,300	0,967210261	2,050	0,994847074	2,800	0,999190215
0,600	0,815564984	1,325	0,969171777	2,075	0,995155327	2,825	0,999238657
0,625	0,826598130	1,350	0,971015953	2,100	0,995445140	2,850	0,999284201
0,650	0,836971239	1,375	0,972749809	2,125	0,995717617	2,875	0,999327021
0,675	0,846723805	1,400	0,974379943	2,150	0,995973793	2,900	0,999367279
0,700	0,855892955	1,425	0,975912561	2,175	0,996214645	2,925	0,999405129
0,725	0,864513593	1,450	0,977353497	2,200	0,996441089		

Figura 5.21

(Pagina intenzionalmente lasciata bianca)