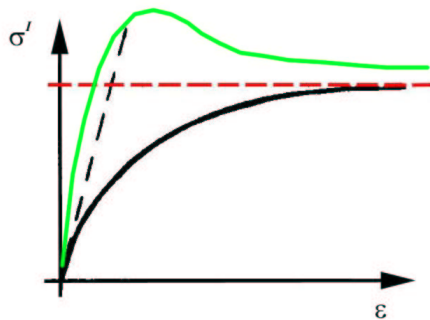


CAPITOLO 14: ANALISI DEI PROBLEMI GEOTECNICI IN CONDIZIONI LIMITE

Introduzione all'analisi dei problemi di collasso.



L'analisi del comportamento del terreno potrebbe essere fatta attraverso dei modelli di comportamento elasto-plastici, ma questo tipo di analisi richiede la conoscenza oculata dei parametri descrittivi del materiale.

Figura 14.1

La scelta viene indirizzata verso dei modelli più semplici quali quello elastico o quello perfettamente plastico a seconda dello studio che deve essere fatto.

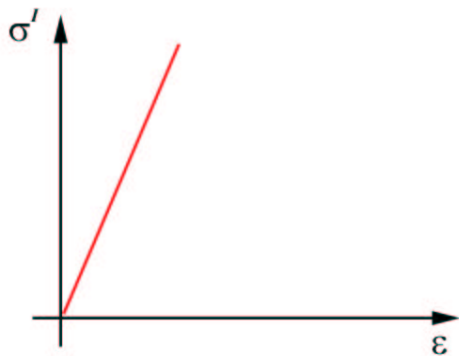


Figura 14.2

ANALISI IN CONDIZIONI DI ESERCIZIO: lo schema di comportamento è quello elastico lineare; i risultati che si ottengono in questa fase non differiscono da quelli che si otterrebbero mediante un modello più complesso.

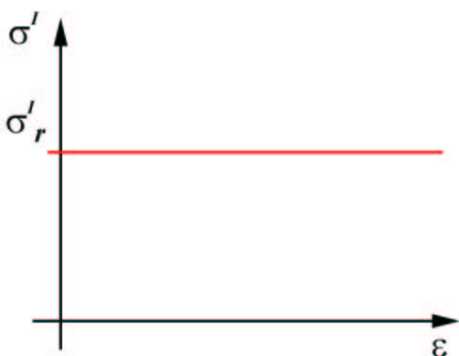


Figura 14.3

ANALISI IN CONDIZIONI LIMITE: in questo caso vengono trascurate le deformazioni prima della rottura in quanto possono considerarsi nettamente inferiori a quelle che si instaurano in condizioni di collasso; con questa osservazione il comportamento del materiale può considerarsi perfettamente plastico e si attivano deformazioni infinite quando viene raggiunto il carico di collasso.

Ci sono vari metodi di analisi in condizioni limite:

1. La trattazione di Rankine.
2. La trattazione di Coulomb, che è un'applicazione del metodo dell'equilibrio globale.
3. L'analisi limite con i due teoremi: statico e cinematico.
4. Il metodo delle caratteristiche.

Noi vediamo i primi tre.

La teoria di Rankine.

Condizione limite ed il Piano di Mohr

Riprendiamo brevemente il Piano di Mohr cercando di capire il significato di condizione limite con questa rappresentazione.

Consideriamo un elemento di volume soggetto a degli sforzi tangenziali e delle tensioni efficaci.

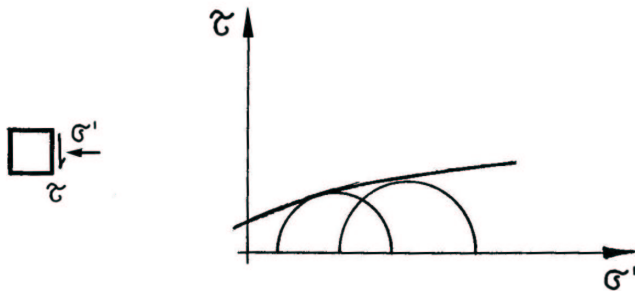


Figura 14.4

I diversi stati di sollecitazione possono essere riportati all'interno del Piano di Mohr e **l'involuppo delle condizioni che portano a rottura il provino definiscono le condizioni limite**: tutti gli stati che stanno sotto sono compatibili con la resistenza del terreno mentre quelli che escono dalla condizione limite sono incompatibili, in parole povere: gli stati tensionali che stanno sopra la retta d'involuppo sono incompatibili con la resistenza del terreno.

Vediamo graficamente nel Piano di Mohr-Coulomb un terreno non coesivo $c'=0$ e con $\varphi' \neq 0$.

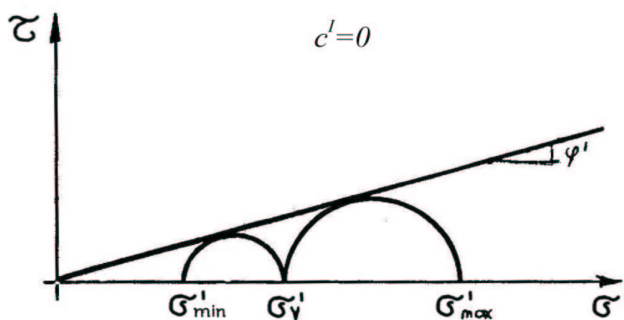


Figura 14.5

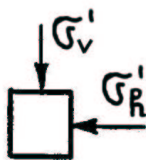
Nel caso $c'=0$, **in presenza di un terreno non coesivo**, assegnato un certo stato tensionale σ_v^I , si può arrivare a due condizioni di rottura: sia aumentando σ_v^I , che diminuendo σ_v^I .

La condizione di rottura di minimo si verifica con un cerchio di Mohr a sinistra di σ_v^I e la condizione di rottura di massimo si rappresenta con un cerchio di Mohr a destra di σ_v^I . Indichiamo i valori estremi dell'intervallo di resistenza con σ_{min}^I , σ_{max}^I . Più avanti questi due stati tensionali estremi li assoceremo ai concetti di spinta attiva (σ_{min}^I ottenuta diminuendo σ_v^I) e di spinta passiva (σ_{max}^I ottenuta aumentando σ_v^I). Rammento che per un campione può assumere tutti gli stati tensionali compresi nell'intervallo (σ_{min}^I , σ_{max}^I).

Assegnato il valore di σ_v^I allora i due cerchi di Mohr rappresentati in figura mostrano le due possibili condizioni di rottura del provino per quel determinato livello di tensione.

Questo significa che per ottenere una condizione compatibile con la resistenza del terreno il valore della tensione orizzontale deve essere all'interno dell'intervallo σ_{min}^I , σ_{max}^I .

Se prendiamo un elemento di terreno:



$$\sigma_{min}^I \leq \sigma_h^I \leq \sigma_{max}^I \quad \text{Per avere una condizione compatibile.}$$

Figura 14.6

Vediamo ora di calcolare i valori della tensione minima e della tensione massima.

Si può dire che:

$$\frac{\sigma_v^I - \sigma_{min}^I}{2} = \frac{\sigma_v^I + \sigma_{min}^I}{2} \sin(\varphi^I)$$

$$\frac{\sigma_{max}^I - \sigma_v^I}{2} = \frac{\sigma_{max}^I + \sigma_v^I}{2} \sin(\varphi^I)$$

Queste due relazioni possono essere esplicitate in funzione di σ_{min}^I e σ_{max}^I .

$$\sigma_{min}^I = \sigma_v^I \frac{1 - \sin(\varphi^I)}{1 + \sin(\varphi^I)} = \sigma_v^I \tan^2 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi^I}{2} \right]$$

$$\sigma_{max}^I = \sigma_v^I \frac{1 + \sin(\varphi^I)}{1 - \sin(\varphi^I)} = \sigma_v^I \tan^2 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^I}{2} \right]$$

Ora proseguiamo la discussione affrontando nei dettagli la trattazione di Rankine.

Vedremo che le due condizioni limite appena trovate assumono il nome di CONDIZIONE ATTIVA e CONDIZIONE PASSIVA a seconda degli spostamenti che le abilitano. Il coefficiente che lega le tensioni minima e massima alla tensione verticale si chiamerà rispettivamente COEFFICIENTE DI SPINTA ATTIVA e COEFFICIENTE DI SPINTA PASSIVA.

Trattazione di Rankine

Consideriamo un terreno non coesivo $c^I=0$ e con $\varphi^I \neq 0$.

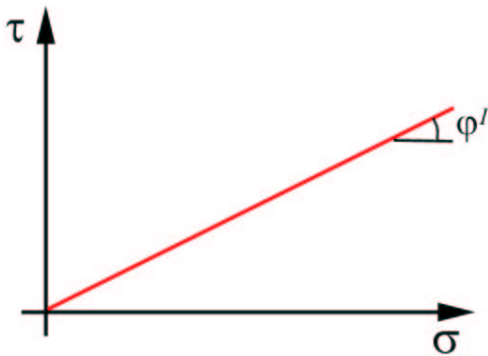
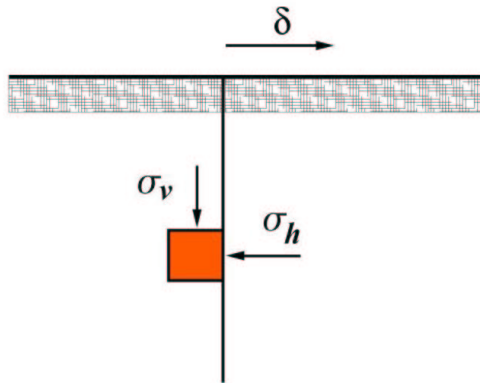


Figura 14.7

Inseriamo nel terreno un piano verticale idealmente privo di spessore e liscio che non perturba lo stato tensionale, individuiamo a ridosso del piano, ma solidale al terreno, un elemento sottoposto per ipotesi a tensioni principali.



Consideriamo di essere nel caso in cui

$$u=0$$

Per cui

$$\sigma^I = \sigma$$

Per un terreno normal consolidato ricordo che

$$\sigma_h = k_0 \sigma_v \quad k_0 = 1 - \sin \varphi^I$$

Supponiamo di essere in condizioni lontane da quelle di rottura.

Se spostiamo il diaframma di δ verso destra la tensione orizzontale diminuisce sul lato di sinistra del diaframma ed aumenta sul lato di destra. L'elemento di terreno registra questo evento.

Figura 14.8

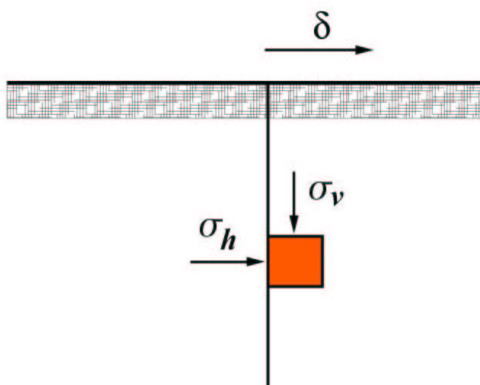
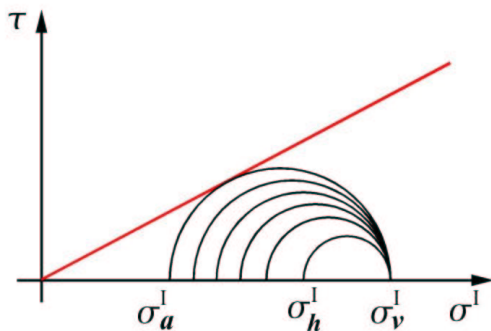


Figura 14.8b

Spinta attiva

Considero il lato a sinistra del diaframma.



σ_v^I è costante mentre σ_h^I diminuisce fino a che il cerchio di Mohr è tangente alla retta d'involuppo di rottura.

La σ_h^I corrispondente al cerchio di Mohr tangente l'involuppo di rottura è detta TENSIONE ATTIVA e si indica con σ_a^I .

$$\sigma_a^I = k_a \sigma_v^I$$

Figura14. 9

Per determinare la relazione fra σ_v^I e σ_a^I .

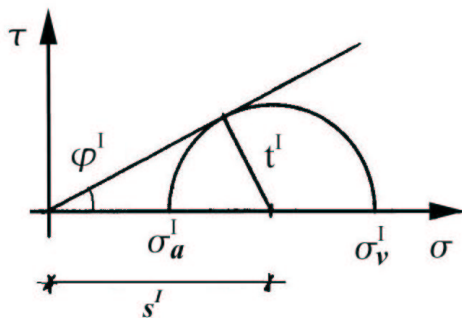


Figura14. 10

$$t^I = s^I \sin \varphi^I$$

$$\frac{\sigma_v^I - \sigma_a^I}{2} = \frac{\sigma_v^I + \sigma_a^I}{2} \sin \varphi^I$$

$$\sigma_a^I = \frac{1 - \sin \varphi^I}{1 + \sin \varphi^I} \sigma_v^I$$

$$k_a = \frac{1 - \sin \varphi^I}{1 + \sin \varphi^I} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi^I}{2} \right)$$

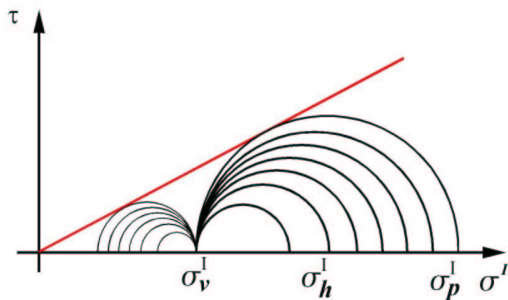
$$k_a = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi^I}{2} \right)$$

k_a si chiama COEFFICIENTE DI SPINTA ATTIVA.

Il valore della spinta attiva è quello minimo possibile perché il terreno arrivi a rottura per diminuzione delle tensioni orizzontali.

Spinta passiva

Considero il lato a destra del diaframma.



σ_v^I è costante mentre σ_h^I aumenta fino a che il cerchio di Mohr è tangente alla retta d'involuppo di rottura.

La σ_h^I corrispondente al cerchio di Mohr tangente l'involuppo di rottura è detta TENSIONE PASSIVA e si indica con σ_p^I .

$$\sigma_p^I = k_p \sigma_v^I$$

Figura14. 11

Per determinare la relazione fra σ_v^I e σ_p^I .

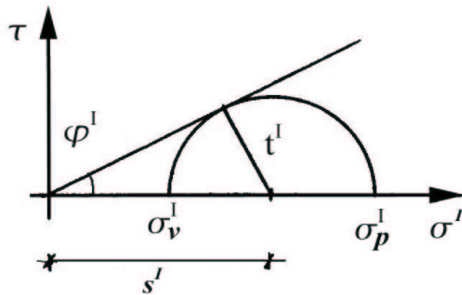


Figura14. 12

$$t^I = s^I \sin \varphi^I$$

$$\frac{\sigma_p^I - \sigma_v^I}{2} = \frac{\sigma_p^I + \sigma_v^I}{2} \sin \varphi^I$$

$$\sigma_p^I = \frac{1 + \sin \varphi^I}{1 - \sin \varphi^I} \sigma_v^I$$

$$k_p = \frac{1 + \sin \varphi^I}{1 - \sin \varphi^I} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^I}{2} \right)$$

$$k_p = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^I}{2} \right)$$

k_p si chiama COEFFICIENTE DI SPINTA PASSIVA.

Spostamenti e coefficienti di spinta

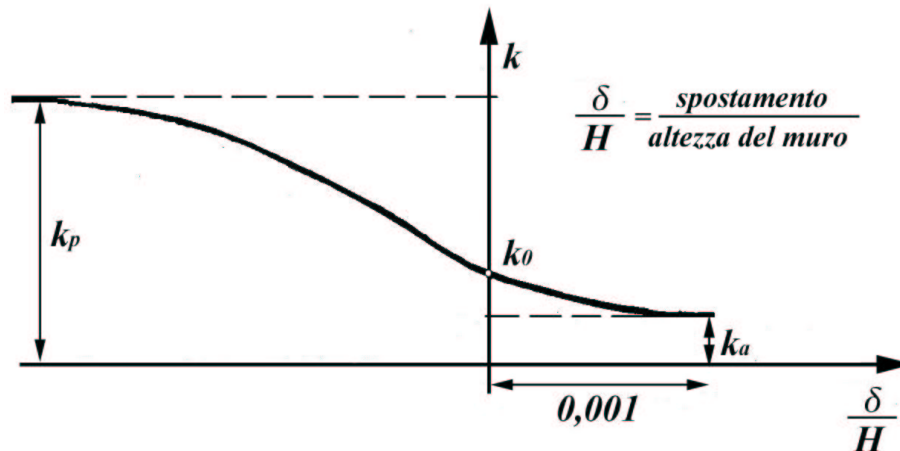


Figura14. 13

Da questo diagramma si può osservare che il valore della spinta attiva si realizza per uno spostamento relativo del muro pari a 0,001 della sua altezza.

Per quanto riguarda la spinta passiva questa si mobilita per spostamenti del muro che sono molto più grandi rispetto a quelli necessari per mobilitare la spinta attiva. In genere devono ottenersi spostamenti relativi di un ordine di grandezza superiore.

Il motivo di questa differenza di spostamento relativo necessario per attirare la corrispondente spinta può essere ricercata andando ad analizzare i volumi di rottura che vengono generati:

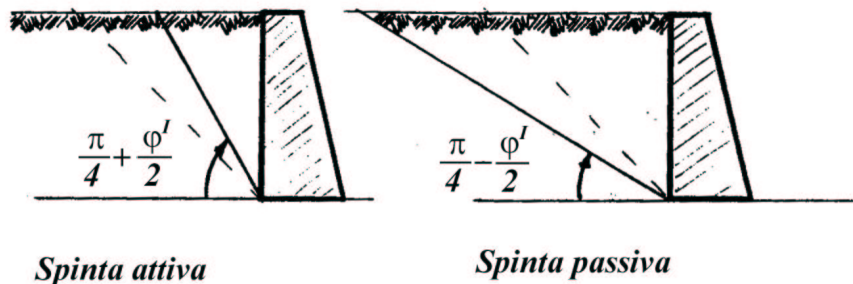


Figura14. 14

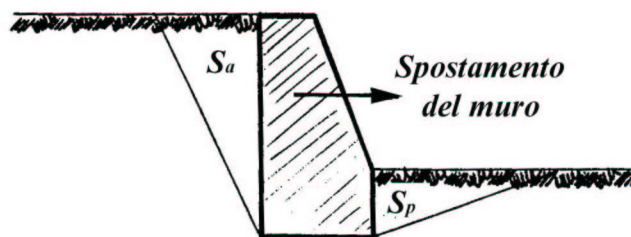


Figura14. 15

Se lo spostamento del muro è ridotto allora questo è sufficiente per la spinta attiva, ma non potrebbe essere sufficiente per la spinta passiva e quindi nel caso in esame quest'ultima può essere ridotta a favore di sicurezza, infatti si sarebbe commesso un errore maggiore andando a considerare completamente la spinta passiva che in realtà non è presente nella massima intensità.

Osservazione

$$k_p = \frac{1 + \sin \varphi^I}{1 - \sin \varphi^I} = \frac{1}{\frac{1 - \sin \varphi^I}{1 + \sin \varphi^I}} = \frac{1}{k_a}$$

Per avere un'idea dei valori relativi dei coefficienti di spinta suppongo di avere un terreno normal consolidato con un angolo di attrito $\varphi^I = 30^\circ$:

$$k_0 = 1 - \sin \varphi^I \quad \text{Legge di Jacky per il coefficiente di spinta a riposo.}$$

$$k_0 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$k_a = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

$$k_p = 3$$

Il coefficiente di spinta passiva è circa 9 volte il coefficiente di spinta attiva.

Poniamo ora l'attenzione alle seguenti asserzioni:

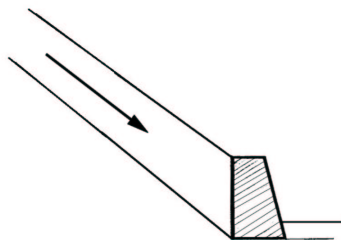
Le spinte attiva e passiva si possono abilitare solo se sono possibili condizioni di deformazione dell'opera.

Le spinte attiva e passiva possono essere influenzate dalle diverse fasi di costruzione dell'opera.

Con queste in mente analizziamo gli esempi che seguono.

Esempio 1

Nel caso abbiamo la parte superficiale di un pendio in movimento .



In questo caso devo progettare il muro per la spinta passiva. Se lo progetto a spinta attiva questo viene giù.

$$\sigma_p^I = 9 \sigma_a^I \quad \varphi^I = 30^\circ$$

Figura14. 16

Esempio 2

Nell'eseguire uno scavo fra due costruzioni bisogna porre attenzione agli spostamenti.



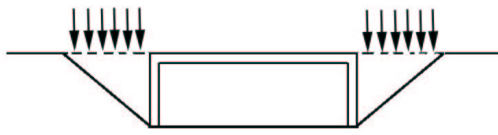
Si procede così:

1. Si inseriscono i diaframmi,
2. Si esegue lo scavo e si inseriscono i puntoni e le solette fra i diaframmi,
3. Si procede per strati nel getto della fondazione per minimizzare gli spostamenti.

Figura14. 17

Esempio 3

Se eseguo un'opera interrata o un sottopasso dove sopra ho un rilevato stradale.



In questo caso procediamo così:

1. Scavo.
2. Realizzo l'opera.
3. Riempio di terra a fianco dell'opera costipando il terreno per avere $\sigma_h^I > \sigma_a^I$, per allontanarmi dalle condizioni di rottura.

Figura14. 18

Esempio 4

Il muro a mensola qui sotto rappresentato può andare incontro a rottura per flessione eccessiva dove il paramento verticale s'incasta alla soletta. Il motivo è il cambiamento della spinta a cui è sottoposto. Il muro pensato, progettato e realizzato per resistere alla spinta attiva si ritrova, nella sua vita, a sopportare la spinta passiva, che è molto maggiore. Cerchiamo di capire perché può variare lo stato di sollecitazione agente sul muro e come evitarlo.

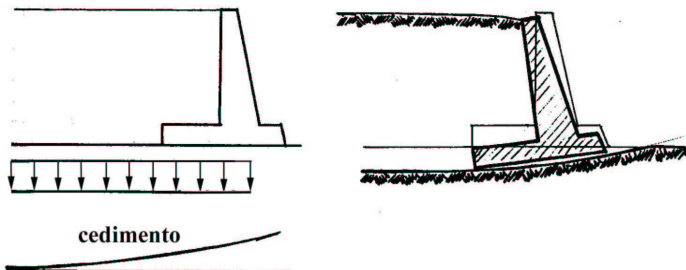
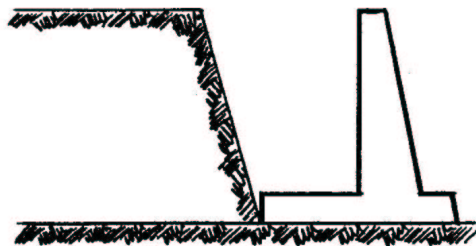


Figura14. 19

Se una volta completata l'opera di sostegno viene eseguito completamente il riempimento del rilevato allora questo provoca dei cedimenti sul sottostante terreno indisturbato; tali cedimenti inducono una rotazione sul muro di sostegno contro il rilevato la quale provoca un incremento delle tensioni orizzontali applicate, in questo modo sul muro viene indotta una forte spinta passiva.

Per evitare questo fenomeno l'esecuzione del riempimento del rilevato deve essere fatta con degli accorgimenti.

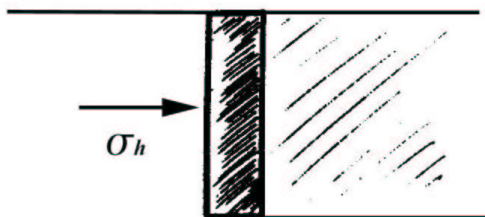


Il riempimento viene eseguito in due fasi distinte: la prima consiste nel riporto di terra fino in prossimità dell'opera di sostegno; in questo modo vengono indotti dei cedimenti sul terreno resistente i quali provocano una rotazione dell'opera di sostegno ma senza un incremento delle tensioni orizzontali in quanto il muro non è a contatto con il rilevato; solo in un secondo tempo viene eseguito il riempimento di completamento.

Figura14. 20

Esempio 5: spinta a riposo

Se impediamo completamente gli spostamenti del muro allora le spinte che su di esso si generano sono quelle che si avevano precedentemente alla sua costruzione. Senza spostamenti del muro abbiamo solamente la spinta a riposo, che ricaviamo dall'integrazione delle spinte efficaci orizzontali che si ottengono dalla proporzionalità con le tensioni efficaci verticali mediante il coefficiente di spinta a riposo k_0 .



$$\sigma_h^I = k_0 \sigma_v^I \quad \text{con} \quad k_0 > k_a$$

In condizioni di normal-consolidazione il terreno non ha raggiunto la condizione di rottura.

Se viene asportata la porzione di terreno davanti al muro vengono consentiti degli spostamenti i quali inducono la spinta a convergere verso la spinta attiva S_a .

Se invece il muro viene spinto contro il terreno inducendo una azione di contrasto allora si ottengono delle spinte che possono raggiungere al limite il valore della spinta passiva.

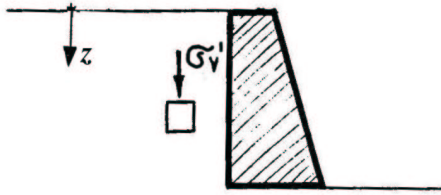
Figura14. 21

Questo fenomeno è causato dall'incremento delle tensioni orizzontali.

Consideriamo un muro di contenimento; questo si sposta in avanti fino a quando il terreno raggiunge la condizione di rottura, per cui la spinta che interesserà questo problema sarà quella minima.

Esempio 6

Consideriamo un muro.



Supponiamo che le pressioni neutre siano nulle $u=0$, inoltre consideriamo un terreno omogeneo e quindi il suo peso per unità di volume è costante.

$$\sigma_v^I = \sigma_v = \gamma z$$

Quest'ultima è la distribuzione delle tensioni verticali in funzione della coordinata z .

Figura14.22

Un'ulteriore ipotesi è quella che la condizione di rottura del terreno venga raggiunta in corrispondenza di un valore minimo delle tensioni tangenziali (supponiamo nulle), in modo tale da poter calcolare le tensioni orizzontali minime e massime con il metodo precedentemente visto.

$$\sigma_h^I = k_a \sigma_v^I \quad \text{tensione orizzontale minima}$$

$$\sigma_h^I = k_p \sigma_v^I \quad \text{tensione orizzontale massima}$$

Con questi due diversi valori della tensione orizzontale possono calcolarsi la spinta orizzontale minima (spinta attiva) e la spinta orizzontale massima (spinta passiva).

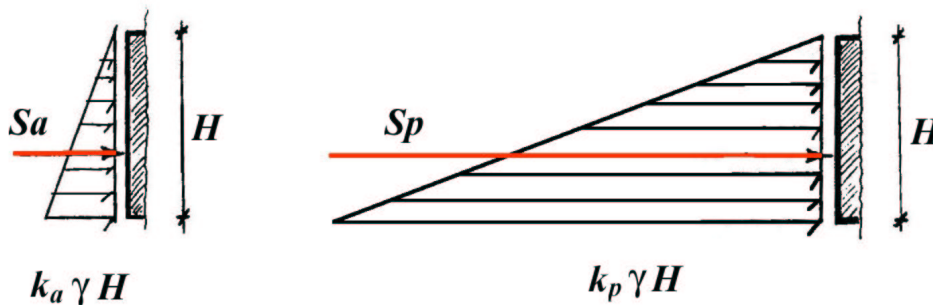


Figura14. 23

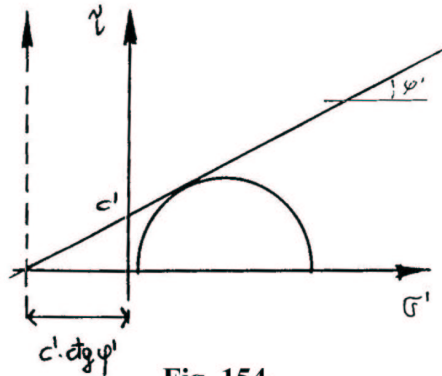
Con queste distribuzioni possiamo determinare il valore minimo e massimo della spinta del terreno all'interno della quale non viene raggiunta la condizione di rottura.

SPINTA ATTIVA o SPINTA MINIMA: $S_a = \frac{1}{2} k_a \gamma H^2$

SPINTA PASSIVA o SPINTA MASSIMA: $S_p = \frac{1}{2} k_p \gamma H^2$

Terreno coesivo

Vediamo ora come variano i due valori della spinta nel caso di presenza di coesione.

**Fig. 154**

$$\tau = c^I + \sigma^I \tan(\varphi^I)$$

In questo caso nota la tensione verticale σ_v^I per calcolare i valori della tensione minima e massima non si possono applicare direttamente le precedenti relazioni in quanto la curva limite ha una intercetta non nulla con l'asse delle ordinate dovuta alla coesione del terreno.

Per applicare le formule precedenti dobbiamo operare una trasformazione degli assi:

$$\tilde{\sigma}^I = \sigma^I + c^I \cot(\varphi^I)$$

Figura14. 24

in questo modo nel nuovo sistema di riferimento (piano di Mohr fittizio) l'intercetta della curva limite è nulla, per cui si può scrivere che:

$$\tilde{\sigma}_{min}^I = k_a \tilde{\sigma}_v^I \quad \text{e} \quad \tilde{\sigma}_{max}^I = k_p \tilde{\sigma}_v^I$$

A questo punto si può introdurre la definizione della nuova coordinata: $\tilde{\sigma}^I$

$$\tilde{\sigma}_{min}^I = \sigma_{min}^I + c^I \cot(\varphi^I) \quad \tilde{\sigma}_{max}^I = \sigma_{max}^I + c^I \cot(\varphi^I)$$

$$\tilde{\sigma}_v^I = \sigma_v^I + c^I \cot(\varphi^I)$$

per cui abbiamo che:

$$\sigma_{min}^I + c^I \cot(\varphi^I) = k_a [\sigma_v^I + c^I \cot(\varphi^I)]$$

$$\sigma_{max}^I + c^I \cot(\varphi^I) = k_p [\sigma_v^I + c^I \cot(\varphi^I)]$$

$$\sigma_{min}^I = k_a \sigma_v^I - c^I \cot(\varphi^I) (1 - k_a)$$

$$\sigma_{max}^I = k_p \sigma_v^I - c^I \cot(\varphi^I) (1 - k_p)$$

Possiamo esplicitare i valori assunti dai coefficienti:

$$(1 - k_a) \cot(\varphi^I) \quad (1 - k_p) \cot(\varphi^I)$$

$$(1 - k_a) \cot(\varphi^I) = \frac{2 \sin(\varphi^I)}{1 + \sin(\varphi^I)} \cot(\varphi^I) = 2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi^I}{2}\right) = 2 \sqrt{k_a}$$

$$(1 - k_p) \cot(\varphi^I) = -\frac{2 \sin(\varphi^I)}{1 - \sin(\varphi^I)} \cot(\varphi^I) = -2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^I}{2}\right) = -2 \sqrt{k_p}$$

Da cui si ottiene che:

$$\begin{cases} \sigma_{min}^I = k_a \sigma_v^I - 2c^I \sqrt{k_a} \\ \sigma_{max}^I = k_p \sigma_v^I + 2c^I \sqrt{k_p} \end{cases}$$

Si può osservare che per effetto della coesione la tensione minima di rottura viene diminuita e di conseguenza anche S_a , mentre la tensione massima di rottura viene aumentata e di conseguenza S_p ; tale osservazione ammette anche un riscontro grafico.

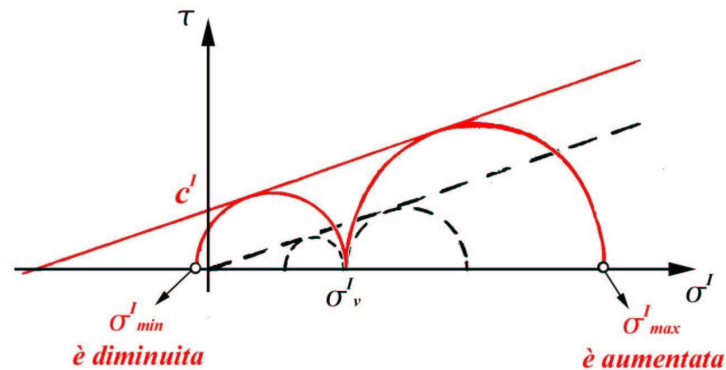


Figura14. 25

Esempio

Supponiamo le pressioni neutre nulle $u=0$ e la coesione diversa da zero $c^I \neq 0$.

La tensione verticale sarà data dalla relazione:

$$\sigma_v = \gamma z$$

e la tensione relativa alla spinta attiva può essere scritta come:

$$\sigma_a^I = k_a \sigma_v^I - 2c^I \sqrt{k_a}$$

Possiamo diagrammare questi andamenti:

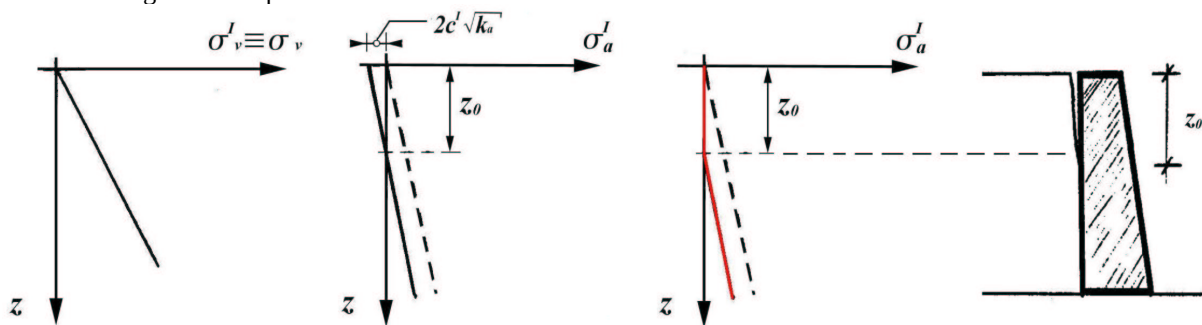


Figura 14.26

Si osserva che la spinta sulla parete del muro è negativa fino a z_0 , questa però è una cosa impossibile, e sta a significare che il terreno si regge da solo per una profondità paria a z_0 .

Analisi in condizioni non drenate

Sono in condizioni non drenate, quindi valuterò le tensioni totali σ_v e σ_h .

Il terreno è saturo: $S = 1$

L'angolo di attrito è nullo: $\varphi^I = 0$

Da cui segue che il coefficiente di spinta è unitario: $k = 1$

La resistenza al taglio è: $\tau = c_u$

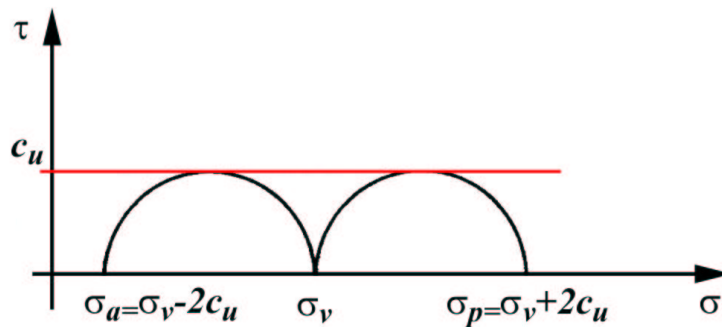


Figura 14.27

$$\sigma_a = \sigma_v - 2c_u$$

$$\sigma_p = \sigma_v + 2c_u$$

Supponiamo di voler verificare un terreno in condizioni non drenate con terreno a grana fine. Vogliamo fare un'analisi quando il muro si sposta in avanti.

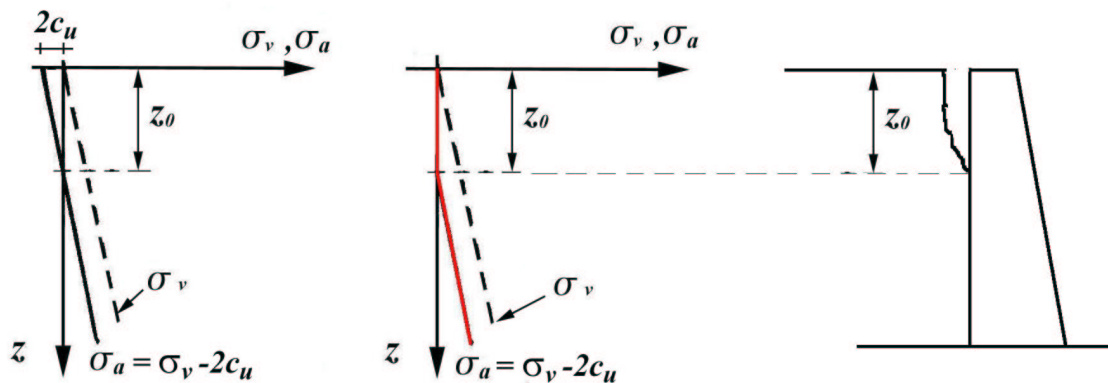


Figura 14.28

Se il muro si sposta in avanti il terreno si stacca dal muro, non si muove, si autosostiene, però il terreno non sopporta sforzi di trazione, quindi la tensione di spinta attiva sarà al limite nulla.

$$\sigma_a = \sigma_v - 2c_u = \gamma z - 2c_u = 0$$

$$z_0 = \frac{2c_u}{\gamma}$$

Questa è l'ALTEZZA DI AUTOSOSTENTAMENTO se la fessura non si riempie d'acqua.

Lo stesso problema può porsi chiedendosi fino a quale altezza si sostiene lo scavo.

Può accadere che la fessura si riempia d'acqua: avrò allora una spinta in più dovuta all'acqua così che il terreno si sostiene maggiormente.

$$u = \gamma_w z$$

Alla profondità z_0 della fessura non ho più la relazione:

$$0 = \sigma_v - 2c_u$$

ma avrò:

$$\gamma_w z_0 = \sigma_v - 2c_u$$

$$\gamma_w z_0 = \gamma z_0 - 2c_u$$

$$z_0 = \frac{2c_u}{\gamma - \gamma_w}$$

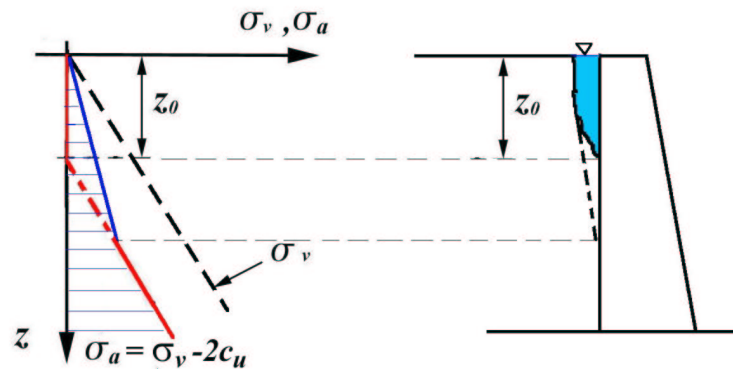


Figura14. 29

La fessura quindi aumenta la sua profondità.

Se $\gamma = 2\gamma_w$ ho che la profondità della fessura raddoppia

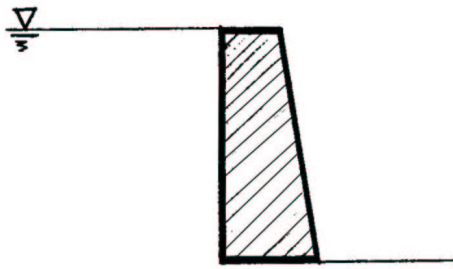
Esempio

Figura 14.30

Vediamo ora il caso di un muro di sostegno che confina un terrapieno di materiale non coesivo con una falda che arriva al livello del piano di campagna.

In questo caso per il calcolo della tensione orizzontale relativa alla spinta attiva applichiamo la formula seguente:

$$\sigma_h^I = k_a \sigma_v^I$$

Dove la tensione verticale può essere calcolata adottando il peso specifico alleggerito:

$$\gamma^I = \gamma - \gamma_w$$

ossia vale che:

$$\sigma_v^I = (\gamma - \gamma_w) z$$

da cui:

$$\sigma_h^I = (\gamma - \gamma_w) z k_a$$

Per il calcolo della tensione totale si somma la pressione neutra:

$$\sigma_h = \sigma_h^I + u = (\gamma - \gamma_w) z k_a + \gamma_w z = \gamma z k_a + \gamma_w z (1 - k_a)$$

La rappresentazione può essere fatta anche graficamente:

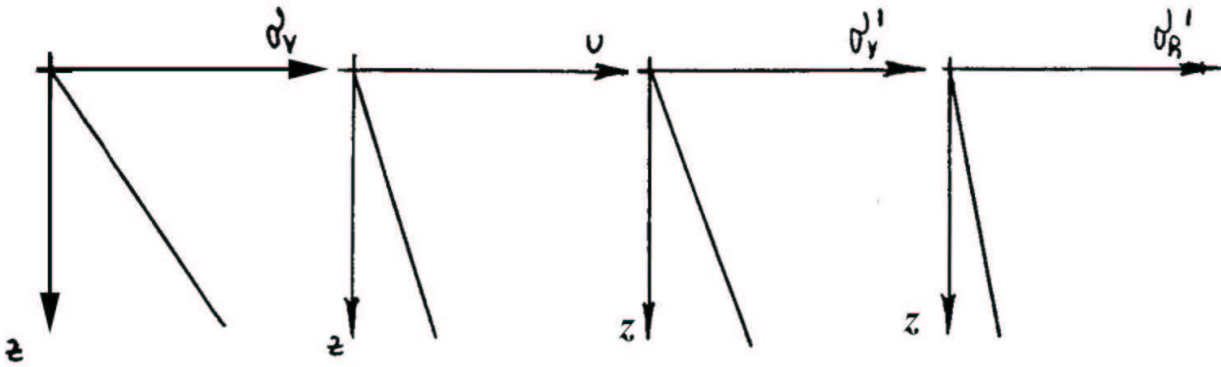


Figura 14.31

$$\sigma_v = \gamma z \quad u = \gamma_w z \quad \sigma_v^I = (\gamma - \gamma_w) z \quad \sigma_h^I = k_a \sigma_v^I = k_a (\gamma - \gamma_w) z$$

Nel caso di assenza della falda la spinta attiva sul muro sarà data da:

$$\sigma_h = k_a \gamma z$$

quindi è possibile confrontare la spinta che si genera con la falda con quella senza la falda:

$$\frac{\sigma_h(u \neq 0)}{\sigma_h(u = 0)} = \frac{\gamma z k_a + \gamma_w z (1 - k_a)}{\gamma z k_a} = 1 + \frac{1 - k_a}{k_a} \frac{\gamma_w}{\gamma}$$

Il secondo addendo di questa espressione per i valori usuali dei parametri del terreno risulta circa uguale all'unità e quindi si può affermare che la spinta attiva passando da un muro di sostegno senza falda ad un muro con falda risulta circa raddoppiata.

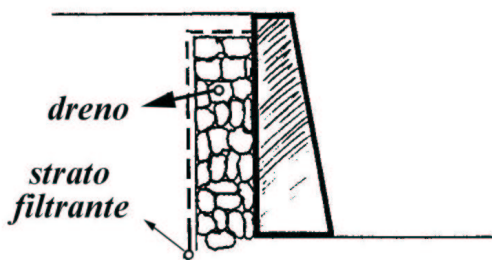


Figura 14.32

Questo aspetto rappresenta un grande problema nella realizzazione dei muri di sostegno; a monte sono necessarie delle opere drenanti allo scopo di ridurre le tensioni neutre del fluido.

Il drenaggio ha lo scopo di smaltire l'acqua, mentre lo strato filtrante non permette che il terreno entri nel drenaggio evitando il suo intasamento.

Punto di applicazione delle spinte

Con la trattazione di Rankine conosciamo la distribuzione degli sforzi a contatto della parete del muro e quindi è possibile calcolare con relativa facilità il punto di applicazione delle forze. Se consideriamo un muro che sostiene un terrapieno omogeneo allora la distribuzione degli sforzi è di tipo triangolare e quindi la spinta è applicata ad un terzo dell'altezza.

Vediamo ora il comportamento nel caso in cui sia presente una falda in condizioni drenate.

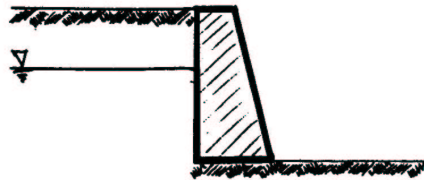


Fig. 169

Come si può osservare in questo caso la distribuzione delle spinte lungo l'altezza del muro non è di tipo triangolare, per cui la risultante non sarà applicata ad un terzo dell'altezza; ma la sua posizione potrà essere determinata facendo un bilancio dei momenti rispetto ad un punto.

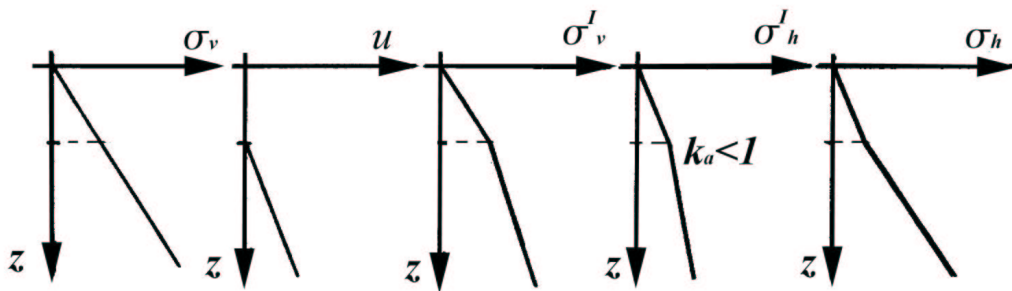


Fig. 170 Spinte

La teoria di Coulomb e il Metodo dell'equilibrio globale

Il metodo dell'equilibrio globale è utile per risolvere dei problemi di stabilità relativi ai muri di sostegno; tale metodo si basa sui passi seguenti:

1. Individuazione per successivi tentativi di una superficie di scorrimento critico.
2. Assunzione di una distribuzione di tensioni lungo questa superficie.
3. Risoluzione del problema mediante un'equazione di equilibrio globale del terreno.

Calcolo della spinta attiva S_a di un muro di sostegno

Vediamo ora di calcolare la spinta attiva S_a relativa ad un muro di sostegno applicando questo metodo. In questa trattazione trascuriamo l'attrito tra il muro ed il terreno.



Supponiamo che il terreno sia non coesivo ($c'=0$) e che non sia presente la falda ($u=0$).

Il muro subisce uno spostamento in avanti che causa la rottura di un concio di terreno; le forze che agiscono su questo concio sono quelle della forza peso W , della componente di spinta S e della sollecitazione che si esplica lungo la superficie di rottura del concio (componenti N e T).

L'equilibrio globale viene imposto facendo riferimento a questo sistema di sollecitazioni agenti sul concio.

Imponiamo le condizioni di equilibrio rispetto alle direzioni individuate dalle componenti T ed N .

$$\begin{cases} N = W \cos(\alpha) + S \sin(\alpha) \\ T = W \sin(\alpha) - S \cos(\alpha) \end{cases}$$

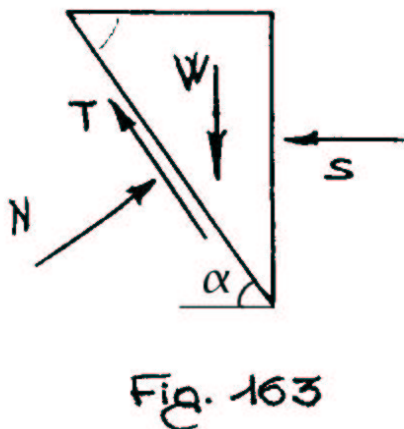
In condizioni di rottura lungo la relativa superficie devono svilupparsi delle tensioni tangenziali τ proporzionali alle tensioni normali σ rispetto al parametro $\tan \varphi'$:

$$\tau = \sigma \tan(\varphi')$$

e quindi integrando su tutta la superficie di scorrimento otteniamo che:

$$T = N \tan(\varphi')$$

è possibile sostituire in questa relazione le espressioni del precedente sistema:



$$W \sin(\alpha) - S \cos(\alpha) = [W \cos(\alpha) + S \sin(\alpha)] \tan(\varphi')$$

Le condizioni di equilibrio globale forniscono il valore della spinta S :

$$S [\sin(\alpha) \tan(\varphi') + \cos(\alpha)] = W [\sin(\alpha) - \cos(\alpha) \tan(\varphi')]$$

$$S = W \frac{\sin(\alpha) - \cos(\alpha) \tan(\varphi')}{\sin(\alpha) \tan(\varphi') + \cos(\alpha)} = W \frac{\tan(\alpha) - \tan(\varphi')}{1 + \tan(\alpha) \tan(\varphi')} = W \tan(\alpha - \varphi')$$

Il peso del concio di terreno è dato da:

$$W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cot(\alpha)$$

Per cui ottengo:

$$S = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cot(\alpha) \tan(\alpha - \varphi')$$

Quello che abbiamo calcolato è il valore della spinta in funzione dell'angolo α formato dal piano di scorrimento con la

direzione orizzontale. Il valore massimo di tale spinta rappresenta la spinta attiva delle terre contro il muro.

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0$$

Imponendo questa equazione si ottiene che il valore massimo della spinta si ha per:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^I}{2}$$

e quindi:

$$S_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^I}{2} \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi^I}{2} \right)$$

$$S_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi^I}{2} \right)$$

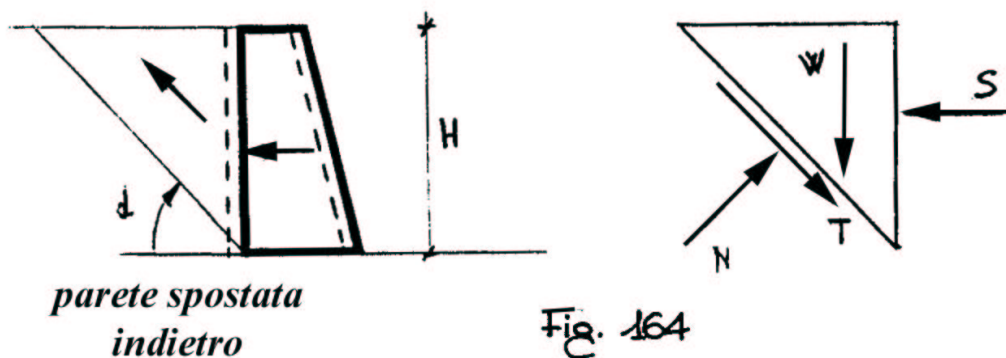
Secondo questo procedimento abbiamo determinato nuovamente il valore della costante:

$$k_a = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi^I}{2} \right)$$

come era stata ricavata nelle discussioni precedenti considerando la distribuzione tensionale nel terreno.

Calcolo della spinta passiva S_p di un muro di sostegno

Allo stesso modo è possibile determinare il coefficiente di spinta passiva K_p . Il ragionamento è simile a quello precedente solamente che in questa situazione il muro viene spostato verso il terreno, il concio si sposta verso l'alto, e viene invertito il verso dello sforzo tangenziale T sulla superficie di scorrimento.



Anche in questo caso possiamo scrivere le equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} N = W \cos(\alpha) + S \sin(\alpha) \\ T = -W \sin(\alpha) + S \cos(\alpha) \end{cases}$$

Lungo la superficie di scorrimento vale che:

$$T = N \tan(\varphi^I)$$

e quindi:

$$-W \sin(\alpha) + S \cos(\alpha) = [W \cos(\alpha) + S \sin(\alpha)] \tan(\varphi^I)$$

$$S [\cos(\alpha) - \sin(\alpha) \tan(\varphi^I)] = W [\cos(\alpha) \tan(\varphi^I) + \sin(\alpha)]$$

$$S = W \frac{\cos(\alpha) \tan(\varphi^I) + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - \sin(\alpha) \tan(\varphi^I)} = W \frac{\tan(\alpha) + \tan(\varphi^I)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\varphi^I)} = W \tan(\alpha + \varphi^I)$$

Il peso del concio di terreno è dato da:

$$W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cot(\alpha)$$

quindi:

$$S = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cot(\alpha) \tan(\alpha + \varphi^I)$$

La spinta passiva viene determinata minimizzando il valore di S in funzione di α .

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0$$

Imponendo questa equazione si ottiene che il valore minimo della spinta si ha per:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi^I}{2}$$

e quindi:

$$S_p = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi^I}{2}\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^I}{2}\right)$$

$$S_p = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^I}{2}\right)$$

Secondo questo procedimento abbiamo determinato nuovamente il valore della costante:

$$k_p = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^I}{2}\right)$$

Stabilità di una parete in condizioni non drenate

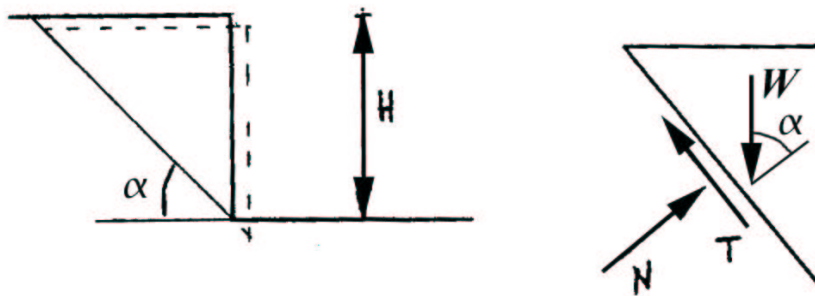


Fig. 165

Possono essere imposte le equazioni di equilibrio globale dell'elemento di volume:

$$\begin{cases} N = W \cos(\alpha) \\ T = W \sin(\alpha) \end{cases}$$

Siccome ci troviamo in condizioni non drenate allora lungo la superficie di scorrimento si sviluppa una tensione tangenziale pari a:

$$\tau = c_u$$

e quindi la sollecitazione tagliante agente sul concio è data da:

$$T = c_u l$$

dove l è la lunghezza della superficie di scorrimento.

Si può imporre l'uguaglianza tra quest'ultima relazione e la seconda delle equazioni del sistema precedente:

$$c_u l = W \sin(\alpha)$$

$$c_u \frac{H}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cot(\alpha) \sin(\alpha)$$

$$\frac{c_u}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{2} \gamma H \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin(\alpha)$$

$$c_u = \frac{1}{2} \gamma H \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

$$c_u = \frac{\gamma H}{4} \sin(2\alpha)$$

Da cui ricaviamo H:

$$H = \frac{4c_u}{\gamma} \frac{1}{\sin(2\alpha)}$$

Questo valore di altezza rappresenta l'altezza del terrapieno che in condizioni non drenate riesce a sostenersi da solo in funzione dell'angolo α . Può essere calcolato il valore di minimo di questa altezza imponendo:

$$\frac{dH}{d\alpha} = 0$$

e viene denominata **ALTEZZA CRITICA** del terrapieno.

$$\frac{dH}{d\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad H_{cr} = \frac{4c_u}{\gamma}$$

Nelle discussioni fatte in precedenza considerando la distribuzione delle tensioni sul terrapieno (metodo di Rankine) si era ottenuto che l'altezza critica era data da:

$$H_{cr} = \frac{2c_u}{\gamma}$$

Tutto questo discorso sta a significare che un'opera di sostegno per un terrapieno in condizioni non drenate risulta inutile se la sua altezza è inferiore ad H_{cr} in quanto la spinta risulta essere nulla. Si può allora dire che un'opera di sostegno più alta di H_{cr} subisce una spinta esclusivamente per la porzione di terreno più profonda di H_{cr} . Vediamo immediatamente questo caso.

Ora ho un muro di altezza H , più alto dell'altezza di autosostentamento z_0 , con terreno coesivo. Suppongo che il muro si sposti in avanti in modo da abilitare la spinta attiva, il terreno è coesivo e quindi c'è un'altezza di autosostentamento. Partendo dal piano di campagna in sommità al muro e scendendo per un'altezza z_0 non c'è spinta sul muro, si è formata una fessura ed il muro si è allontanato dal terreno. Per la presenza della coesione il terreno si autosostiene, quindi c'è un'altezza di autosostentamento fino alla quota z_0 , ma essendo che il terreno non resiste a trazione si forma una fessura anche a monte che mozza il concio di spinta, il quale risulta tagliato alla quota z_0 . Ecco la spinta dopo la formazione delle fessure:

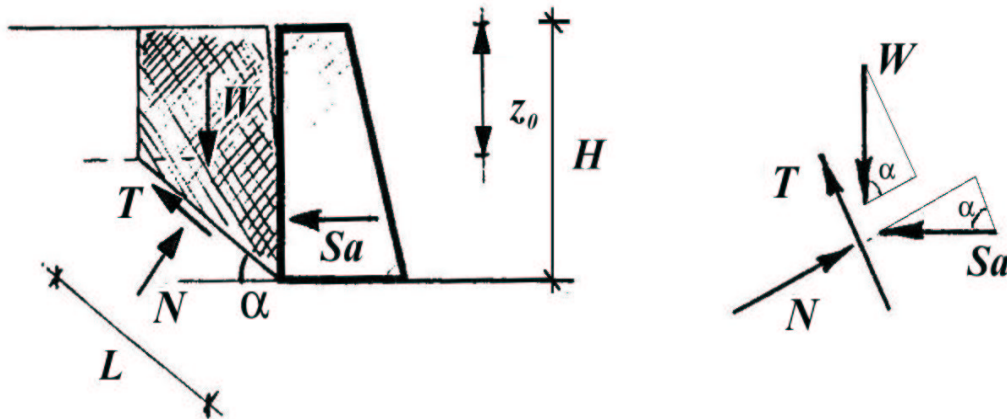


Figura 14.33

Scriviamo le equazioni di equilibrio globale:

$$\begin{cases} N = W \cos(\alpha) + S_a \sin(\alpha) \\ T = W \sin(\alpha) - S_a \cos(\alpha) \end{cases}$$

A questo punto è necessario specificare le singole quantità che intervengono a definire le equazioni.

La forza di taglio T è dato da:

$$T = c_u L$$

con
$$L = \frac{(H - z_0)}{\sin(\alpha)}$$

Per quanto riguarda il peso del terreno:

$$W = \frac{1}{2} \gamma (H + z_0) \cdot (H - z_0) \cot(\alpha) = \frac{1}{2} \gamma (H^2 - z_0^2) \cot(\alpha)$$

Tali quantità possono essere sostituite nell'equazione di equilibrio del taglio:

$$c_u L = W \sin(\alpha) - S_a \cos(\alpha)$$

$$S_a = W \tan(\alpha) - \frac{c_u L}{\cos(\alpha)}$$

$$S_a = \frac{1}{2} \gamma (H^2 - z_0^2) \cot(\alpha) \tan(\alpha) - \frac{c_u (H - z_0)}{\sin(\alpha) \cos(\alpha)} = \frac{1}{2} \gamma (H^2 - z_0^2) - \frac{2c_u (H - z_0)}{\sin(2\alpha)}$$

Può essere calcolato il valore massimo della spinta attiva il quale si ottiene per:

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

quindi abbiamo che:

$$S_a = W - 2c_u (H - z_0)$$

Osservazioni

Fino a questo punto per la determinazione delle spinte su un'opera di sostegno abbiamo applicato due metodi diversi di calcolo: il primo è il cosiddetto metodo di Rankine mentre il secondo è quello di Coulomb.

Il metodo di Rankine si basa sulla determinazione della distribuzione delle tensioni a contatto con la parete del muro e da questa distribuzione si risale al valore della spinta alla quale siamo interessati.

Con il metodo di Coulomb invece viene fatta una ipotesi riguardo alla condizione di collasso del terrapieno; si suppone che la rottura avvenga lungo una superficie piana inclinata di un certo angolo α ; lungo tale superficie si sviluppano le tensioni tangenziali di rottura. Una volta messe in evidenza tutte le sollecitazioni agenti sul concio possono essere imposte le condizioni di equilibrio globale mediante le quali è possibile ricavare il valore della spinta.

Le soluzioni con i due metodi sono coincidenti nel momento in cui la parete interna del muro è verticale, il terrapieno presenta una superficie superiore orizzontale e viene trascurato l'attrito tra terra e muro.

Per uno stesso problema sono stati fatti i calcoli in due condizioni diverse:

1. condizioni drenate,
2. condizioni non drenate.

Nel primo caso la soluzione del problema è abbastanza semplice in quanto vengono trattate delle equazioni che non risultano accoppiate tra loro. In questo caso i calcoli vengono fatti in termini di tensioni efficaci.

Nel secondo caso in condizioni non drenate i calcoli vengono fatti in termini totali in quanto non risulta nota la distribuzione delle pressioni neutre.

Le condizioni non drenate vengono generalmente applicate ai terreni a grana fine dove la permeabilità è molto ridotta e quindi i tempi di dissipazione delle pressioni neutre sono molto più grandi rispetto ai tempi di costruzione dell'opera.

Per quanto riguarda i terreni a grana fine devono comunque essere fatte anche le verifiche in condizioni drenate a maggiore ragione quando l'opera è di lunga durata. A breve termine l'acqua assorbe una portata degli sforzi e quindi l'opera si trova in condizioni di stabilità maggiori rispetto al lungo termine dove vengono dissipate le sovrappressioni neutre incrementando le tensioni efficaci con conseguente aumento della spinta attiva.

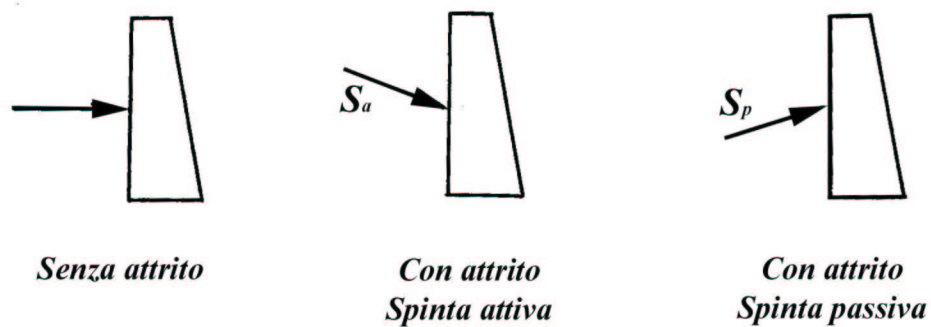
Con i due metodi che abbiamo precedentemente descritto abbiamo ricavato l'altezza critica di un terrapieno naturale, cioè quell'altezza che in condizioni non drenate permette al terreno di sostenersi da solo; con i due metodi abbiamo ricavato due valori diversi di altezza critica:

$$\text{Rankine} \quad H_{cr} = \frac{2c_u}{\gamma}$$

$$\text{Coulomb} \quad H_{cr} = \frac{4c_u}{\gamma}$$

Tali discussioni però erano valide in condizioni non drenate ma a lungo termine il terrapieno si trova in condizioni drenate e quindi il valore dell'altezza critica tende a zero sia con il primo o con il secondo metodo di calcolo.

Un'altra osservazione importante che può essere fatta è che fino a questo punto non è mai stato considerato l'angolo di attrito tra il muro ed il terreno; tale angolo influisce sia sul valore della spinta attiva che su quello della spinta passiva.

Spinta con attrito*Figura 14.34*

Vediamo come si presenta il problema avendo introdotto la forza di attrito tra il muro ed il terreno.

Spinta attiva con attrito muro terreno

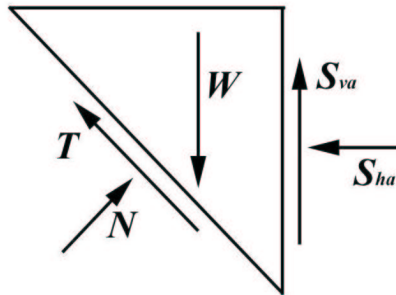


Figura 14.35

In questo caso viene introdotta una incognita aggiuntiva che è costituita dalla componente verticale della spinta attiva; in totale abbiamo 4 incognite: N , T , S_{ha} , S_{va}

Le equazioni che abbiamo a disposizione sono 4:

- 2 equazioni di equilibrio alla traslazione:

$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0$$
- 1 condizione di rottura del concio lungo la superficie di scorrimento:

$$T = c^I L + (N - U) \tan(\varphi^I)$$
- 1 condizione di scorrimento del terreno a contatto con il muro

$$S_{va} = S_{ha} \tan(\delta)$$

dove δ rappresenta l'angolo di attrito tra terra e muro.

La terza equazione deriva dalle condizioni di rottura del terreno in una situazione drenata:

$$\tau = c^I + (\sigma - u) \tan(\varphi^I)$$

questa equazione può essere integrata su tutta la superficie di scorrimento del concio di terreno:

$$\begin{aligned} \int_L \tau dl &= \int_L [c^I + (\sigma - u) \tan(\varphi^I)] dl \\ T &= c^I L + \int_L (\sigma - u) dl \tan(\varphi^I) \\ T &= c^I L + (N - U) \tan(\varphi^I) \end{aligned}$$

Con queste equazioni è possibile ricavare le incognite del problema tra le quali le due componenti della spinta attiva. Per la descrizione completa del problema è necessario determinare il punto di applicazione delle sollecitazioni N ed S_{ha} ; sono quindi indispensabili altre due equazioni per la risoluzione di questo problema. La prima equazione può essere quella di equilibrio alla rotazione attorno ad un conveniente punto; mentre per la seconda andiamo a considerare la spinta applicata ad un terzo dell'altezza del cuneo.

Osservazione

Abbiamo visto che l'attrito tra terra e muro può essere preso in considerazione solamente con il metodo di Coulomb; in questo caso l'effetto dell'attrito è quello di andare a ridurre il valore della spinta attiva S_a ed incrementare la spinta passiva S_p .

Il metodo di Coulomb può essere applicato anche andando a considerare dei meccanismi di collasso più complessi: un concio che si stacca lungo una superficie curva, oppure il meccanismo di collasso è costituito dal movimento relativo di più conci divisi tra loro da superfici piane.



Fig. 171

Nel primo caso la rottura del concio di terreno avviene lungo una superficie a spirale logaritmica, in questo caso non è possibile considerare il solo equilibrio alla traslazione ma è necessario imporre anche quello alla rotazione.

Nel secondo caso la rottura del terrapieno avviene attraverso lo scorrimento relativo di due blocchi, in questo caso vengono impiegate le equazioni di equilibrio alla traslazione ad ogni singolo blocco in quanto aumenta il numero delle incognite.

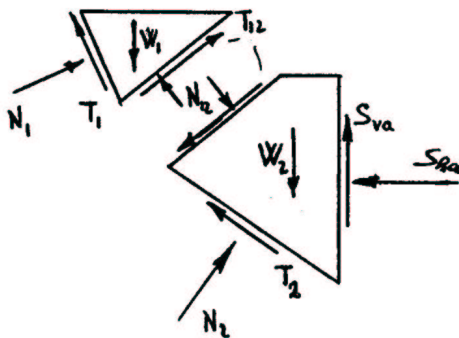


Fig. 172

Le incognite in questo caso sono date dalle due componenti della spinta attiva e da tutte le componenti di sollecitazione che si scambiano attraverso la superficie di rottura (2 componenti per ogni faccia).

In totale abbiamo quindi 8 incognite.

Le equazioni che possono essere imposte sono quelle di equilibrio alla traslazione in entrambe le direzioni per ogni concio (4 equazioni) più le condizioni di rottura in corrispondenza di ogni superficie (3 equazioni) ed infine l'equazione di attrito a contatto con il muro.

$$\begin{array}{lcl}
 \sum x_i = 0 & & \\
 \sum y_i = 0 & & \\
 T_i = c_i^I L_i + (N_i - U_i) \tan(\varphi_i^I) & & \\
 S_{va} = S_{ha} \tan(\delta) & &
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \text{ equazioni} \\ 3 \text{ equazioni} \\ 1 \text{ equazione} \end{array}$$

In totale abbiamo ottenuto 8 equazioni, per cui il problema può essere risolto.

Spinta con presenza di dreni

Se dietro un muro è presente una falda allora questa incrementa la spinta.

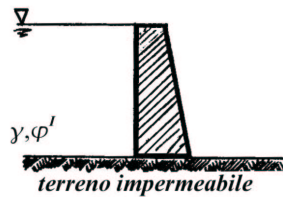


Fig. 213

Con una analisi a breve termine il problema deve essere studiato in condizioni non drenate e si suppone che l'altezza del muro sia sufficiente a sostenere il terrapieno.

A lungo termine invece l'analisi deve essere fatta in condizioni drenate considerando l'angolo di attrito φ' del terreno.

Anche in questo caso andiamo ad applicare il metodo di Coulomb considerando una superficie di rottura ed imponendo l'equilibrio sul concio di materiale.

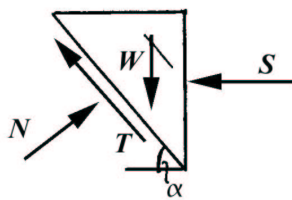


Fig. 214

L'equilibrio è dato da:

$$\begin{cases} N = W \cos(\alpha) + S \sin(\alpha) \\ T = W \sin(\alpha) - S \cos(\alpha) \end{cases}$$

Possiamo considerare la condizione di rottura del materiale trascurando il termine di coesione:

$$\tau = c' + (\sigma - u) \tan(\varphi') \quad \tau = (\sigma - u) \tan(\varphi')$$

a questo punto si può pensare di integrare lungo tutta la superficie di rottura:

$$\int \tau dl = \tan(\varphi') \int (\sigma - u) dl \quad T = (N - U) \tan(\varphi')$$

la quale può essere sostituita nella seconda equazione del sistema:

$$(N - U) \tan(\varphi') = W \sin(\alpha) - S \cos(\alpha)$$

$$N \tan(\varphi') = W \sin(\alpha) - S \cos(\alpha) + U \tan(\varphi')$$

la prima equazione del sistema può essere moltiplicata per $\tan(\varphi')$ e si ottiene che:

$$N \tan(\varphi') = W \cos(\alpha) \tan(\varphi') + S \sin(\alpha) \tan(\varphi')$$

A questo punto si possono eguagliare i secondi membri delle due equazioni scritte:

$$W \sin(\alpha) - S \cos(\alpha) + U \tan(\varphi') = W \cos(\alpha) \tan(\varphi') + S \sin(\alpha) \tan(\varphi')$$

Esplicitando questa espressione rispetto alla spinta S si ottiene che:

$$S = W \tan(\alpha - \varphi') + U \frac{\sin(\varphi')}{\cos(\alpha - \varphi')}$$

spinta sulla parete che tiene conto della presenza dell'acqua.

Tra terrapieno e muro possono essere inseriti diversi sistemi drenanti, ognuno dei quali introduce delle condizioni al contorno diverse e quindi un diverso moto di filtrazione che modifica l'andamento delle pressioni neutre e quindi delle tensioni efficaci.

Analisi limite

Introduzione

L'analisi limite studia le condizioni limite di una struttura. Si basa su due teoremi.

TEOREMA STATICO (o del limite inferiore): analizza una situazione equilibrata, ma non congruente.

TEOREMA CINEMATICO (o del limite superiore): analizza una situazione cinematicamente congruente, ma non equilibrata.

Non è detto che questi due teoremi forniscano la soluzione che ci serve, spesso otteniamo un'intervallo all'interno del quale si colloca la soluzione al problema.

Vediamo un paio di applicazioni che ci introducono all'analisi limite per la risoluzione dei problemi geotecnici.

Richiami sul principio dei lavori virtuali

Lavoro virtuale e lavoro di deformazione.



Un lavoro è virtuale quando tra le forze e gli spostamenti o gli sforzi e le deformazioni non vi sono legami.

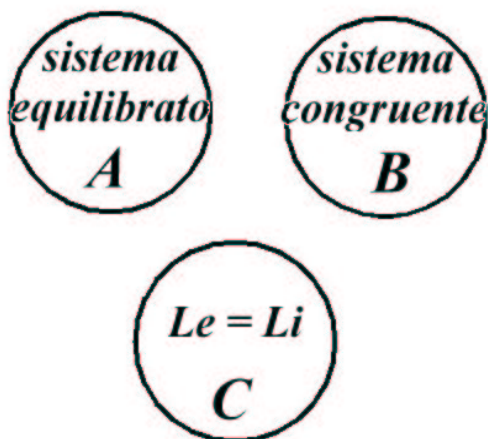
Quando sussiste una qualche correlazione il loro prodotto è un lavoro di deformazione.

Figura 14.36

Un principio è un assunto sempre valido, non si sono trovati casi in cui non vale. Un principio non si dimostra, mentre si dimostra un teorema partendo da delle ipotesi e seguendo dei passaggi logici.

Quando utilizzo il principio dei lavori virtuali spesso mi imbatto nel “discorso delle tre palle”.

Date due palle si dimostra la terza.



- 1) Ipotizzate valide A e B si deduce C.

Questo è il “Teorema dei lavori virtuali” impropriamente chiamato “Principio dei lavori virtuali”.

- 2) Ipotizzate A e C si deduce B.

Questo è il “Principio dei lavori virtuali in forma complementare” o “Principio delle forze virtuali”

- 3) o “Primo principio”.

- 4) Ipotizzate B e C si deduce A.

Questo è il “Principio dei lavori virtuali diretto” o “Principio degli spostamenti virtuali” o “Secondo principio”.

Solo in 2) e in 3) si invoca il principio dei lavori virtuali per dimostrarne la validità.

Figura 14.37

Nelle dimostrazioni dei teoremi dell'analisi limite si fa il confronto fra il sistema in condizioni di collasso ed un'altro sistema. Per quest'altro si assume che sia o equilibrato o cinematicamente ammissibile. Con le ipotesi che il lavoro è positivo e che la superficie di rottura o plasticizzazione è convessa si ottiene la disuguaglianza fra le forze.

Enunciato e dimostrazione dei teoremi dell'analisi limite

Possono essere enunciati due teoremi i quali definiscono un modo per determinare un limite superiore ed un limite inferiore al carico di collasso di un sistema:

TEOREMA STATICO: **LIMITE INFERIORE**
TEOREMA CINEMATICO: **LIMITE SUPERIORE**

Teorema statico:

TEOREMA STATICO: *Il teorema del limite inferiore afferma che se esiste un sistema di forze esterne F_i in equilibrio con uno stato tensionale interno σ_i^I in ogni punto e che non viola in nessun punto il criterio di rottura del materiale, allora il collasso non può avvenire e il livello dei carichi considerati rappresenta un limite inferiore per quello di rottura.*

Il teorema statico presuppone come ipotesi la presenza di un set di forze equilibrate F_i esterne e σ_i^I interne. Tale set statico non viola in nessun punto la condizione di rottura del materiale.

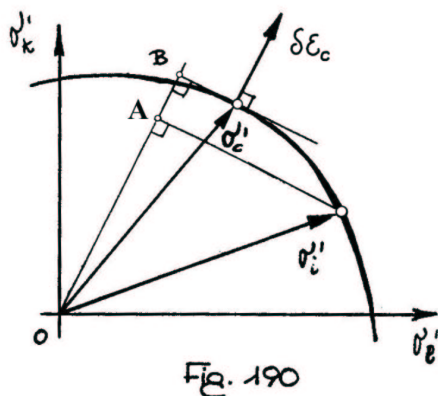
Può anche essere considerata la condizione di collasso del sistema; essa sarà caratterizzata da un set statico equilibrato F_c , σ_c^I e da un set cinematico congruente dw_c , $d\varepsilon_c$.

A questo punto possiamo applicare il PLV in due situazioni distinte, la prima tra il set statico F_i , σ_i^I e il set cinematico a collasso, mentre la seconda tra i set statico e cinematico di collasso; avremo quindi le seguenti equazioni:

$$\sum F_i \cdot \delta w_c = \int_V \sigma_i^I \cdot \delta \varepsilon_c dV \quad \text{PLV applicato alle condizioni di non rottura.}$$

$$\sum F_c \cdot \delta w_c = \int_V \sigma_c^I \cdot \delta \varepsilon_c dV \quad \text{PLV applicato alle condizioni di rottura.}$$

A questo punto è necessario andare a fare dei confronti tra queste due relazioni, a tale scopo nello spazio delle tensioni disegniamo un ipotetico dominio di rottura e riportiamo le condizioni di carico che sono state considerate nelle precedenti espressioni.



Consideriamo le seguenti quantità che compaiono nelle espressioni del PLV:

$$\sigma_c^I \cdot \delta \varepsilon_c \quad \sigma_i^I \cdot \delta \varepsilon_c$$

queste quantità possono essere viste come la proiezione del vettore rappresentativo dello stato tensionale sulla direzione del vettore deformazione plastica $\delta \varepsilon_c$ moltiplicata per il modulo di quest'ultimo.

Possiamo quindi vedere che OA è la proiezione di σ_i^I e OB la proiezione di σ_c^I , per cui si può affermare che:

$$\sigma_c^I \cdot \delta \varepsilon_c \geq \sigma_i^I \cdot \delta \varepsilon_c$$

e quindi integrando sul volume del sistema abbiamo che:

$$\int_V \sigma_c^I \cdot \delta \varepsilon_c dV \geq \int_V \sigma_i^I \cdot \delta \varepsilon_c dV$$

la quale può essere sfruttata per confrontare le due relazioni precedenti del PLV, dalle quali si ottiene che:

$$\sum F_c \cdot \delta w_c \geq \sum F_i \cdot \delta w_c$$

la quale è soddisfatta se e solo se risulta:

$$F_c \geq F_i$$

questo dimostra che il sistema di forze esterne F_i rappresenta un limite inferiore al carico di collasso F_c .

Teorema cinematico:

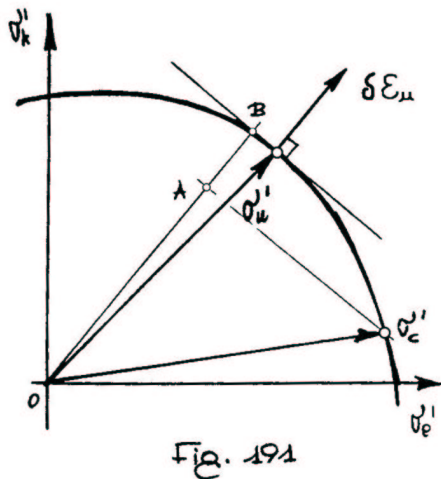
TEOREMA CINEMATICO: Il teorema del limite superiore afferma che assegnato un determinato meccanismo di collasso se il lavoro del sistema forze esterne eguaglia il lavoro dissipato dalle forze interne, allora il collasso avviene sicuramente e il sistema di forze considerato rappresenta un limite superiore al carico di collasso reale.

Il teorema cinematico considera un cinematisimo di collasso congruente δw_u , $\delta \varepsilon_u$ in corrispondenza del quale può essere calcolato attraverso il principio dei lavori virtuali un sistema di forze esterne il cui lavoro compiuto uguagli l'energia dissipata dalle tensioni interne; indichiamo tale set statico con F_u , σ_u^I . Si può quindi scrivere che:

$$\sum F_u \cdot \delta w_u = \int_V \sigma_u^I \cdot \delta \varepsilon_u dV$$

Può anche essere considerato il set statico equilibrato nelle effettive condizioni di collasso F_c , σ_c^I il quale può essere messo in relazione attraverso il PLV al set cinematisimo congruente relativo al meccanismo di collasso ipotizzato:

$$\sum F_c \cdot \delta w_u = \int_V \sigma_c^I \cdot \delta \varepsilon_u dV$$



Anche in questo caso per poter confrontare le due relazioni scritte facciamo riferimento nel piano delle tensioni ad una ipotetica superficie di rottura sulla quale riportiamo gli stati tensionali considerati.

Consideriamo le due quantità:

$$\sigma_c^I \cdot \delta \varepsilon_u \quad \sigma_u^I \cdot \delta \varepsilon_u$$

che rappresentano la proiezione del vettore relativo allo stato tensionale considerato lungo la direzione individuata dal vettore di plasticizzazione $\delta \varepsilon_u$ moltiplicata per il modulo di quest'ultimo. Si osserva che OA è la proiezione del vettore σ_c^I , mentre OB è la proiezione del vettore σ_u^I , per cui è possibile scrivere che:

$$\sigma_c^I \cdot \delta \varepsilon_u \leq \sigma_u^I \cdot \delta \varepsilon_u$$

La quale può essere integrata su tutto il volume del sistema:

$$\int_V \sigma_c^I \cdot \delta \varepsilon_u dV \leq \int_V \sigma_u^I \cdot \delta \varepsilon_u dV$$

e quindi possono essere confrontate le due espressioni precedenti del PLV e si ricava che:

$$\sum F_c \cdot \delta w_u \leq \sum F_u \cdot \delta w_u$$

la quale è soddisfatta se e solo se risulta che:

$$F_c \leq F_u$$

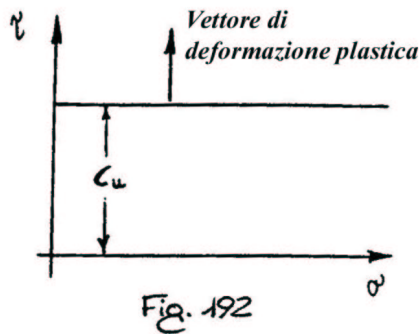
e questa relazione dimostra che i carichi associati ad un meccanismo di collasso congruente rappresentano un limite superiore al valore reale del carico di collasso.

Unendo i due risultati ottenuti si può dire che:

$$F_i \leq F_c \leq F_u$$

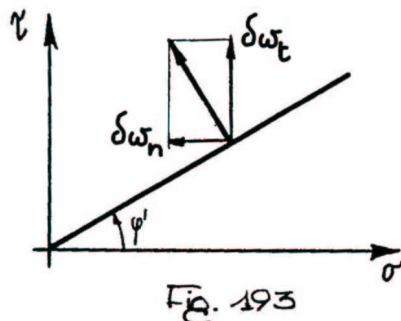
Si può osservare che nel teorema statico i calcoli possono essere fatti indipendentemente dalla conoscenza dello stato di deformazione del sistema, mentre nel teorema cinematico tale indipendenza si ha nei confronti dello stato di sforzo del terreno.

Consideriamo ora le superfici di rottura che sono state studiate fino a questo punto.
Rottura in condizioni non drenate:



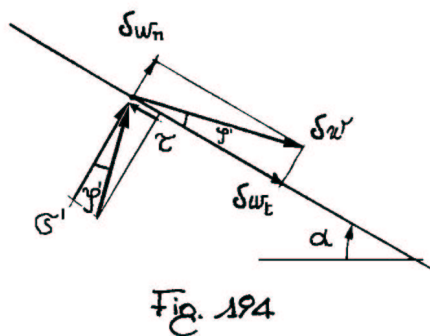
In questo caso l'analisi viene fatta in termini di tensioni totali. Si può osservare che il vettore di deformazione plastica ha componenti esclusivamente verticali, questo significa che la condizione di rottura del terreno avviene esclusivamente con scorrimenti tangenziali senza alcuna variazione di volume.

Rottura in condizioni drenate (senza coesione):



In questo caso l'analisi viene fatta in termini di tensioni efficaci.

Consideriamo una superficie di rottura inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale:



In condizioni di rottura sappiamo che sulla superficie di scorrimento si hanno due componenti di sollecitazione: una normale ed una tangenziale legate tra loro dalla relazione:

$$\tau = \sigma^I \tan(\varphi^I)$$

In condizioni di rottura la superficie subisce una deformazione la quale può essere quantificata con uno spostamento δw normale alla superficie di plasticizzazione nel piano delle tensioni; si può quindi dire che le due componenti di spostamento sono date da:

$$\delta w_n = \delta w \sin(\varphi^I) \quad \delta w_t = \delta w \cos(\varphi^I)$$

Si può osservare che la componente di spostamento della superficie di rottura risulta perpendicolare allo stato tensionale applicato. Si può ora calcolare il lavoro interno compiuto a seguito di questo

spostamento:

$$L_i = -\tau \delta w_t + \sigma^I \delta w_n \quad \text{ma} \quad \tau = \sigma^I \tan(\varphi^I)$$

$$L_i = -\sigma^I \tan(\varphi^I) \delta w_t + \sigma^I \delta w_n$$

$$L_i = -\sigma^I \tan(\varphi^I) \delta w \cos(\varphi^I) + \sigma^I \delta w \sin(\varphi^I) = -\sigma^I \delta w \sin(\varphi^I) + \sigma^I \delta w \sin(\varphi^I) = 0$$

$$L_i = 0$$

Da questa discussione ricaviamo che il lavoro interno compiuto dalle tensioni in condizioni di rottura risulta nullo per un terreno non coesivo e in condizioni drenate.

Possiamo ora analizzare il problema della stabilità di una parete verticale. lo scopo è quello di calcolare l'altezza critica del rilevato oltre il quale esso non è in grado di sostenersi da solo.

Facciamo prima un'analisi con il teorema cinematico e calcoliamo un limite superiore per H_{cr} e poi una analisi con il teorema statico e determiniamo un limite inferiore per H_{cr} .

Altezza critica con l'analisi cinematica

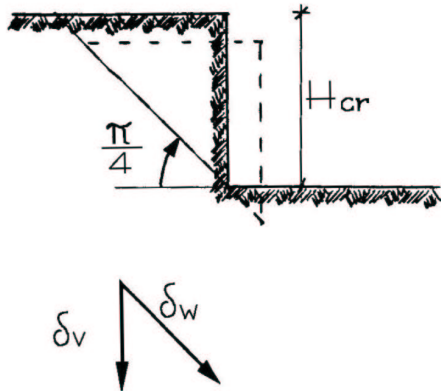


Fig. 187

Facciamo i calcoli supponendo che la rottura avvenga per un angolo di $\pi/4$.

$$\delta w = \delta v \sqrt{2}$$

Il lavoro esterno è quello eseguito dal peso proprio del concio che subisce uno spostamento in direzione verticale pari a δv .

$$L_{\text{est}} = \frac{1}{2} \gamma H_{cr}^2 \delta v$$

Il lavoro interno è dato dall'energia dissipata lungo la superficie di scorrimento in condizioni non drenate di rottura:

$$L_{\text{int}} = c_u \delta w H_{cr} \sqrt{2}$$

Uguagliando le due espressioni:

$$\frac{1}{2} \gamma H_{cr}^2 \delta v = c_u \delta w H_{cr} \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} \gamma H_{cr} \delta v = c_u \delta w \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} \gamma H_{cr} \frac{\delta w}{\sqrt{2}} = c_u \delta w \sqrt{2}$$

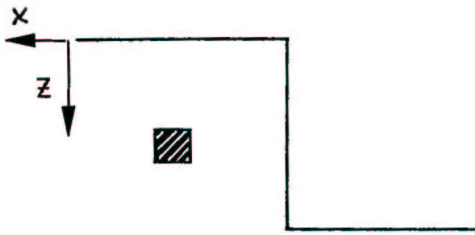
$$\frac{1}{2} \gamma H_{cr} \frac{1}{\sqrt{2}} = c_u \sqrt{2}$$

Dalla quale ricavo H_{cr} .

$$H_{cr} = \frac{4 c_u}{\gamma}$$

Abbiamo in questo modo determinato un limite superiore per l'altezza critica del rilevato.

Altezza critica con l'analisi statica



Come al solito consideriamo le equazioni di equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma$$

dalle quali integrando:

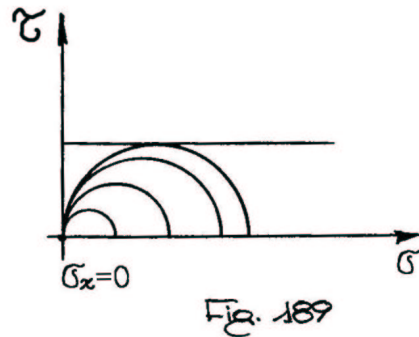
$$\sigma_x = \text{cost.}$$

$$\sigma_z = \gamma z + \text{cost.}$$

Imponendo le condizioni al contorno sul lato destro e superiore si ottiene che il valore delle due costanti è nullo, quindi:

$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_z = \gamma z$$



In funzione della profondità z aumenta la tensione σ_z e quindi aumentano le dimensioni del corrispondente cerchio di Mohr; la condizione limite di rottura viene raggiunta in corrispondenza dell'altezza critica ricercata:

$$\sigma_{z \text{ Cri}} = \gamma H_{cr} = 2c_u \quad H_{cr} = \frac{2c_u}{\gamma}$$

Con questa altezza del rilevato abbiamo determinato una soluzione equilibrata che in ogni punto non viola le condizioni di rottura; sono soddisfatte le ipotesi del teorema statico e quindi tale valore

dell'altezza rappresenta l'estremo inferiore del valore critico reale.

Unendo i due risultati ottenuti si può dire che:

$$\frac{2c_u}{\gamma} \leq H_{cr} \leq \frac{4c_u}{\gamma}$$

Andiamo ora ad applicare queste discussioni allo scopo di determinare le spinte attive e passive di un terrapieno contro un muro di sostegno.

Vogliamo valutare la spinta attiva, andremo ad applicare il teorema cinematico allo scopo di determinarne una valutazione limite superiore, dopodiché applicheremo il teorema statico per determinare una valutazione limite inferiore.

Limite superiore della Spinta attiva

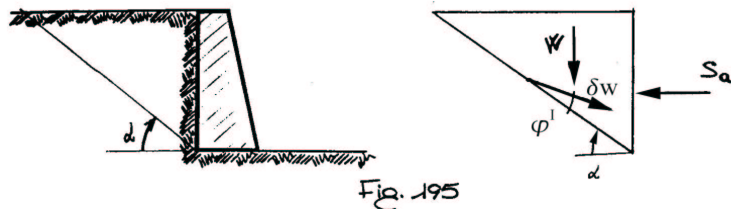


Fig. 195

Sappiamo che il lavoro compiuto dalle forze interne è nullo e quindi per la scrittura del PLV è sufficiente calcolare il lavoro compiuto dalle forze esterne che sono la componente di spinta attiva e il peso del concio di terreno.

La spinta attiva lavora per la componente orizzontale dello spostamento, mentre il peso del concio di terreno lavora per la componente verticale.

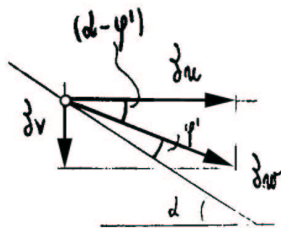


Fig. 196

Osservando la figura si può dire che:

$$\begin{cases} \delta u = \delta w \cos(\alpha - \varphi') \\ \delta v = \delta w \sin(\alpha - \varphi') \end{cases}$$

$$L_{est} = W \cdot \delta v - S_a \cdot \delta u = W \cdot \delta w \cdot \sin(\alpha - \varphi') - S_a \cdot \delta w \cdot \cos(\alpha - \varphi')$$

Il lavoro esterno per il PLV deve essere nullo, quindi:

$$W \cdot \delta w \cdot \sin(\alpha - \varphi') - S_a \cdot \delta w \cdot \cos(\alpha - \varphi') = 0$$

$$W \cdot \sin(\alpha - \varphi') - S_a \cdot \cos(\alpha - \varphi') = 0$$

$$S_a = W \cdot \tan(\alpha - \varphi')$$

Ricordando il valore di W:

$$S_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cot(\alpha)$$

abbiamo che:

$$S_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cot \alpha \tan(\alpha - \varphi')$$

Questo valore della spinta per ogni α considerato rappresenta un limite superiore al vero valore della spinta attiva. Tra questi infiniti valori il minimo darà quello più attendibile come limite superiore da adottare.

Il valore minimo si ottiene per:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}$$

e quindi abbiamo che:

$$S_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$$

questo è **il limite superiore**.

Limite inferiore della Spinta attiva

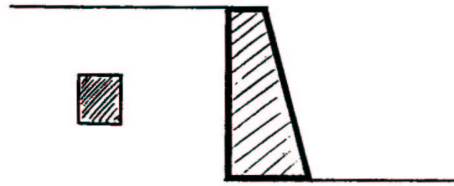


Fig. 197

Per applicare il teorema statico dobbiamo determinare una soluzione equilibrata e conforme (rispettosa in ogni punto delle condizioni di rottura del materiale).

Consideriamo le condizioni indefinite di equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \sigma_z &= \gamma z + \text{cost} \\ \sigma_x &= \text{cost} \end{aligned}$$

Imponendo le condizioni al contorno sulla σ_z in corrispondenza della superficie libera si ottiene che la corrispondente costante di integrazione è nulla, quindi:

$$\sigma_z = \gamma z$$

Questo livello tensionale relativo ai punti che si trovano su un piano orizzontale può essere riportato all'interno del piano di Mohr allo scopo di determinare la tensione orizzontale che porta alle condizioni di rottura su quel piano.

Il valore della tensione orizzontale che porta a rottura il terreno ad un determinato valore di affondamento z è dato da:

$$\sigma_x = k_a \sigma_z = k_a \gamma z$$

questo livello tensionale è costante rispetto alla variabile x e quindi soddisfa la relativa equazione di equilibrio.

Abbiamo trovato una soluzione equilibrata:

$$\sigma_z = \gamma z$$

$$\sigma_x = k_a \gamma z$$

che in ogni punto del campo non eccede le capacità di resistenza, per cui sono soddisfatte le ipotesi del teorema statico.

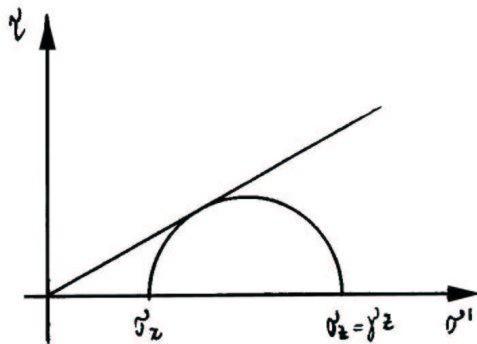


Fig. 198

Possiamo calcolare la risultante delle tensioni orizzontali contro il muro di sostegno:

$$Sa = \int_H \sigma_x dz = \int_H k_a \gamma z dz = k_a \gamma \int_H z dz = \frac{1}{2} \gamma H^2 k_a$$

Possiamo dire che questo valore rappresenta un limite inferiore della spinta attiva.

$$Sa = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right)$$

Questo è **il limite inferiore**.

Possiamo quindi osservare che nelle due trattazioni (teorema statico e teorema cinematico) abbiamo determinato un limite inferiore ed un limite superiore della spinta attiva che coincidono, quindi il valore ottenuto è quello effettivo che porta a collasso la struttura.

Un procedimento analogo può essere applicato per calcolare la spinta passiva contro il terreno da parte del muro di sostegno.

Limite superiore della Spinta passiva

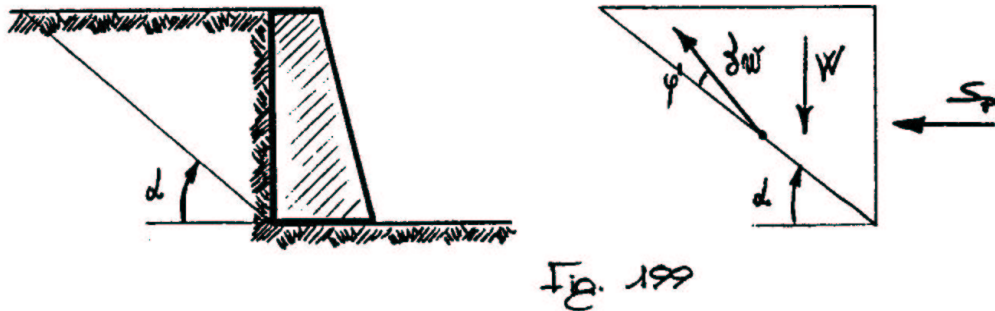
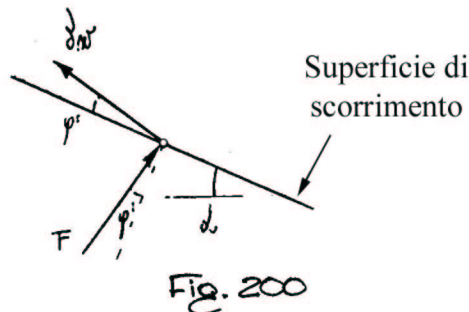


Figura 14. 0

Nel caso precedente abbiamo dimostrato che il lavoro svolto dalle forze interne risulta nullo, vediamo se tale proprietà è valida anche nel caso in cui lo scorrimento avvenga verso l'alto.

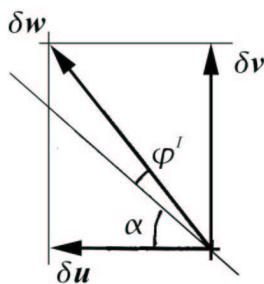


Senza fare i calcoli possiamo osservare che la componente di spostamento risulta perpendicolare a quella di sforzo e quindi il lavoro interno è sicuramente nullo:

$$L_{\text{int}} = 0$$

Figura 14. 0

Possiamo a questo punto calcolare il lavoro esterno, ma prima è necessario determinare le componenti di spostamento orizzontale e verticale del concio di terreno, le quali compiono lavoro rispettivamente per la forza esterna spinta passiva e peso proprio del concio.



Dalla figura osserviamo che:

$$\begin{cases} \delta u = \delta w \cos(\alpha - \phi') \\ \delta v = \delta w \sin(\alpha - \phi') \end{cases}$$

Fig. 201

Figura 14. 0

$$L_{\text{est}} = -W \cdot \delta v + Sp \cdot \delta u$$

Imponendo il PLV si ottiene il valore della spinta passiva:

$$\begin{aligned} -W \cdot \delta v + Sp \cdot \delta u &= 0 \\ -W \cdot \delta w \sin(\alpha + \phi') + Sp \cdot \delta w \cos(\alpha + \phi') &= 0 \\ -W \cdot \sin(\alpha + \phi') + Sp \cdot \cos(\alpha + \phi') &= 0 \\ Sp &= W \cdot \tan(\alpha + \phi') \end{aligned}$$

Ricordiamo che:

$$W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cot(\alpha)$$

e quindi:

$$Sp = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cot(\alpha) \cdot \tan(\alpha + \varphi')$$

Secondo il teorema cinematico ad ogni valore dell'angolo di questa espressione fornisce un estremo superiore per la spinta passiva Sp ; quindi tra tutti i valori di limite superiore andiamo a scegliere quello minimo che rappresenta il valore più attendibile per la vera spinta passiva.

Questa espressione si minimizza per:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}$$

E quindi avremo che:

$$Sp = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cdot \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right)$$

e questo è *il limite superiore*.

Limite inferiore della Spinta passiva

Andiamo ora ad applicare il teorema statico.

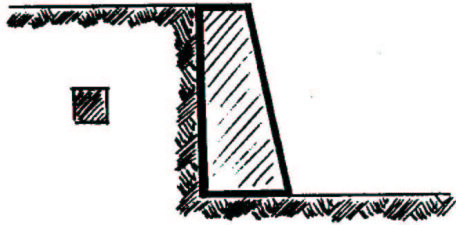


Fig. 202

Come nel caso precedente andremo a determinare una soluzione equilibrata e rispettosa delle condizioni di rottura del materiale.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_z = \gamma z + cost \\ \sigma_x = cost \end{cases}$$

Imponendo le condizioni al contorno per la σ_z sulla superficie del terrapieno si ottiene una costante nulla e quindi:

$$\sigma_z = \gamma z$$

Tale valore della tensione può essere portato all'interno del piano di Mohr allo scopo di determinare il valore della tensione orizzontale che per qualche determinato affondamento z porta alla rottura il terreno.

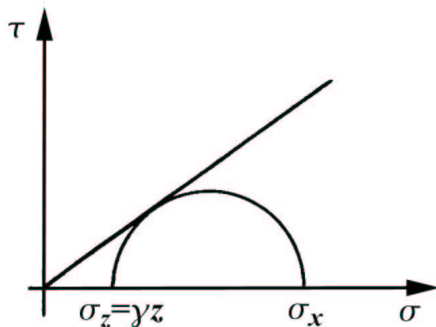


Fig. 203

Il massimo valore della tensione orizzontale che può essere applicato al terreno prima di violare le condizioni di rottura è dato da:

$$\sigma_x = k_p \sigma_z$$

dove k_p è il COEFFICIENTE DI SPINTA PASSIVA.

$$\sigma_z = \gamma z \quad \sigma_x = k_p \gamma z$$

quella che abbiamo scritto è una soluzione equilibrata, che non viola le condizioni di rottura del materiale; valgono quindi le ipotesi del teorema statico, per cui è possibile determinare un valore limite inferiore della spinta passiva calcolando la risultante delle tensioni orizzontali sull'altezza del muro:

$$Sp = \int_H \sigma_x dz = \int_H k_p \gamma z dz = k_p \gamma \int_H z dz = \frac{1}{2} k_p \gamma H^2$$

$$Sp = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$$

questo è **il limite inferiore**.

Osservando i due risultati ottenuti dal teorema statico e dal teorema cinematico si può vedere che il limite inferiore coincide con il limite superiore e quindi il valore ottenuto rappresenta la reale spinta passiva.

OSSERVAZIONE: Nel teorema statico per determinare la tensione orizzontale abbiamo moltiplicato σ_z per la costante k_p in modo tale da raggiungere le condizioni di rottura. Avremo comunque potuto moltiplicare anche per un coefficiente $k < k_0$ (sempre però con $k > k_a$), ed in questo caso si sarebbe trovata un'altra soluzione equilibrata e conforme, ma la corrispondente spinta passiva avrebbe assunto un valore più piccolo e quindi avremmo ottenuto un limite inferiore più basso. Abbiamo quindi spinto la tensione orizzontale al limite di rottura in modo tale da ottenere il valore massimo per il limite inferiore della spinta passiva.

Altezza critica del terrapieno

Con il teorema cinematico vediamo di calcolare l'altezza critica del terrapieno naturale:



Fig. 204

Il lavoro interno è sempre nullo, mentre per quanto riguarda il lavoro esterno abbiamo solamente il contributo della forza peso W e quindi è necessario calcolare la componente verticale dello spostamento.

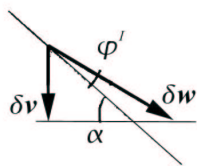


Fig. 205

$$\delta v = \delta w \sin(\alpha - \varphi')$$

quindi:

$$L_{est} = W \cdot \delta v = W \cdot \delta w \sin(\alpha - \varphi')$$

Imponendo l'equazione del PLV abbiamo che:

$$L_{est} = 0 \quad W \delta w \sin(\alpha - \varphi') = 0$$

$$\frac{1}{2} \gamma H^2 \cot(\alpha) \sin(\alpha - \varphi') = 0$$

Questa espressione, per ogni valore di α , deve fornire l'altezza del terrapieno che rappresenta un limite superiore alla reale altezza critica. Per quei valori di α per i quali si annullano le funzioni trigonometriche H risulta indeterminata, mentre per gli altri valori di α l'altezza deve risultare nulla.

Il minimo valore tra questo insieme di limiti superiore è dato da $H=0$, per cui un terreno dotato di attrito in condizioni drenate non permette la realizzazione di una parete naturale.

Stabilità di un pendio

Vediamo ora il caso di un terreno la cui superficie libera è inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale.



Fig. 206

Applicando il teorema cinematico supponiamo un meccanismo di rottura determinato dallo scorrimento di una porzione del terreno lungo una superficie inclinata e parallela alla superficie libera.

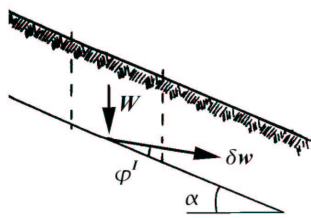


Fig. 207

Per scrivere il PLV consideriamo una porzione limitata di quella lastra che scorre. Lungo le due superfici ideali di definizione di questa porzione la distribuzione delle forze è la stessa e quindi il contributo al lavoro esterno su queste due superfici è nullo. L'unico contributo che abbiamo è quello della forza peso che lavora per uno spostamento:

$$\delta v = \delta w \sin(\alpha - \varphi^I)$$

Quindi:

$$L_{\text{est}} = W \delta v = W \delta w \sin(\alpha - \varphi^I)$$

Imponendo il PLV risulta che deve essere:

$$W \delta w \sin(\alpha - \varphi^I) = 0 \quad W \sin(\alpha - \varphi^I) = 0$$

Per ogni valore dello spessore della lastra che definisce il meccanismo di collasso abbiamo che il peso $W \neq 0$ e quindi la precedente equazione è soddisfatta se risulta che:

$$\sin(\alpha - \varphi^I) = 0 \quad \alpha - \varphi^I = 0 \quad \alpha_u = \varphi^I$$

Cioè per ogni spessore della lastra come limite superiore per l'inclinazione del terrapieno abbiamo l'angolo di attrito φ^I .

A questo punto andiamo a fare un'analisi statica allo scopo di determinare un limite inferiore per l'inclinazione α .

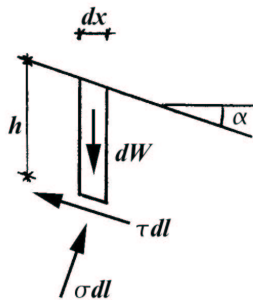
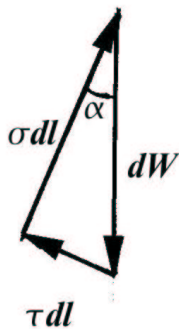


Fig. 208

Mettiamo in evidenza un elementino di volume appartenente al terrapieno nel modo indicato in figura. Su tale elementino applichiamo le equazioni di equilibrio in modo tale da determinare una soluzione equilibrata. Osserviamo inoltre che sulle due facce verticali la distribuzione delle tensioni è uguale ed opposta e quindi nelle equazioni di equilibrio non interviene.

Posiamo quindi scrivere che:



$$\begin{cases} \tau dl - dW \sin(\alpha) = 0 \\ \sigma dl - dW \cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau dl = dW \sin(\alpha) \\ \sigma dl = dW \cos(\alpha) \end{cases}$$

$$dW = \gamma h dx$$

$$dl = \frac{dx}{\cos(\alpha)}$$

Figura 14.38

$$\begin{cases} \frac{\tau dx}{\cos(\alpha)} = \gamma h dx \sin(\alpha) \\ \frac{\sigma dx}{\cos(\alpha)} = \gamma h dx \cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau = \gamma h \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \sigma = \gamma h \cos^2(\alpha) \end{cases}$$

Possiamo calcolare il rapporto tra questi due valori di tensione:

$$\frac{\tau}{\sigma} = \tan(\alpha)$$

Quest'ultima relazione afferma che nel piano di Mohr tale stato di sollecitazione si trova sulla retta uscente dall'origine e pendenza pari a $\tan \alpha$.

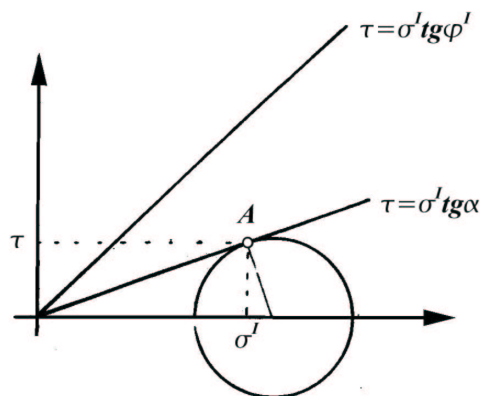


Fig. 210

Figura 14.39

Al variare dell'affondamento h il punto A si sposta lungo la retta di equazione $\tau = \sigma^I \tan \alpha$. A partire da questo punto si possono definire in modi diversi degli stati di sollecitazione che oltre ad essere equilibrati risultano anche conformi. Lo stato di sollecitazione più comodo da adottare è quello relativo al cerchio di Mohr tangente in A alla retta $\tau = \sigma^I \tan \alpha$. Questa scelta garantisce che la conformità non è violata in nessun punto del terrapieno fin tanto che l'angolo α rimane inferiore all'angolo d'attrito φ^I . Questo significa che il valore $\alpha = \varphi^I$ rappresenta il massimo dei limiti inferiori per l'inclinazione del terrapieno.

Possiamo quindi adottare:

$$\alpha_I = \varphi^I$$

Siccome φ^I rappresenta sia il limite inferiore che il limite superiore può essere adottato come valore ultimo dell'inclinazione del terrapieno oltre il quale abbiamo la rottura del sistema.

$$\alpha_{cr} = \varphi^I$$

Il massimo valore dell'inclinazione di un terreno non coesivo in condizioni drenate è pari al suo attrito φ^I e quindi l'unica possibilità che un terreno di questo tipo possa essere impiegato per realizzare una parete verticale è che il suo angolo di attrito sia pari a $\pi/2$.

Il metodo cinematico può essere applicato anche quando le condizioni di rottura del terreno vengono ipotizzate con un meccanismo a più blocchi.

Per scrivere le equazioni in questo caso è necessario tener presente che il lavoro interno compiuto lungo le sezioni di scorrimento risulta nullo, e quindi l'equazione è data semplicemente da: $L_{est} = 0$

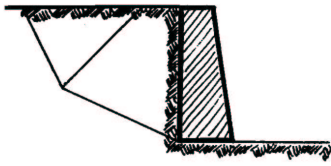


Fig. 211

Aumentando il numero dei blocchi per definire il meccanismo di collasso, aumentando i gradi di libertà del sistema e quindi se si vuole fare un discorso di minimizzazione o di massimizzazione della spinta è necessario considerare la teoria delle funzioni a più variabili.

Figura 14.40

Vediamo ora un meccanismo di tipo rotatorio; supponiamo che la superficie di rottura subisca uno spostamento perpendicolare al segmento che unisce il centro di rotazione con il punto considerato sulla superficie stessa.

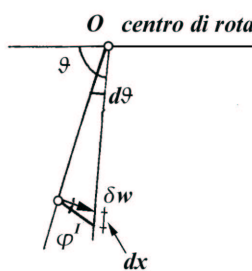


Fig. 212

La superficie che subisce lo spostamento sarà inclinata di un angolo φ^I rispetto al vettore spostamento. Secondo queste definizioni si può dire che:

$$dr = r d\vartheta \tan(\varphi^I) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{r} = \tan(\varphi^I) d\vartheta$$

Possiamo integrare questa equazione differenziale a partire da una condizione al contorno $r=r_0$ e $\vartheta=\vartheta_0$ e quindi abbiamo che:

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \tan(\varphi^I) d\vartheta$$

Figura 14.41

$$\left[\log(r) \right]_{r_0}^r = \left[\tan(\varphi^I) \vartheta \right]_{\vartheta_0}^{\vartheta}$$

$$\log\left(\frac{r}{r_0}\right) = \tan(\varphi^I)(\vartheta - \vartheta_0)$$

$$r = r_0 e^{(\vartheta - \vartheta_0) \tan(\varphi^I)}$$

Che rappresenta un **ARCO DI SPIRALE LOGARITMICA**.

Se il problema dovesse essere trattato in condizioni non drenate allora l'angolo di attrito sarebbe nullo ($\varphi^I=0$) e quindi l'espressione della superficie di rottura si semplifica e si ottiene un arco di circonferenza: $r=r_0$.

Dreno verticale

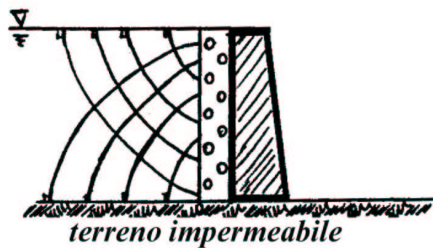


Fig. 215

Figura 14.42

La pressione neutra all'interno del drenò può essere considerata nulla e quindi la sua parete verso l'interno presenta una quota piezometrica variabile con z , per cui in tale posizione non abbiamo una superficie equipotenziale. Le linee di corrente e quelle equipotenziali formano un angolo diverso da 90° con la parete interna del drenò. Sia le linee di corrente che le superfici equipotenziali che giungono al drenò sono inclinate perché la superficie interna del drenò non è né una linea di corrente né una superficie equipotenziale. La superficie libera può essere considerata come una superficie equipotenziale, mentre lo strato impermeabile rappresenta una linea di corrente.

L'acqua che giunge nel drenò percola verso il basso, lì viene posato un tubo per smaltire l'acqua in eccesso per mantenere il drenò vuoto ed efficiente.

Con queste condizioni è possibile studiare il moto di filtrazione che caratterizza il sistema.

Dreno orizzontale

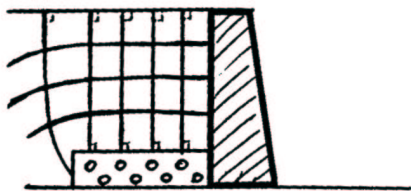


Fig. 216

Figura 14.43

Anche in questo caso la pressione neutra all'interno del drenò può essere considerata nulla, quindi la superficie superiore è una superficie equipotenziale. Anche la superficie libera del terrapieno è una superficie equipotenziale per cui le linee di corrente che partono dall'alto sono delle rette che cadono perpendicolarmente sulla fascia superiore del drenò.

Sulla superficie laterale del drenò la quota piezometrica varia con z e quindi non abbiamo le linee di corrente che arrivano perpendicolarmente su questa faccia del drenò. Al solito la superficie di separazione tra il terreno e lo strato impermeabile può essere considerata una linea di corrente.

Nella porzione di terrapieno sopra il drenò il moto di filtrazione è verticale verso il basso, e quindi l'equazione di Laplace può essere considerata la seguente:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

questo significa che h varia con legge lineare e quindi lo stesso tipo di variazione è caratteristica della pressione neutra.

Dreno inclinato

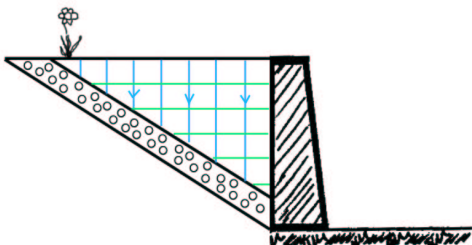


Figura 14.44

Applicazione riassuntiva dei 3 metodi

Consideriamo il piano di campagna orizzontale e la falda che arriva fino in superficie, supponiamo che il terreno sia caricato per una superficie limitata.

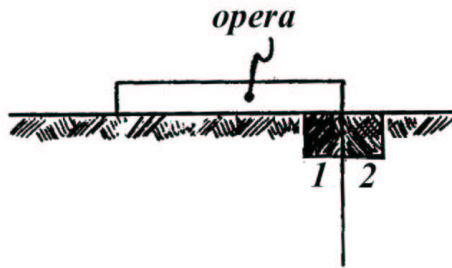


Fig. 178

Figura14.45

uguale alla tensione orizzontale dell'elementino 1:

$$\sigma_{h2} = \sigma_{h1}$$

Il sistema lo consideriamo in condizioni non drenate e quindi la condizione di rottura è definita da una retta:

$$\tau = c_u$$

nel piano di Mohr – Coulomb.

Facciamo una analisi secondo la teoria di Rankine applicando la condizione di rottura ai due elementini di terreno rappresentati in figura. Possiamo affermare che sull'elementino 2 agisce una tensione verticale nulla:

$$\sigma_{v2} = 0$$

ed una tensione orizzontale di cui a priori non conosciamo l'entità, ma possiamo certamente dire che per reciprocità questa deve risultare

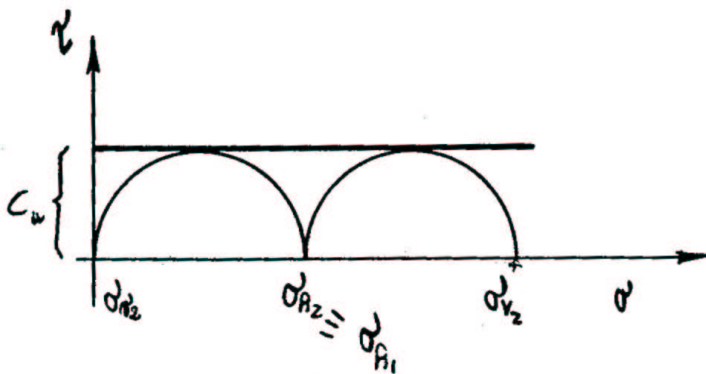


Fig. 179

L'elementino 2 raggiunge le condizioni di rottura nel momento in cui la sua tensione orizzontale arriva ad assumere il valore:

$$\sigma_{h2} = 2 c_u$$

Come sappiamo tale tensione deve risultare uguale alla tensione orizzontale dell'elementino 1, cioè:

$$\sigma_{h1} = 2 c_u$$

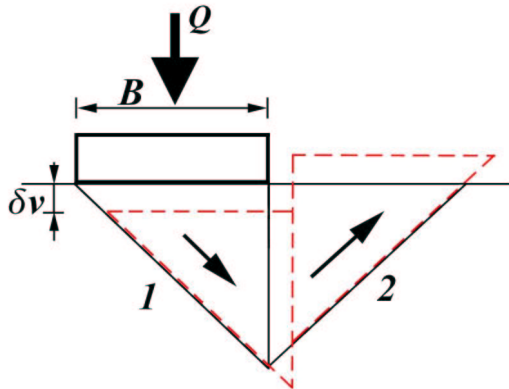
Figura14.46

La rottura dell'elementino 1 si avrà quando l'opera posta sopra il terreno sarà tale da indurre una tensione verticale sull'elementino 1 il cui cerchio di Mohr risulta essere tangente alla retta di rottura; tale condizione si ha quando:

$$\sigma_{v2} = 4 c_u$$

Questo livello di tensione è quello che secondo la teoria di Rankine porta a collasso il terreno che sostiene l'opera.

Andiamo a fare un'analisi secondo il teorema cinematico ipotizzando un meccanismo di collasso per il terreno che sostiene la struttura.



Per il calcolo del carico di collasso associato a questo meccanismo di rottura adottiamo il principio dei lavori virtuali.

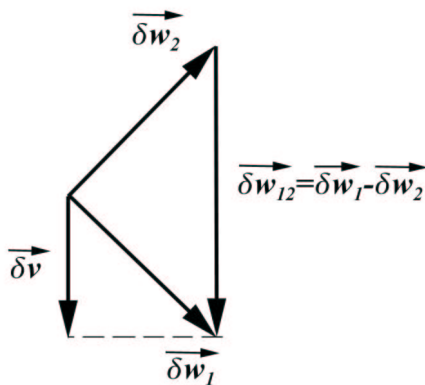
$$L_{\text{est}} = Q \delta v$$

Il calcolo del lavoro interno deve essere fatto moltiplicando la tensione tangenziale

$$\tau = c_u$$

per lo spostamento relativo subito dalle superfici di rottura per la relativa area.

Fig. 180



Una volta noti gli spostamenti relativi che si hanno sulle singole facce di scorrimento si può calcolare il lavoro interno:

Fig. 181

$$\delta w_1 = \sqrt{2} \delta v \quad ; \quad \delta w_2 = \sqrt{2} \delta v \quad ; \quad \delta w_{12} = 2 \delta v$$

Quindi vale che:

$$\begin{aligned} L_{\text{int}} &= c_u \sqrt{2} \delta v B \sqrt{2} + c_u 2 \delta v B + c_u \sqrt{2} \delta v \sqrt{2} B = \\ &= 2 c_u B \delta v + 2 c_u B \delta v + 2 c_u B \delta v = \\ &= 6 c_u B \delta v \end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza si può calcolare il valore del carico di collasso associato a questo meccanismo:

$$L_{\text{est}} = L_{\text{int}}$$

$$Q \delta v = 6 c_u B \delta v$$

$$Q = 6 c_u B$$

Dalla quale è possibile calcolare la tensione di contatto opera-terreno.

$$q = \frac{Q}{B} = 6 c_u$$

Applicando questi due procedimenti abbiamo ricavato due valori diversi per la tensione che conduce alla rottura del terreno; questi due metodi sono solamente una anticipazione dei metodi dell'analisi limite attraverso i teoremi del calcolo a rottura.

Analizziamo ora il problema precedente ipotizzando un nuovo meccanismo di collasso.

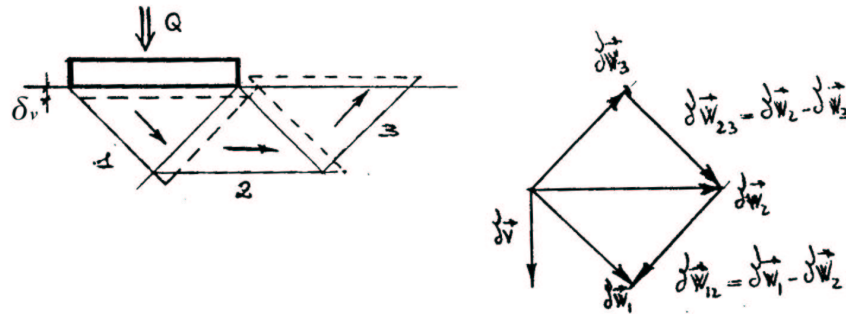


Fig. 182

Al solito il calcolo del lavoro esterno è dato da:

$$L_{\text{est}} = Q \delta v$$

Per il lavoro interno valutiamo gli spostamenti che ci interessano:

$$\begin{aligned} \delta w_1 &= \sqrt{2} \delta v & ; & & \delta w_2 &= 2 \delta v & ; & & \delta w_3 &= \sqrt{2} \delta v \\ \delta w_{12} &= \sqrt{2} \delta v & ; & & \delta w_{23} &= \sqrt{2} \delta v \end{aligned}$$

La tensione che viene esercitata sulle superfici di scorrimento è quella relativa alle condizioni non drenate :

$$\tau = c_u$$

per cui:

$$L_{\text{int}} = c_u \sqrt{2} \delta v \frac{B}{\sqrt{2}} + c_u 2 \delta v B + c_u \sqrt{2} \delta v \frac{B}{\sqrt{2}} + c_u \sqrt{2} \delta v \frac{B}{\sqrt{2}} + c_u \sqrt{2} \delta v \frac{B}{\sqrt{2}} =$$

$$= c_u \delta v B + 2 c_u \delta v B + c_u \delta v B + c_u \delta v B + c_u \delta v B$$

Da cui si ottiene:

$$L_{\text{int}} = 6 c_u B \delta v$$

Applicando l'uguaglianza tra il lavoro esterno e l'energia interna dissipata dalle tensioni tangenziali troviamo il seguente valore del carico:

$$Q \delta v = 6 c_u B \delta v$$

$$Q = 6 c_u B$$

Abbiamo ottenuto lo stesso risultato del caso precedente; questa però non è una cosa che deve avvenire sempre.

Il carico trovato in corrispondenza di questo meccanismo provoca sicuramente il collasso strutturale, e rappresenta un limite superiore al valore del carico di collasso reale. Siamo quindi sicuri che il carico di collasso reale non possa superare questo valore.

Consideriamo un altro meccanismo di rottura relativo sempre allo stesso tipo di problema.

Il meccanismo è costituito da due triangoli laterali e la porzione centrale è data da una serie di settori circolari di ampiezza infinitesima che insieme costituiscono un quarto di cerchio.

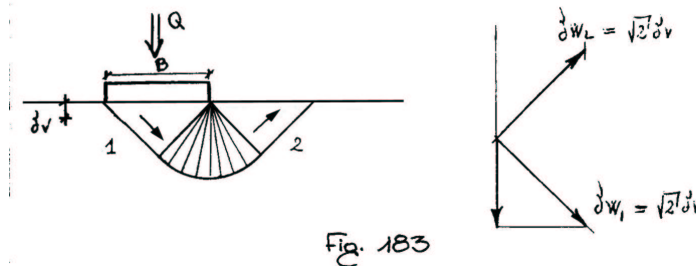


Fig. 183

A questo punto è necessario valutare gli spostamenti che subisce ogni conico elementare dell'arco di cerchio.

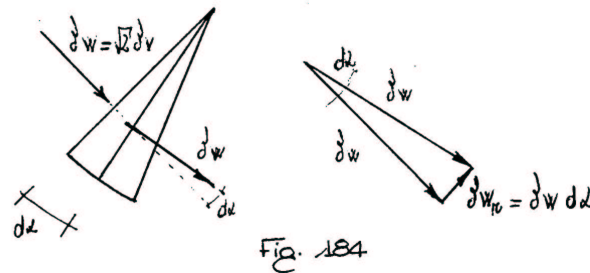


Fig. 184

$$L_{\text{est}} = Q \delta v$$

$$L_{\text{int}} = c_u \sqrt{2} \delta v \frac{B}{\sqrt{2}} + c_u \sqrt{2} \delta v \frac{B}{\sqrt{2}} + L_{\text{cerchio}}$$

Il lavoro sul cerchio è dato da due contributi, lo scorrimento dei conici lungo la superficie esterna e lo scorrimento relativo; facciamo il calcolo per un singolo conico e poi integriamo il lavoro elementare tra 0 e $\pi/2$.

$$c_u \delta w R d\alpha + c_u \delta w_r R = c_u R \delta w d\alpha + c_u R \delta w d\alpha = 2c_u R \delta w d\alpha$$

$$R = \frac{B}{\sqrt{2}} \quad \delta w = \sqrt{2} \delta v$$

Quindi il lavoro elementare diventa:

$$dL_{\text{cerchio}} = 2c_u R \delta w d\alpha = 2c_u \frac{B}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \delta v d\alpha$$

Integrando:

$$L_{\text{cerchio}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2Bc_u \delta v d\alpha = 2Bc_u \delta v \frac{\pi}{2} = \pi Bc_u \delta v$$

Da cui si ricava che:

$$L_{\text{int}} = 2Bc_u \delta v + \pi Bc_u \delta v = (2+\pi)Bc_u \delta v$$

Possiamo imporre l'uguaglianza dei lavori:

$$Q \delta v = (2+\pi)Bc_u \delta v$$

Da cui si ottiene:

$$Q = (2+\pi)Bc_u$$

Anche questo valore rappresenta un limite superiore al carico di collasso reale ed essendo numericamente più piccolo del precedente diventa un valore più attendibile.

Vediamo ora come può essere applicato il teorema statico a questo tipo di problema.

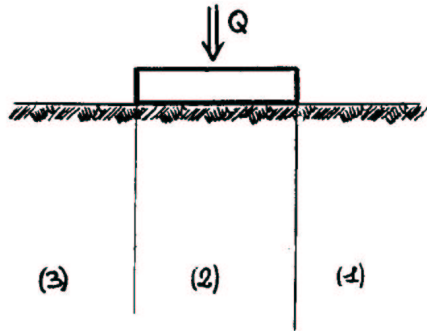


Fig. 185

Figura 14. 47

Dividiamo il terreno sotto il carico applicato in 3 porzioni diverse, supponiamo che la direzione orizzontale e quella verticale siano le direzioni principali di tensione, allora le condizioni di equilibrio possono essere espresse attraverso le seguenti equazioni indefinite:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma$$

Dalle quali:

$$\sigma_x = \text{cost.} \quad \sigma_z = \gamma z + \text{cost.}$$

Vediamo ora di determinare una soluzione del problema che soddisfi queste condizioni di equilibrio.

Ad una certa profondità z nella zona (1) e (3) la tensione verticale può essere scritta come:

$$\sigma_z = \gamma z$$

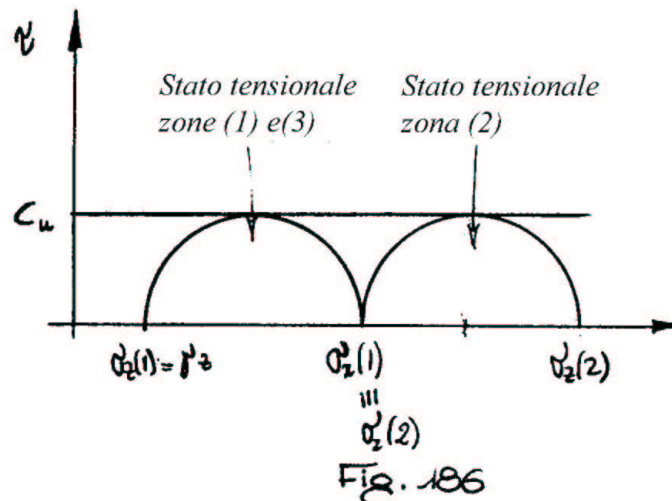


Fig. 186

Nelle zone (1) e (3) la tensione orizzontale massima che può essere calcolata è quella relativa alla condizione di rottura in una situazione non drenata; tale tensione è quindi data da:

$$\sigma_x(1) = \gamma z + 2c_u$$

Per l'equazione indefinita di equilibrio la tensione orizzontale non deve cambiare nella direzione x e quindi deve mantenersi inalterata anche nella zona di interfaccia tra la porzione (1) e la (2); possiamo quindi dire che:

$$\sigma_x(2) = \sigma_x(1) = \gamma z + 2c_u$$

A questo punto si può determinare la tensione verticale nella zona (2) tale per cui siano raggiunte le condizioni di rottura; tale tensione secondo il criterio di Mohr Coulomb può essere scritta come:

$$\sigma_z(2) = \sigma_x(2) + 2c_u = \gamma z + 4c_u$$

Nella zona (2) la tensione verticale può anche essere scritta come:

$$\sigma_z = \gamma z + q$$

dove q è il carico applicato al terreno da parte della struttura. In condizioni di rottura tale tensione dovrà uguagliare quella precedentemente determinata, quindi:

$$\gamma z + q = \gamma z + 4c_u$$

Dalla quale ottengo che:

$$q = 4c_u$$

che rappresenta il carico sotto il quale la soluzione determinata raggiunge le condizioni di rottura.

Tale carico rappresenta un limite inferiore al carico di collasso reale in quanto è stato determinato sfruttando una soluzione soddisfacente alle condizioni di equilibrio e che in ogni punto non viola il criterio di rottura del materiale.

Facendo un'altra trattazione con il teorema statico si può arrivare ad un valore diverso del carico che soddisfa alle ipotesi. Con questa particolare trattazione si ottiene che:

$$q = (2 + \pi) c_u$$

Il quale rappresenta il carico ottenuto applicando il teorema cinematico; questo significa che questo valore di carico risulta contemporaneamente limite inferiore e limite superiore, per cui è il vero valore del carico di collasso.