

CAPITOLO 21: STABILITÀ DEI PENDII

Introduzione

Una **FRANA** avviene quando c'è l'instabilità di un pendio.

In questo capitolo tratteremo delle verifiche di stabilità dei pendii. Il capitolo si sviluppa chiarendo vari aspetti dell'argomento, in modo da permettere la più completa comprensione delle problematiche trattate.

Inizieremo trattando il modello elementare del singolo blocco su di un piano inclinato, il quale può essere soggetto a scivolamento o a ribaltamento. Vedremo anche il contributo dell'acqua al scivolamento.

Proseguiremo con due pendii realizzati per costruire delle opere, questi presentano delle caratteristiche che mutano nel tempo, vedremo queste variazioni.

In seguito presenteremo le tecniche che permettono di eseguire l'analisi di stabilità: il metodo dell'equilibrio limite globale a cui seguiranno i due metodi generali, che prevedono di dividere verticalmente la zolla di rottura in blocchi, tali metodi vanno sotto il nome di metodo di Fellenius e metodo di Bishop.

Noi siamo partiti da dei pendii artificiali, ma tutto quanto è applicabile ai pendii naturali.

Ora introdurremo un modello elementare che ci servirà per applicare i due metodi di analisi della stabilità che seguiranno.

Si può assumere come schema elementare quello di un blocco su di un piano inclinato.

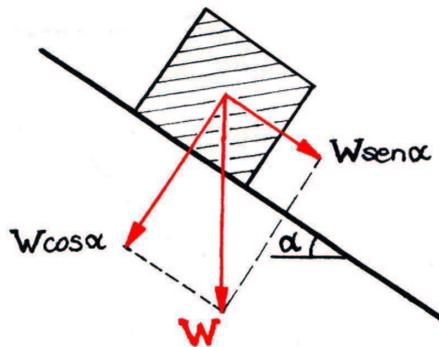


Figura 21.1

Ci sono due possibili condizioni limite di rottura:

1. **Scivolamento del blocco** per rottura al taglio lungo un piano.
2. **Ribaltamento del blocco** nel caso di pendii con roccia.

Scivolamento del blocco.

La condizione di equilibrio deve valere anche in condizioni di rottura.

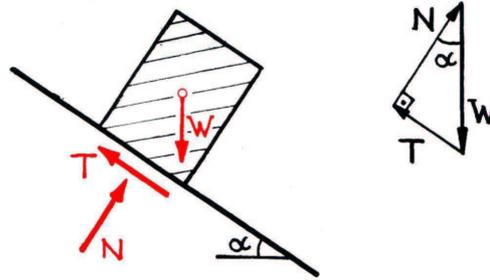


Figura 21.2

Applicandola allo schema elementare del blocco sul piano inclinato si ottiene:

$$\begin{cases} T = W \sin(\alpha) \\ N = W \cos(\alpha) \end{cases}$$

La condizione di rottura si ha quando le τ raggiungono il valore ultimo sulla superficie di scivolamento:

$$\tau_F = c' + (\sigma - u) \tan \phi'$$

$$T_F = \int_B \tau_F dl = \int_B c' dl + \int_B (\sigma - u) \tan \phi' dl$$

$$T_F = c' B + (N - U) \tan \phi'$$

Dove U rappresenta la spinta dell'acqua sulla superficie.

Calcoliamoci ora il coefficiente di sicurezza nei riguardi del scivolamento:

$$\eta = \frac{T_F}{T} = \frac{c' B + (N - U) \tan \phi'}{W \sin(\alpha)} = \frac{c' B + [W \cos(\alpha) - U] \tan \phi'}{W \sin(\alpha)}$$

Ora per:

$$\begin{cases} c' = 0 \\ U = 0 \end{cases}$$

$$\eta = \frac{T_F}{T} = \frac{N \tan \phi'}{W \sin(\alpha)} = \frac{W \cos(\alpha) \tan \phi'}{W \sin(\alpha)} = \frac{\tan \phi'}{\tan \alpha}$$

Siamo passati da:

$$\tau_F = \sigma \tan \phi'$$

alla:

$$T_F = N \tan \phi'$$

Effetto dell'acqua sullo scivolamento.

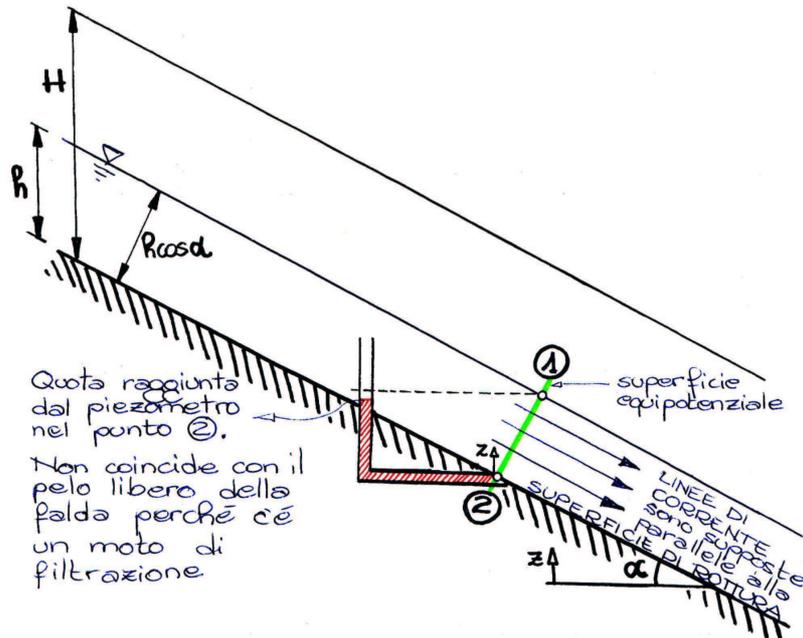


Figura 21.3

Consideriamo i punti 1 e 2:

$$\begin{cases} h_1 = \frac{u_1}{\gamma_w} + z_1 \\ h_2 = \frac{u_2}{\gamma_w} + z_2 \end{cases}$$

Notiamo che sia h_1 che h_2 sono sulla stessa superficie equipotenziale, da cui:

$$h_1 = h_2$$

Ma essendo il punto 1 sul pelo libero della falda:

$$u_1 = 0$$

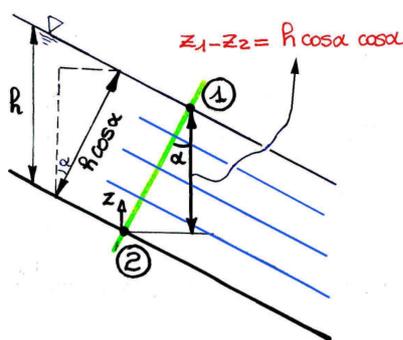
Eguagliando le due espressioni dell'altezza piezometrica:

$$h_1 = h_2$$

$$\frac{u_1}{\gamma_w} + z_1 = \frac{u_2}{\gamma_w} + z_2$$

$$z_1 = \frac{u_2}{\gamma_w} + z_2$$

$$u_2 = \gamma_w (z_1 - z_2)$$



La pressione u_2 è la pressione dell'acqua in corrispondenza della superficie di rottura.

Osservando il disegno di dettaglio si può trovare che la distanza tra i punti 1 e 2 è data da:

$$\overline{1-2} = h \cos(\alpha)$$

Riferendoci alla verticale:

$$(z_1 - z_2) = h \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

Sostituendo nell'espressione di u_2 si ottiene:

$$u_2 = \gamma_w h \cos^2(\alpha)$$

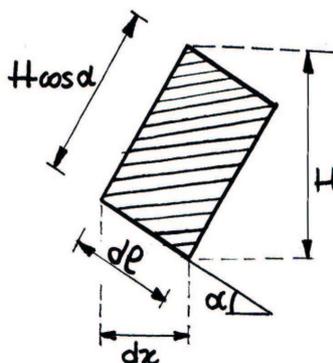
Figura 21.4

Ora se nell'espressione di T_F trovata nel paragrafo precedente:

$$T_F = c^I B + (N - U) \tan \phi^I$$

Assumiamo che:

$$c^I = 0$$



E per quanto riguarda il peso del blocco elementare in figura:

$$dW = \gamma H \cos(\alpha) dl = \gamma H dx$$

Allora otteniamo le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} T_F = (N - U) \tan \phi^I \\ T = W \sin(\alpha) = \gamma H \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ N = W \cos(\alpha) = \gamma H \cos(\alpha) \cos(\alpha) \end{cases}$$

Figura 21.5

Ricalcoliamo ora il coefficiente di sicurezza con riguardo al scivolamento in presenza d'acqua:

$$\begin{aligned} \eta = \frac{T_F}{T} &= \frac{(N - U) \tan \phi^I}{W \sin(\alpha)} = \frac{[\gamma H \cos(\alpha) - \gamma_w h \cos^2(\alpha)] \tan \phi^I}{\gamma H \cos(\alpha) \sin(\alpha)} = \\ &= \frac{\tan(\phi^I)}{\tan(\alpha)} - \frac{\gamma_w h \tan(\phi^I)}{\gamma H \tan(\alpha)} = \left(1 - \frac{\gamma_w h}{\gamma H}\right) \frac{\tan(\phi^I)}{\tan(\alpha)} = \end{aligned}$$

Se $h=H$ cioè se il pelo libero della falda coincide con il piano di campagna "p.c.":

$$\eta = \frac{\gamma^I \tan(\phi^I)}{\gamma \tan(\alpha)}$$

Se $h=0$ allora:

$$\eta = \frac{\tan(\phi^I)}{\tan(\alpha)}$$

Se $h=H$ allora:

$$\eta = \left(1 - \frac{\gamma_w}{\gamma}\right) \frac{\tan(\phi^I)}{\tan(\alpha)} \approx \frac{1}{2} \frac{\tan(\phi^I)}{\tan(\alpha)}$$

Quindi l'innalzamento della falda all'interno del terreno porta ad una diminuzione della stabilità del pendio e a un dimezzamento del coefficiente di sicurezza η .

Ribaltamento del blocco.

Il ribaltamento si ha quando la risultante della forza peso esce dalla base dell'elemento considerato.

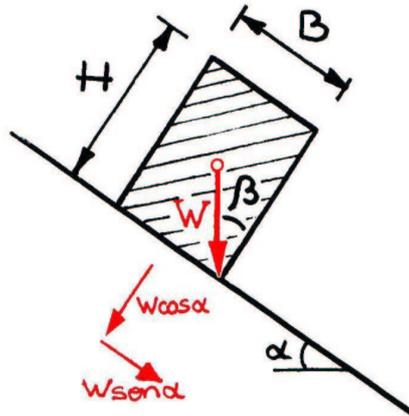


Figura 21.6

Situazione limite:

$$\tan(\beta) = \frac{B}{H}$$

Il coefficiente di sicurezza a ribaltamento:

$$\eta_{RIB} = \frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)} = \frac{\text{Momento Stabilizzante}}{\text{Momento Ribaltante}} = \frac{W \cos(\alpha) \frac{B}{2}}{W \sin(\alpha) \frac{H}{2}} = \frac{B}{H \tan(\alpha)}$$

L'acqua peggiora la situazione.

Le caratteristiche dei pendii nel tempo: due casi di studio.

Le condizioni di stabilità di un pendio possono variare nel tempo.

Esempio A.

Supponiamo di realizzare uno scavo e vediamo come variano nel tempo le condizioni di carico nel terreno. Suppongo che vi sia un materiale a grana fine e in condizioni non drenate.

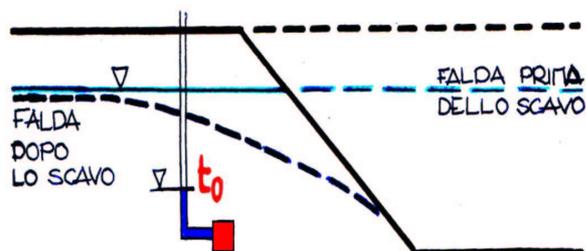


Fig. 4000

Figura 21.7

Prendo un elementino e vedo cosa succede:

$$\Delta u = B \left(\Delta \sigma_3 + A \left(\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3 \right) \right)$$

Tale elemento è sottoposto allo scarico e si ha per una riduzione delle pressioni neutre, cala il livello della falda.

Trascorso del tempo, da quando ho eseguito lo scavo, il piezometro indica una pressione neutra molto minore. Per questo c'è voluto un tempo t_0 .

Le pressioni neutre dopo lo scavo non sono più in equilibrio idraulico e pertanto il pelo libero della falda assumerà una diversa configurazione di equilibrio. È indicata in figura con un tratteggio.

L'andamento delle pressioni neutre nel tempo:

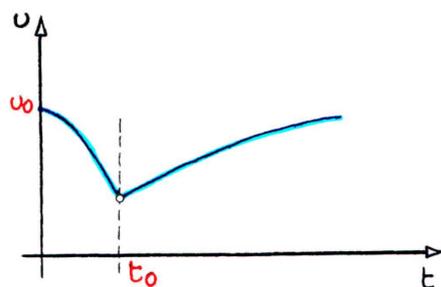


Fig. 4001

Per i pendii definiamo il

COEFFICIENTE DI SICUREZZA: $\eta = \frac{\tau_{DISPONIBILE}}{\tau_{MOBILITATA}}$

Con $\tau_{DISPONIBILE}$ ci riferiamo alla resistenza al taglio del materiale. Da questo scriviamo che:

$$\eta = \frac{c^I + (\sigma - u) \tan \phi^I}{\tau}$$

Possiamo disegnare l'andamento del coefficiente di sicurezza η nel tempo.

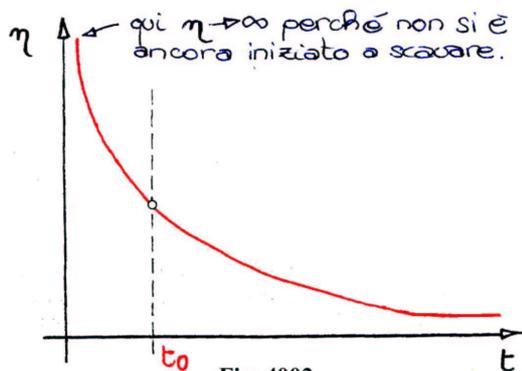


Fig. 4002

Esempio B.

Supponiamo di costruire un rilevato.

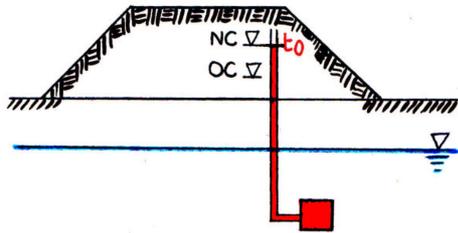


Fig. 4003

Figura 21.8

In questo caso le variazioni di pressioni neutre sono positive e di una quantità tanto maggiore quanto maggiore è il valore di A (Skempton).

Riportiamo il grafico (u, t) .

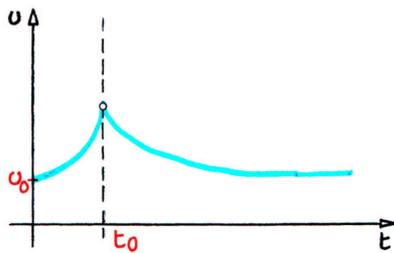


Fig. 4004

Dopo il tempo t_0 inizia il fenomeno della consolidazione che porta al valore di u iniziale.

Figura 21.9

Possiamo disegnare l'andamento del coefficiente di sicurezza η nel tempo.

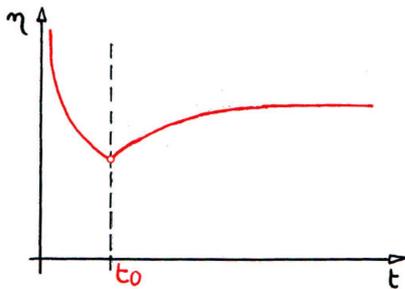


Fig. 4005

Le condizioni più gravose si hanno nel momento di applicazione del carico, in altre parole appena costruito il rilevato.

Figura 21.10

Questi pendii ottenuti artificialmente vanno studiati.
Passiamo alle tecniche di analisi dell'instabilità dei pendii.

Introduciamo i metodi per il calcolo delle condizioni di rottura e dei relativi coefficienti di sicurezza evidenziando che i problemi geotecnici vanno valutati in due situazioni: a breve termine (cioè in condizioni non drenate) e a lungo termine (cioè in condizioni drenate).

In entrambe le situazioni può essere calcolato il valore del rapporto fra la massima tensione tangenziale τ_F che può essere esercitata su una superficie in condizioni di rottura e la tensione tangenziale τ che effettivamente risulta essere applicata.

Questo rapporto è il **COEFFICIENTE DI SICUREZZA**:
$$\eta = \frac{\tau_F}{\tau}$$

In condizioni drenate: $\tau_F = c^I + (\sigma - u) \tan \phi^I$

Invertendo:
$$\eta = \frac{\tau_F}{\tau}$$

E sostituendo:

$$\tau = \frac{\tau_F}{\eta} = \frac{c^I + (\sigma - u) \tan \phi^I}{\eta} = \frac{c^I}{\eta} + (\sigma - u) \frac{\tan \phi^I}{\eta}$$

In condizioni non drenate: $\tau_F = c_u + \sigma \tan \phi_u$

Per semplicità considero il terreno saturo, cioè con $S=1$.

Invertendo:
$$\eta = \frac{\tau_F}{\tau}$$

E sostituendo:

$$\tau = \frac{\tau_F}{\eta} = \frac{c_u + \sigma \tan \phi_u}{\eta} = \frac{c_u}{\eta} + \frac{\sigma \tan \phi_u}{\eta}$$

Con $\phi_u = 0$ ottengo che $\tau_F = c_u$ e dunque $\tau = \frac{c_u}{\eta}$

Metodo dell'equilibrio limite globale, (caso semplificato del metodo cinematico).

In condizioni non drenate: $\tau = c_u$

Stiamo considerando condizioni a breve termine.

Per semplicità considero il terreno saturo, cioè con $S=1$.

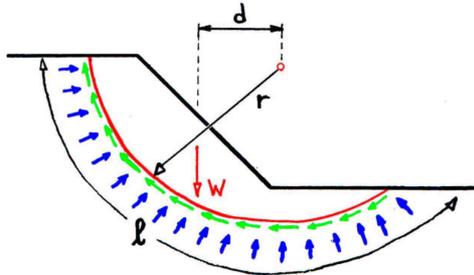


Fig. 4006

Figura 21.11

Viene considerato un tipo di rottura rotatoria di centro O e la superficie di rottura è circolare.

L'analisi delle condizioni di stabilità si può fare scrivendo l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto al punto O .

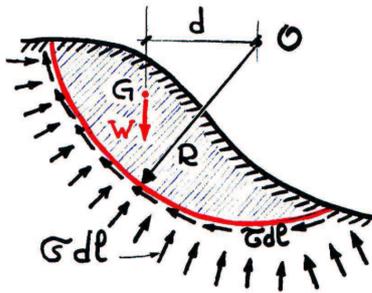


Fig. 4080

l = lunghezza della superficie di scorrimento

Figura 21.12

Le quantità che generano momento attorno al polo O :

1. W , il peso genera un momento antiorario ed ha un braccio d .
2. Le tensioni σdl non producono alcun momento rispetto ad O perché per l'ipotesi di superficie di rottura circolare sono dirette verso il punto O .
3. τdl generano attorno ad O un momento in senso orario ed hanno un braccio pari ad R .

Scrivendo l'equazione di equilibrio alla rotazione:

$$\int_l \tau dl \cdot R - W \cdot d = 0$$

In condizioni non drenate: $\tau_F = c_u$

Valutiamo la tensione realmente applicata:

$$\eta = \frac{\tau_F}{\tau} = \frac{c_u}{\tau}$$

c_u , R e η sono noti e costanti e possono essere estratti dall'integrale:

$$\int_l \frac{c_u}{\eta} R dl - W d = 0$$

Da cui otteniamo:

$$\frac{c_u}{\eta} R dl - W d = 0$$

Ricaviamo finalmente il coefficiente di sicurezza η :

$$\eta = \frac{c_u R l}{W d}$$

Il coefficiente di sicurezza η può essere ottenuto anche come rapporto tra il momento delle forze stabilizzanti (o forze resistenti) in condizioni di rottura ed il momento delle forze destabilizzanti.

$$\eta = \frac{\text{Momento delle forze stabilizzanti nelle condizioni di rottura}}{\text{Momento delle forze destabilizzanti}}$$

Possiamo osservare che la circonferenza è una forma cinematica ammissibile e quindi il coefficiente η di amplificazione delle tensioni, sarà un limite superiore e quindi quello reale sarà inferiore a quello che abbiamo appena determinato. Il vero coefficiente di sicurezza η potrà essere determinato come valore minimo tra tutti quelli ottenuti variando la posizione della superficie di rottura.

In condizioni drenate: $\tau = c' + \sigma' \tan \phi'$

Stiamo considerando condizioni a lungo termine.

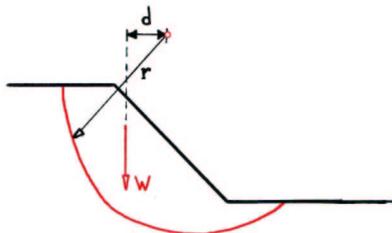


Figura 21.13

Viene considerato un tipo di rottura rotatoria e la superficie di rottura è una spirale logaritmica. L'equazione che la descrive è:

$$r = r_0 e^{\tan \beta (\theta - \theta_0)}$$

$$\tan \beta = \frac{\tan \phi'}{\eta} \quad \beta = \phi'_{\text{MOBILITATO}}$$

Se prendo un elementino di superficie di rottura dl :

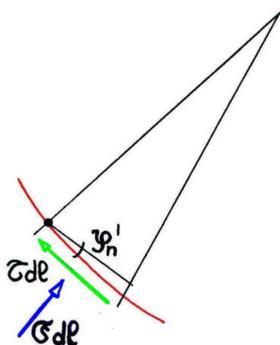


Figura 21.14

$$\eta = \frac{c' + (\sigma - u) \tan \phi'}{\tau}$$

$$\tau = \frac{c'}{\eta} + (\sigma - u) \frac{\tan \phi'}{\eta} =$$

$$= \left(\frac{c'}{\eta} - u \frac{\tan \phi'}{\eta} \right) + \sigma \frac{\tan \phi'}{\eta} = \tau_0 + \sigma \frac{\tan \phi'}{\eta}$$

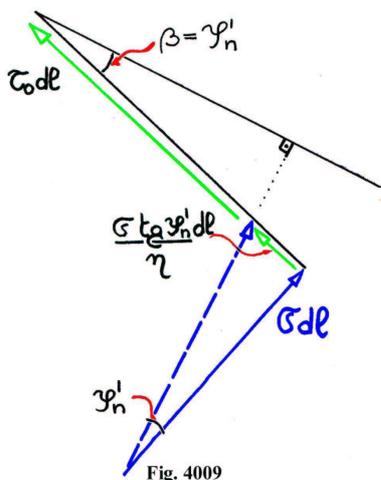


Figura 21.15

La forza trattenuta siccome passa per il polo della spirale logaritmica non produce momento.

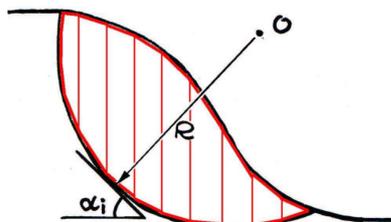
$$W \cdot d = \int_l \tau_0 r dl$$

Siccome la forza trattenuta non produce momento, allora per l'equilibrio alla rotazione, l'unico momento agente è quello della forza $\tau_0 dl$.

Il problema dell'equilibrio limite e i metodi generali di equilibrio limite.

Abbiamo già visto che la stabilità dei pendii può essere studiata ricorrendo al metodo dell'equilibrio limite globale e all'assunzione della spirale logaritmica, o della circonferenza, come superfici di scivolamento. La particolarità di queste superfici di scorrimento (o di rottura) è che si tratta di superfici di rottura cinematicamente ammissibili nel caso della presenza di un angolo di attrito.

Però, talvolta, è conveniente ricorrere a metodi più generali per lo studio della stabilità dei pendii: il metodo di Fellenius e il metodo di Bishop. Per entrambi si tratta di risolvere un problema di equilibrio limite.



SUPERFICIE DI SCORRIMENTO CIRCOLARE

Fig. 4090

Figura 21.16

Impostiamo innanzitutto il problema di equilibrio limite: suddividiamo il blocco di rottura, mettiamo in evidenza le forze che si scambiano i singoli blocchi, scriviamo le equazioni di equilibrio per un blocco e poi faremo un conteggio del numero di equazioni e di incognite che il problema propone. Al termine di tutto questo tratteremo i metodi di Fellenius e di Bishop e le semplificazioni che essi propongono per risolvere il problema di equilibrio limite.

Per risolvere il problema dell'equilibrio limite consideriamo una superficie di rottura (o di scivolamento) circolare.

Il blocco di rottura viene diviso in blocchi in direzione verticale.

Dividiamo la superficie in una serie di conci delimitati da superfici parallele e verticali.

Ad ogni blocco competono delle sollecitazioni le quali rappresentano delle incognite per il problema.

Per un blocco possiamo scrivere le equazioni di equilibrio alla rotazione e alla traslazione.

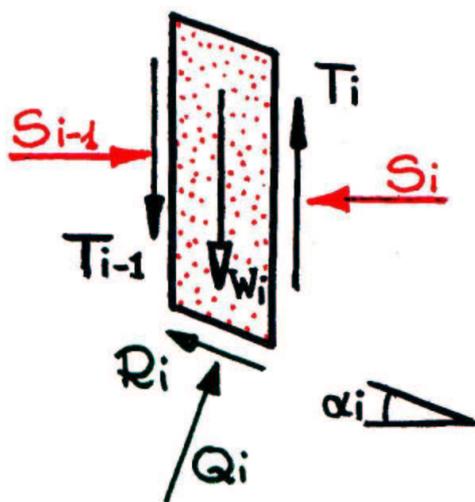


Fig. 4100

Figura 21.17

Equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$Q_i \sin \alpha_i - R_i \cos \alpha_i - S_i + S_{i-1} = 0$$

Equazione di equilibrio alla traslazione verticale:

$$-W_i + Q_i \cos \alpha_i + R_i \sin \alpha_i + T_i - T_{i-1} = 0$$

Ora abbiamo la condizione di rottura alla base inferiore dell'elemento. Scriviamo la relazione di Mohr-Coulomb con le forze, tenendo conto del coefficiente di sicurezza.

$$\eta R_i = c_i^l l_i + (Q_i - U_i) \tan \phi_i^l$$

Stiamo considerando una condizione di lungo termine cioè in condizioni drenate.

È possibile scrivere il coefficiente di sicurezza:

$$\eta = \frac{\tau_F}{\tau}$$

per ogni elemento, in termini di incognite del problema scriviamo:

$$\eta = \frac{c_i^l l_i + (Q_i - U_i) \tan \phi_i^l}{R_i}$$

Ora facciamo un conteggio delle incognite e delle equazioni del problema: consideriamo prima di tutto che abbiamo n blocchi. Le interfacce di scambio delle sollecitazioni del tipo S_i e T_i sono $(n-1)$.

Le reazioni che si generano lungo la superficie di rottura del terreno sono 2 per ogni elemento: nQ_i e nR_i .

Riassumendo:

Le incognite del problema sono:

$$\begin{array}{l} Q_i, R_i \\ S_i, T_i \\ \eta \end{array} \quad \begin{array}{l} 2n \\ 2(n-1) \\ \frac{1}{4n-1} \end{array}$$

Le equazioni del problema sono:

$$\begin{array}{l} \sum X_i=0 \\ \sum Y_i=0 \\ \eta R_i=\dots \end{array} \quad \begin{array}{l} n \\ n \\ \frac{n}{3n} \end{array}$$

Esiste un grado di indeterminazione pari a $(n-1)$, in altre parole il problema è $n-1$ volte indeterminato. Ci sono una ventina di metodi di equilibrio che introducono altre equazioni arbitrarie per ridurre l'indeterminazione. In genere danno tutti gli stessi risultati, tranne quello di Fellenius e quello di Young che danno valori più bassi; sono comunque utili per trovare il coefficiente di sicurezza, ma non sono utili per il progetto, che risulterebbe sovradimensionato.

Metodo di Fellenius.

L'ipotesi del metodo di Fellenius è che le forze tra un elemento e l'altro risultino nulle.

$$\begin{cases} S_i = 0 \\ T_i = 0 \end{cases}$$

Con queste ipotesi vengono ridotte le incognite e si introduce un grado di sovradeterminazione.

$$\begin{cases} R_i = W_i \sin \alpha_i \\ Q_i = W_i \cos \alpha_i \end{cases}$$

Il coefficiente di sicurezza viene adottato come il rapporto tra il momento delle forze stabilizzanti e quello delle forze destabilizzanti.

Le quantità Q_i non generano alcun momento.

Il momento stabilizzante sarà dato dal massimo valore delle forze taglianti che possono essere esercitate alla base di ogni elemento.

$$M_{\text{stabilizzante}} = \sum_{i=1}^N R_i \cdot R = \sum_{i=1}^N \left[c_i' l_i + (Q_i - U_i) \tan \phi_i' \right] R$$

Il momento delle forze destabilizzanti sarà dato dal momento generato dalle R_i che effettivamente agiscono alla base degli elementi.

$$M_{\text{destabilizzante}} = \sum_{i=1}^N R_i \cdot R = \sum_{i=1}^N W_i \sin \alpha_i R$$

Si ottiene il coefficiente di sicurezza η di tutto l'insieme:

$$\eta = \frac{M_{\text{stab}}}{M_{\text{dest}}} = \frac{\sum_{i=1}^N \left[c_i' l_i + (Q_i - U_i) \tan \phi_i' \right] R}{\sum_{i=1}^N W_i \sin \alpha_i R} = \frac{\sum_{i=1}^N \left[c_i' l_i + (Q_i - U_i) \tan \phi_i' \right]}{\sum_{i=1}^N W_i \sin \alpha_i}$$

In questo modo abbiamo determinato il coefficiente di sicurezza nel caso di una superficie di rottura circolare. Inseriamo il valore dell'incognita:

$$Q_i = W_i \cos \alpha_i$$

È un metodo che lavora a favore di sicurezza.

Metodo di Bishop.

Si tratta di un metodo più preciso del metodo di Fellenius.

Considera delle ipotesi meno restrittive per le azioni agenti all'interfaccia tra un elemento e l'altro.

Non vengono più trascurate le forze taglianti T_i , si ha che l'equilibrio alla traslazione verticale di un elemento può essere scritto così:

$$Q_i \cos \alpha_i + R_i \sin \alpha_i + (T_i - T_{i-1}) - W_i = 0$$

$$Q_i \cos \alpha_i + R_i \sin \alpha_i + (\Delta T_i) - W_i = 0$$

L'ipotesi del metodo di Bishop è che: $\Delta T_i = (T_i - T_{i-1}) = 0$

$$Q_i \cos \alpha_i + R_i \sin \alpha_i - W_i = 0$$

La relazione:

$$\eta = \frac{\tau_F}{\tau} = \frac{c'_i l_i + (Q_i - U_i) \tan \phi'_i}{R_i}$$

ci permette di determinare il valore della R_i esercitata alla base del blocco in funzione del valore massimo che essa può assumere:

$$R_i = \frac{c'_i l_i + (Q_i - U_i) \tan \phi'_i}{\eta}$$

e sostituendola nell'equazione di equilibrio:

$$Q_i \cos \alpha_i + \frac{c'_i l_i + (Q_i - U_i) \tan \phi'_i}{\eta} \sin \alpha_i - W_i = 0$$

Esplicitando Q_i :

$$Q_i = \frac{W_i - \left(\frac{c'_i l_i}{\eta} - \frac{U_i \tan \phi'_i}{\eta} \right) \sin \alpha_i}{\cos \alpha_i + \sin \alpha_i \frac{\tan \phi'_i}{\eta}}$$

E sostituendo nella:

$$\eta = \frac{M_{stab}}{M_{dest}} = \frac{\sum_{i=1}^N [c'_i l_i + (Q_i - U_i) \tan \phi'_i]}{\sum_{i=1}^N W_i \sin \alpha_i}$$

Otteniamo il coefficiente di sicurezza η .

OSSERVAZIONE:

Il coefficiente di sicurezza trovato con il metodo di Bishop ha un valore più alto di quello trovato con il metodo di Fellenius, ed è più realistico. $\eta_{FELLENIUS} < \eta_{BISHOP}$

L'espressione del coefficiente di sicurezza trovato con il metodo di Bishop è in forma implicita; l'equazione si risolve in con un processo iterativo, si può assumere come valore di primo tentativo il valore ottenuto con il metodo di Fellenius.

Riassunto.

Metodo di Fellenius.

Al solito le condizioni sotto le quali vengono valutati i problemi di geotecnica sono quello a breve termine (cioè in condizioni non drenate) e a lungo termine (cioè in condizioni drenate).

Il momento delle forze destabilizzanti sarà dato dal momento generato dalle R_i che effettivamente agiscono alla base degli elementi.

$$M_{dest} = \sum_{i=1}^N R_i r = \sum_{i=1}^N W_i \sin(\alpha_i) r$$

Il momento stabilizzante sarà dato dal massimo valore delle forze taglianti che possono essere esercitate alla base di ogni elemento.

$$M_{st} = \sum_{i=1}^N R_{if} r = \sum_{i=1}^N [c_i^l l_i + (Q_i - U_i) \tan(\varphi_i^l)] r$$

Quindi si ottiene che:

$$\eta = \frac{M_{st}}{M_{dest}} = \frac{\sum_{i=1}^N [c_i^l l_i + (Q_i - U_i) \tan(\varphi_i^l)]}{\sum_{i=1}^N W_i \sin(\alpha_i)}$$

In questo modo abbiamo determinato il coefficiente di sicurezza η nel caso di una superficie di rottura circolare. In questa relazione dobbiamo inserire il valore dell'incognita Q_i , ma con le ipotesi di Fellenius abbiamo scritto che:

$$Q_i = W_i \cos(\alpha_i)$$

Con il metodo di Fellenius viene determinato un valore del coefficiente η che risulta più basso di quello che si otterrebbe con metodi più accurati, questo significa che il metodo sopra esposto lavora a favore di sicurezza; quindi se con il metodo di Fellenius viene determinato un buon valore di η allora per lo studio della stabilità della struttura non sono necessari altre verifiche di stabilità.

Metodo di Bishop.

Per la verifica si stabilità viene impiegato anche un'altro metodo per la determinazione del coefficiente di sicurezza. Tale metodo va sotto il nome di Metodo di Bishop e considera delle ipotesi meno restrittive per le azioni agenti all'interfaccia tra un elemento e l'altro. Non vengono più trascurate le forze taglianti T_i e l'equilibrio alla traslazione verticale di un elemento può essere scritto come segue:

$$Q_i \cos(\alpha_i) + R_i \sin(\alpha_i) + T_i - T_{i-1} - W_i = 0$$

$$Q_i \cos(\alpha_i) + R_i \sin(\alpha_i) + \Delta T_i - W_i = 0$$

L'ipotesi di Bishop è quella di imporre $\Delta T_i = 0$, quindi:

$$Q_i \cos(\alpha_i) + R_i \sin(\alpha_i) - W_i = 0$$

La relazione:

$$\eta = \frac{c_i^l l_i + (Q_i - U_i) \tan(\varphi_i^l)}{R_i}$$

ci permette di determinare il valore della R_i esercitata alla base del blocco in funzione del valore massimo che essa può assumere relazionato attraverso il coefficiente di sicurezza η .

Esplicitando R_i :

$$R_i = \frac{c_i^l l_i + (Q_i - U_i) \tan(\varphi_i^l)}{\eta}$$

e quindi sostituendo nella relazione di equilibrio abbiamo che:

$$Q_i \cos(\alpha_i) + \frac{c_i' l_i' + (Q_i - U_i) \tan(\varphi_i')}{\eta} \sin(\alpha_i) - W_i = 0$$

Da questa equazione si può pensare di esplicitare il termine Q_i ; otteniamo che:

$$Q_i = \frac{W_i - \left[\frac{c_i' l_i'}{2} - \frac{U_i \tan(\varphi_i')}{2} \right] \sin(\alpha_i)}{\cos(\alpha_i) + \sin(\alpha_i) \frac{\tan(\varphi_i')}{\eta}}$$

Questo valore può essere sostituito nella precedente equazione per il calcolo del coefficiente di sicurezza η . Possiamo osservare che l'espressione trovata risulta più complicata della precedente dove si sostituiva semplicemente :

$$Q_i = W_i \cos(\alpha_i)$$

ma questa non è la sola complicazione, infatti Q_i è espresso in funzione di η coefficiente di sicurezza e quindi la sua determinazione non può essere fatta mediante una relazione esplicita, ma deve essere calcolato attraverso un processo iterativo. Il primo termine del processo iterativo può essere quello ottenuto con il metodo di Fellenius.

Questi metodi sono adatti nel caso il cui i calcoli sono eseguiti dagli elaboratori numerici.

Analisi di un problema reale.

Vediamo ora una superficie di rottura che non sia circolare allo scopo di fare le verifiche di stabilità. È necessario considerare almeno due blocchi:

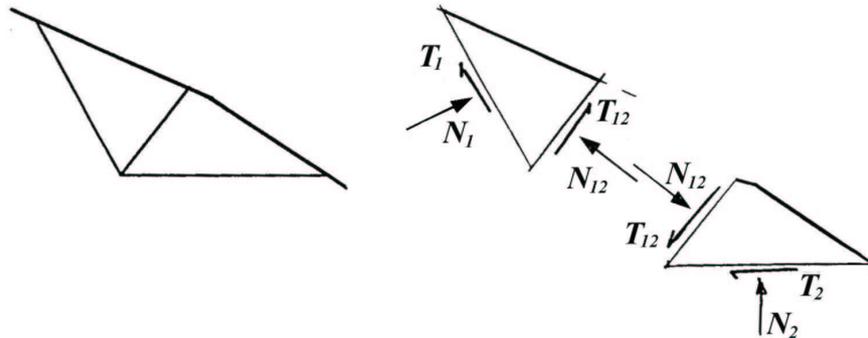


Figura 21.18

In questo caso le incognite del problema sono 7: 6 componenti di sollecitazione sulle facce dei singoli blocchi e il valore del coefficiente di sicurezza η .

In questo caso le equazioni che possiamo scrivere sono date da 2 equazioni di equilibrio alla traslazione (verticale ed orizzontale) per ogni blocco. Inoltre attraverso il coefficiente di sicurezza possono essere espresse le sollecitazioni tangenziali T_i in funzione dei valori che si ottengono a rottura.

Abbiamo in totale 7 equazioni in 7 incognite e quindi il problema è ben posto e si può pensare di risolverlo.

Equazioni:

$$\begin{cases} \sum x^{(1)}=0 \\ \sum y^{(1)}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum x^{(2)}=0 \\ \sum y^{(2)}=0 \end{cases}$$

$$T_1 = \frac{[c_1^I l_1 + (N_1 - U_1) \tan(\varphi_1^I)]}{\eta}$$

$$T_2 = \frac{[c_2^I l_2 + (N_2 - U_2) \tan(\varphi_2^I)]}{\eta}$$

$$T_{12} = \frac{[c_{12}^I l_{12} + (N_{12} - U_{12}) \tan(\varphi_{12}^I)]}{\eta}$$

Facendo le sostituzioni allo scopo di ricavare un'unica equazione nell'incognita η si ottiene una relazione di III grado in η :

$$A\eta^3 + B\eta^2 + C\eta + D = 0$$

In una equazione di III abbiamo sempre una soluzione reale, nel caso generale però le soluzioni possono essere 3. Tra questi valori del parametro η è necessario scegliere quello più opportuno. È necessario che le tensioni soddisfino alla relazione:

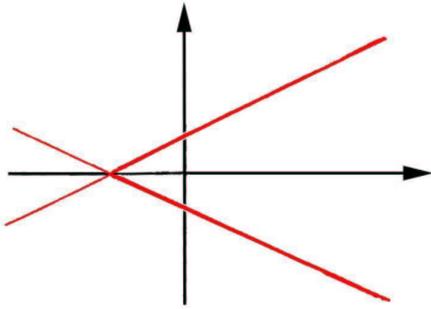
$$\tau_f = c^I + \sigma^I \tan(\varphi^I)$$

ma facendo in questo modo si adottano anche i valori negativi del termine:

$$c^I + \sigma^I \tan(\varphi^I)$$

e quindi la condizione deve essere espressa come:

$$|\tau_f| = c^I + \sigma^I \tan(\varphi^I)$$



Vengono quindi determinati i 3 valori di η ; si calcolano gli sforzi tangenziali T_i e si verifica che:

$$|\tau_i| \leq \frac{[c'_i l_i + (N_i - U_i) \tan(\varphi')]}{\eta}$$

Fig. 4120

Figura 21.19

OSSERVAZIONE: Quando viene messo in evidenza un elemento della porzione di rottura del pendio allora all'aumentare di α_i e della pressione neutra u_i la tensione efficace in corrispondenza della superficie di rottura può risultare negativa.

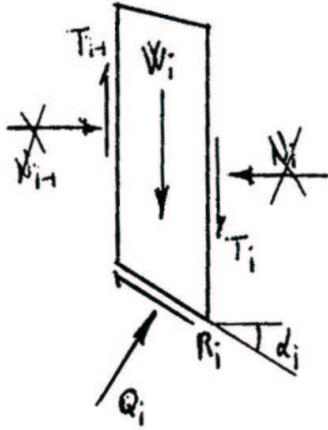


Fig. 4130

Figura 21.20

Con B_i , H_i possiamo indicare che le dimensioni del singolo elemento e con h_i l'altezza della falda rispetto alla base dell'elemento; vale quindi che:

$$W_i = \gamma_i B_i H_i$$

$$U_i = \gamma_w B_i h_i$$

Dalle quali ottengo che:

$$\gamma_i B_i H_i \cos(\alpha_i) - \gamma_w B_i h_i \geq 0$$

$$\gamma_i H_i \cos(\alpha_i) - \gamma_w h_i \geq 0$$

Da cui ottengo:

$$\cos(\alpha_i) \geq \frac{\gamma_w h_i}{\gamma_i H_i}$$

Se per caso la falda coincide con il piano di campagna allora $h_i = H_i$ per cui affinché le tensioni efficaci non cambino di segno deve valere che:

$$\cos(\alpha_i) \geq \frac{\gamma_w}{\gamma_i} \simeq \frac{1}{2} \quad \text{nelle condizioni usuali}$$

E di conseguenza:

$$\alpha_i \leq 60^\circ$$

Applicando l'equilibrio alla traslazione verticale allora possiamo dire che:

$$Q_i = W_i \cos(\alpha_i)$$

e quindi:

$$Q_i' = Q_i - U_i = W_i \cos(\alpha_i) - U_i$$

Per non uscire dalle condizioni di rottura deve risultare che:

$$Q_i' \geq 0$$

e quindi:

$$W_i \cos(\alpha_i) - U_i \geq 0$$

(Questa pagina è intenzionalmente bianca.)