

## **Statica delle strutture in cemento armato precompresso**

### **Indice**

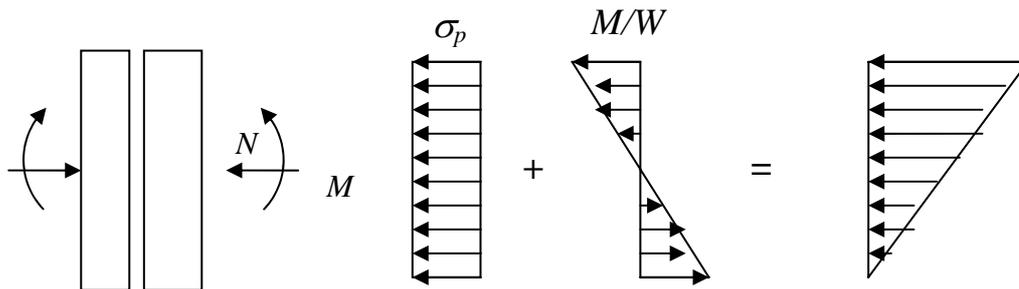
- 8.1) *Introduzione alla precompressione*
- 8.2) *L'effetto delle deformazioni lente.*  
*L'impossibilità di realizzare la precompressione con gli acciai ordinari da c.a.*
- 8.3) *Cenni storici*
- 8.4) *Sistemi di precompressione*
- 8.5) *Precompressione ad armatura post-tesa*
  - 8.5.1) *Tecnologia della precompressione ad armature post-tese*
    - 8.5.1.1) *Aspetti generali*
    - 8.5.1.2) *Formazione dei cavi*
    - 8.5.1.3) *Metodi di tesatura*
    - 8.5.1.4) *Sistemi di ancoraggio*
  - Fili e trefoli*
    - a) *ancoraggi a cuneo autobloccante:*
    - b) *ancoraggi a sostegno diretto*
    - c) *ancoraggi per barre*
  - 8.5.2) *La determinazione delle sollecitazioni nella sezione della trave precompressa*
  - 8.5.3) *Sistema equivalente alla precompressione*
  - 8.5.4) *Le cadute di tensione per le travi precomprese ad armatura post-tesa*
  - 8.5.5) *la variazione di tensione lungo il cavo per effetto dell'attrito*

## Capitolo 8

### Statica delle strutture in cemento armato precompresso

#### 8.1) Introduzione alla precompressione

L'idea della precompressione è molto semplice. E' spontaneo, ad esempio, se si volesse spostare una fila di libri da una mensola ad un'altra, di stringere fra le mani un gruppo di volumi in modo da poterlo così sollevare e disporlo nella nuova posizione. Le mani stringono i volumi fra loro, esercitando una forza di compressione  $N$  sufficiente affinché essi non cadano.



Il principio della precompressione

Fig.1

La Fig.1 illustra la capacità di assorbire azioni flessionali da parte delle sezioni compresse dei libri attraverso la sovrapposizione della compressione  $N$  con la distribuzione delle tensioni da momento flettente  $M$  derivante dal peso dei libri stessi.

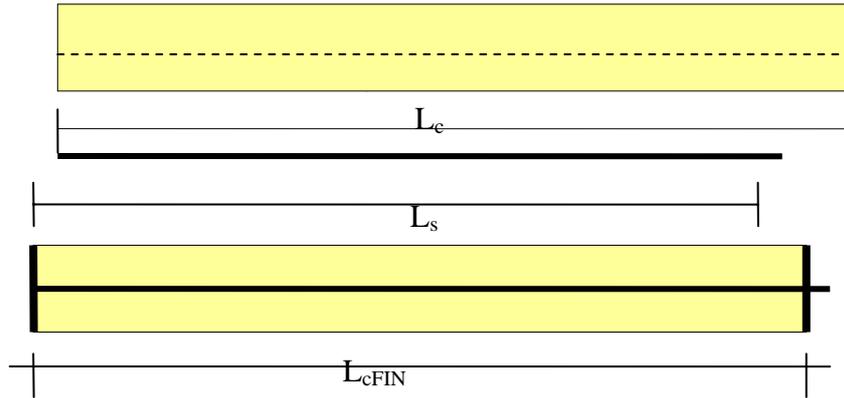
Nella figura è stato considerato il caso in cui sulle sezioni dei libri agisca un momento flettente di entità tale da produrre compressione zero sul bordo inferiore delle sezioni e quindi una situazione prossima all'inizio del distacco, non essendo i volumi incollati tra loro.

Analogamente si opera nella precompressione di una trave in c.a. Immaginiamo di realizzare una trave di calcestruzzo, di lunghezza  $L_c$ , con un foro disposto in asse al suo interno, e nel quale si dispone, prima del getto, una guaina tubolare.(Fig.2). Viene poi allestita una barra di acciaio di lunghezza opportuna,  $L_s$ , inferiore ad  $L_c$ . La barra viene disposta all'interno del foro passante nella trave di calcestruzzo ed una estremità saldata su una piastra di acciaio a contatto con la testata della trave. Un'altra piastra viene disposta sull'altra testata: tale piastra presenta un foro centrale in modo che la barra, con l'estremità filettata, possa passare attraverso di essa.

La barra veniva messa in trazione con un martinetto, che agisce a contrasto sulla testata della trave, e successivamente bloccata sulla piastra forata a mezzo di un'opportuna bullonatura. La lunghezza della trave, una volta eseguita tale operazione, diventa  $L_{c,fin}$ .

Con la suddetta operazione, la barra di acciaio, che va in trazione, si allunga e la sua lunghezza passa quindi da  $L_s$  ad  $L_{s,fin}$  mentre la trave di calcestruzzo, che va in compressione, si accorcia e la sua lunghezza si riduce da  $L_c$  ad  $L_{c,fin} = L_{s,fin}$ .

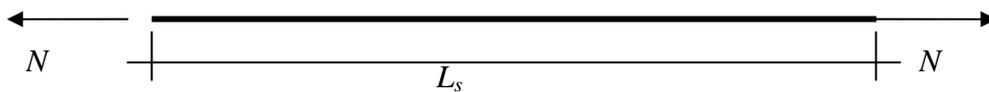
Con tale operazione nella trave viene realizzata una distorsione tra la barra interna in acciaio e il prisma in calcestruzzo. Di conseguenza, si produce nella trave uno stato di coazione e quindi una presollecitazione.



La distorsione realizzata nella trave

Fig.2

Si indichi con  $N$  la forza di trazione cui viene sottoposta la barra di acciaio(Fig.3): la forza di compressione che agisce sulle sezioni della trave di calcestruzzo è quindi  $-N$ . Siano inoltre  $E_c$  ed  $A_c$  rispettivamente il modulo elastico istantaneo del calcestruzzo e l'area delle sezioni trasversali forate della trave. Analogamente,  $E_s$  ed  $A_s$  indicano il modulo di elasticità dell'acciaio della barra e l'area della sezione della barra stessa.



La barra tesa

Fig.3

Per effetto dell'operazione di messa in tensione della barra, questa si allunga elasticamente della quantità

$$\Delta L_s = \frac{NL_s}{E_s A_s}$$

per cui la lunghezza totale della barra diventa

$$L_{s,fin} = L_s + \Delta L_s = L_s + \frac{NL_s}{E_s A_s}$$

La trave di calcestruzzo a sua volta si accorcia elasticamente della quantità

$$\Delta L_c = \frac{NL_c}{E_c A_c}$$

per cui la sua lunghezza definitiva diventa

$$L_{c,fin} = L_c - \Delta L_c = L_c - \frac{NL_c}{E_c A_c}$$

Le due lunghezze  $L_{c,fin}$  della trave e  $L_{s,fin}$  della barra sono tra loro eguali. Si ha quindi

$$L_{c,fin} = L_{s,fin}$$

ovvero

$$L_c - \frac{NL_c}{E_c A_c} = L_s + \frac{NL_s}{E_s A_s}$$

e quindi ordinando

$$L_c - L_s = N \left( \frac{L_c}{E_c A_c} + \frac{L_s}{E_s A_s} \right)$$

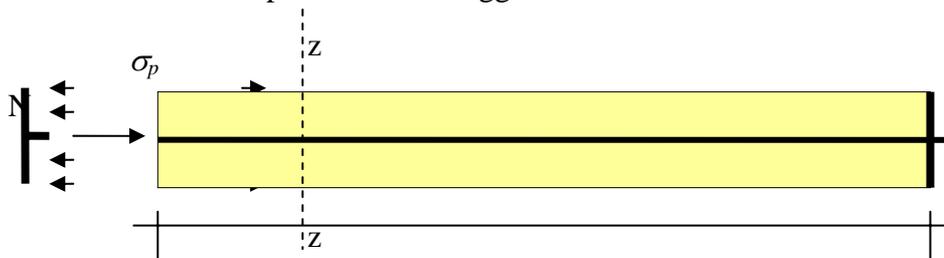
Ricaviamo la forza  $N$  che si è generata all'interno della barra e che comprime la trave

$$N = E_s A_s \frac{L_c - L_s}{L_s + L_c \frac{n A_s}{A_c}}$$

dove

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

Nella Figura 4 che segue è indicata l'interazione alla testata sinistra tra la barra tesa, la trave di calcestruzzo e la piastra di ancoraggio.



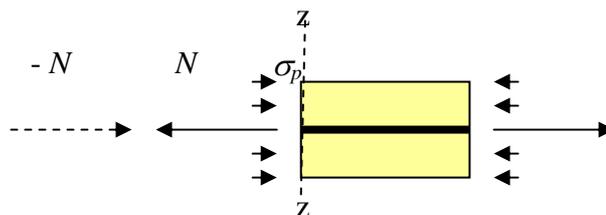
L'interazione tra la piastra di ancoraggio e la testata della trave

Fig.4

La trave di calcestruzzo con la barra tesa al suo interno è in uno stato di coazione cioè è soggetta ad uno stato *autoequilibrato* di sollecitazione.

Nella Fig.5 è così indicato un generico concio della trave precompressa ottenuta sezionando la trave stessa.

Nella generica sezione trasversale  $z - z$  la risultante di tutte le forze agenti, ad esempio alla sinistra della sezione  $z - z$ , è nulla. Sezionando la sezione  $z - z$ , e quindi tagliando anche la barra tesa, vediamo che sulla sezione della barra il tratto a sinistra di questa esercita sul tratto destro la forza  $N$ . Sulla sezione  $z - z$  di calcestruzzo della trave la parte sinistra della trave dovrà a sua volta esercitare una *distribuzione di compressioni avente risultante  $-N$* , cioè *eguale ed opposta alla forza  $N$*  esercitata dalla barra tesa.



Lo stato di sollecitazione autoequilibrato nella generica sezione della trave precompressa

Fig.5

La distribuzione delle compressioni  $\sigma_p$  agenti sulla sezione di calcestruzzo avrà quindi come risultante la forza  $-N$  applicata in asse alla trave e  $q$  sarà costituita da una distribuzione di compressioni uniformemente distribuite sulla sezione.

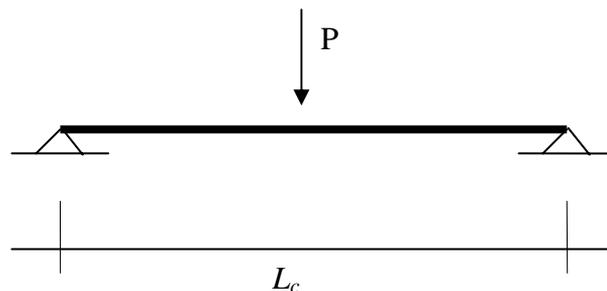
L'aspetto significativo della precompressione risiede nel fatto che le sezioni di calcestruzzo della trave, dopo l'operazione di messa in tensione della barra, risultano soggette a compressione uniforme e quindi in grado di sostenere una sollecitazione addizionale che produrrebbe nella sezione della trave non precompressa sforzi di trazione.

Pur ammettendo al calcestruzzo resistenza a trazione zero, le sezioni di calcestruzzo della trave precompressa sono in grado quindi di assorbire, senza fessurarsi, un momento flettente massimo pari a

$$M_{\max} = \sigma_p W$$

se  $W$  è il modulo di resistenza della sezione. Se la trave dell'esperimento venisse caricata da una forza concentrata applicata al centro e non si considerasse l'effetto del peso proprio della trave (Fig.6) essa sarebbe in grado di assorbire l'azione di una forza concentrata  $P$  tale che

$$PL/4 = \sigma_p W$$



*Il travetto precompresso che sostiene la forza  $P$  in mezzeria*  
Fig.6

se

$$\sigma_p = \frac{N}{A_c}$$

è la compressione prodotta dalla precompressione. Si può notare ancora che se posizionassimo la barra d'acciaio, invece che in asse alla trave di calcestruzzo, in posizione eccentrica, potremmo meglio sfruttare la precompressione (Fig.7). In tal caso, detta  $e$  l'eccentricità della barra tesa rispetto all'asse della trave, le sollecitazioni presenti nella sezione di solo calcestruzzo hanno come risultante una forza assiale  $N$  eccentrica.



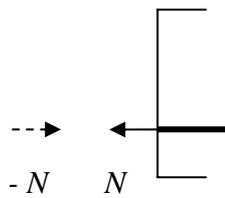
*precompressione della trave con un cavo eccentrico*  
Fig.7

Se questa agisce all'interno del nocciolo della sezione la distribuzione delle sollecitazioni nella sezione di calcestruzzo della trave è tutta di compressione. La massima compressione  $\sigma_i$ , presente sul bordo inferiore della sezione vale allora

$$\sigma_i = \frac{N}{A} + \frac{Ne}{W_i}$$

se  $A$  è l'area e  $W_i$  il modulo di resistenza della sezione rispetto al suo bordo inferiore. Come vedremo più avanti, è possibile realizzare la precompressione con un cavo curvo con il sistema di precompressione ad armatura post-tesa

In definitiva quindi, con la tecnica della precompressione, o come anche si dice, della presollecitazione, si produce nell'interno della trave uno stato di autotensioni, cioè uno stato autoequilibrato di sollecitazioni interne. Tale stato viene descritto (Fig.8) indicando sulla generica sezione della trave due forze, uguali ed opposte, di cui quella a tratto continuo indica la forza di trazione  $N$  agente sulla sezione dell'armatura in acciaio mentre con  $-N$ , a tratteggio, si indica la forza di precompressione, uguale ed opposta ad  $N$ , che agisce sulla sezione di calcestruzzo della trave. Alla compressione  $-N$  corrispondono le sollecitazioni  $\sigma_c$  distribuite nella sezione di calcestruzzo.



Lo stato di sollecitazione della precompressione  
Fig.8

Le sollecitazioni così create all'interno della trave modificano le caratteristiche meccaniche apparenti del materiale, in particolare del calcestruzzo, e determinano una sua resistenza fittizia a trazione.

Il concetto della presollecitazione è molto antico. Basti pensare al processo di produzione delle botti. In esse l'involucro, formato da doghe di legno accostate, non possiederebbe impermeabilità nemmeno se le doghe, solo semplicemente accostate, fossero poi cerchiare da anelli metallici. Se invece si produce una deformazione iniziale di contrazione delle doghe, mediante presollecitazione degli anelli metallici per forzamento ed effetto termico, viene data al legno la capacità di compensare le deformazioni di trazione conseguenti al riempimento della botte e quindi determinando una perfetta tenuta.

Un altro esempio di precompressione è quello che interessa i raggi di una ruota di bicicletta: questi vengono tesi in fase di costruzione per evitare che entrino in compressione sotto la forza trasmessa dal mozzo a bicicletta carica.

Esistono anche strutture che per il loro comportamento possono considerarsi presollecitate, anche se le tensioni interne non sono prodotte da stati di coazione, bensì da forze esterne permanentemente ad esse applicate, quali il peso proprio. Questi stati di sollecitazione hanno aspetti favorevoli quanto quelli prodotti artificialmente. Un esempio di questo tipo di strutture è dato dall'arco in conci di pietra opportunamente tracciato. Gli sforzi di compressione, prodotti fra i conci dal peso proprio, pongono i

giunti dell'arco in grado di resistere ad azioni flettenti provocate dai sovraccarichi e dallo stesso peso proprio.

Il materiale da costruzione che giova in modo particolare della presollecitazione è il conglomerato cementizio, al quale viene conferita una più alta resistenza a trazione apparente, previa applicazione di una compressione, prodotta in genere da armature d'acciaio poste in tensione. Tale tecnologia, che come vedremo più avanti, per poter essere effettivamente utilizzata ha richiesto l'uso di acciai speciali, viene indicata come quella del cemento armato precompresso

### *Esempi*

Si precomprime una trave di sezione quadrata di 15 cm di lato e della lunghezza di 4,00 m con una barra  $\phi$  32. L'allungamento impresso è di 4 mm.

I dati iniziali sono:

$$L_c = 400\text{cm}; L_s = 399,6\text{cm} \quad A_s = 1\phi 32 = 8,04\text{cm}^2 \quad A_c : 15\text{cm} \times 15\text{cm}; A_c = 225\text{cm}^2$$

$$E_s = 2060000\text{kg/cm}^2; E_c = 300000\text{kg/cm}^2$$

Si ha quindi

$$n = 6,87; L_c - L_s = 0,4\text{ cm}; N = 13308\text{ kg}; \sigma_c = 59\text{ Kg/cm}^2$$

La tensione nell'acciaio risulta quindi  $\sigma_s = 1655\text{ kg/cm}^2$ .

Con tale precompressione il travetto è quindi soggetto ad una compressione uniforme  $\sigma_p$  di circa 69 kg/cm<sup>2</sup>. Con i dati del problema, la sezione precompressa di calcestruzzo può assorbire un momento di  $59 \times 15^3 / 6 = 332\text{ kgXm}$  fino ai limiti della rottura e quindi in grado di annullare su un bordo la compressione agente. Nello schema di trave appoggiata agli estremi il travetto di luce di 400 cm circa è quindi in grado di sostenere un carico concentrato centrale P pari a  $P \times 4,00 / 4 = 332$  e quindi un carico  $P = 332\text{ kg}$ .

### *Barra eccentrica*

Si disponga ora la stessa barra  $\phi$  32 nella stessa sezione quadrata 15cmX15cm dell'esempio precedente, ma invece che in asse alla trave con una eccentricità di 2 cm.

La barra risulti sottoposta allo stesso tiro di  $N = 13308\text{ kg}$ . La sollecitazione di compressione agente al bordo inferiore delle sezioni della trave, per effetto della sola precompressione, con  $W_i = 15^3 / 6 = 562,5\text{ cm}^3$  vale

$$\sigma_i = \frac{13308}{225} + \frac{13308 \times 2,0}{562,5} = 59,1 + 47,3 = 106,4\text{ kg/cm}^2$$

Il momento flettente massimo che la trave può allora assorbire diventa ora

$$M = 106,4 \times 562,5 = 598,5\text{ kgm}$$

. Nello schema di trave appoggiata agli estremi, il travetto di luce di 4,00 m è in grado di sostenere ora un carico concentrato centrale P pari a  $P \times 4,00 / 4 = 598,5$  e quindi un carico  $P = 598,5\text{ kg}$ , circa 1,8 volte maggiore di quello precedente.

## **8.2) L'effetto delle deformazioni lente.**

### ***L'impossibilità di realizzare la precompressione con gli acciai ordinari da c.a.***

All'inizio del secolo in numerosi laboratori europei venivano eseguiti esperimenti sulla precompressione, realizzata come prima descritto, ed i travetti precompressi venivano poi soggetti a flessione applicando carichi permanenti nel tempo. Accadeva che dopo un certo tempo tutte le travi sottoposte a prova *collassavano*.

All'inizio non risultava chiara la spiegazione di tale fenomeno. Solo più tardi si capì, con il progredire della conoscenza sul comportamento del calcestruzzo, che il collasso era dovuto al fatto che la precompressione si perdeva gradualmente nel tempo, a causa, in primo luogo, delle deformazioni viscoso e del ritiro del calcestruzzo.

Le testate dei travetti precompressi, su cui fanno contrasto le barre tese attraverso le piastre di ancoraggio, si avvicinavano via via nel tempo fra loro di piccolissime quantità. Nel complesso veniva valutato che tale avvicinamento delle testate corrispondeva mediamente ad una deformazione di contrazione  $\Delta\varepsilon_c^*$  all'incirca pari almeno ad  $1/1000$ . La tensione nell'acciaio della barra doveva quindi subire un calo  $\Delta\sigma_s$  pari a

$$\Delta\sigma_s = E_s \Delta\varepsilon_c^*$$

e quindi pari a  $2.060.000 \times 10^{-3} = 2.060 \text{ kg/cmq}$ .

In definitiva, nell'esempio trattato tutta la deformazione estensiva impressa alla barra con la precompressione sarebbe stata annullata dalla deformazione lenta contrattiva dovuta al ritiro ed alla viscosità del calcestruzzo. Si sarebbe così perso tutto lo sforzo di precompressione e le sollecitazioni di precompressione sarebbero andate a zero. Il travetto dopo un certo tempo doveva fatalmente *collassare*.

La situazione sarebbe diversa se fosse stato possibile produrre un allungamento e quindi una deformazione estensiva della barra *molto più elevata*. Ciò all'epoca non era possibile in quanto gli acciai che potevano all'epoca essere prodotti presentavano tensioni di snervamento non superiori ai 2200 - 2400 kg/cmq. Sarebbe stato ancora possibile realizzare una precompressione che si sarebbe conservata nel tempo se, invece di utilizzare acciai più resistenti e quindi sottoporli a tensioni più elevate, si sarebbero potuti realizzare acciai con modulo di elasticità molto più piccolo, almeno quattro volte più piccolo del modulo di 2.060.000 kg/cmq

Tutti gli acciai, d'altra parte, indipendentemente dalla loro tensione di rottura, presentano un modulo di elasticità praticamente costante e pari a 2060000 kg/cmq.

Solo quando, con il progredire della tecnologia della produzione dell'acciaio, si riuscirono a produrre acciai almeno quattro volte più resistenti di quelli comuni dell'epoca, la precompressione divenne effettivamente realizzabile. Tali tipi di acciai, come illustrato dettagliatamente al par. 1. , vennero detti *armonici*.

La Fig.9 illustra, a confronto, i diagrammi  $\sigma_s - \varepsilon_s$  dell'acciaio normale, dell'acciaio armonico e di un ipotetico acciaio a basso modulo di elasticità: nella figura è anche indicata la deformazione di caduta  $\Delta\varepsilon_s$ . Si comprende quindi come con gli acciai normali, cioè quelli da c.a. ordinario, la precompressione non è possibile e come invece lo sia con gli acciai cosiddetti armonici, caratterizzati da resistenza dell'ordine dei 16000 - 18000 kg/cmq.

E' importante ancora rilevare che il fatto che la precompressione induce solo uno stato di sollecitazione autoequilibrato, e quindi con caratteristiche della sollecitazione tutte nulle - *sforzo assiale zero, momento flettente e taglio zero* - spiega anche come con la precompressione *non possano svilupparsi effetti instabilizzanti*.

In sostanza gli effetti instabilizzanti prodotti dal flettersi della trave di calcestruzzo compressa vengono annullati dagli effetti stabilizzanti prodotti dall'incurvarsi della barra di acciaio tesa. Ciò consente oggi di realizzare travi sottili, della luce ad esempio di 40 - 50 m con un'anima dello spessore dell'ordine dei 25 - 30 cm e che vengono soggette a forze di precompressione dell'ordine di diverse centinaia di tonnellate.

Con la produzione degli acciai armonici la tecnica della precompressione trovò quindi subito grande diffusione e successo e in molte realizzazioni si rivelò più efficiente della tecnica del c.a.

Una misura dell'efficienza della precompressione è indicata dal coefficiente di rendimento della precompressione

$$\eta = \frac{\sigma_{s\infty}}{\sigma_{si}} \quad (1)$$

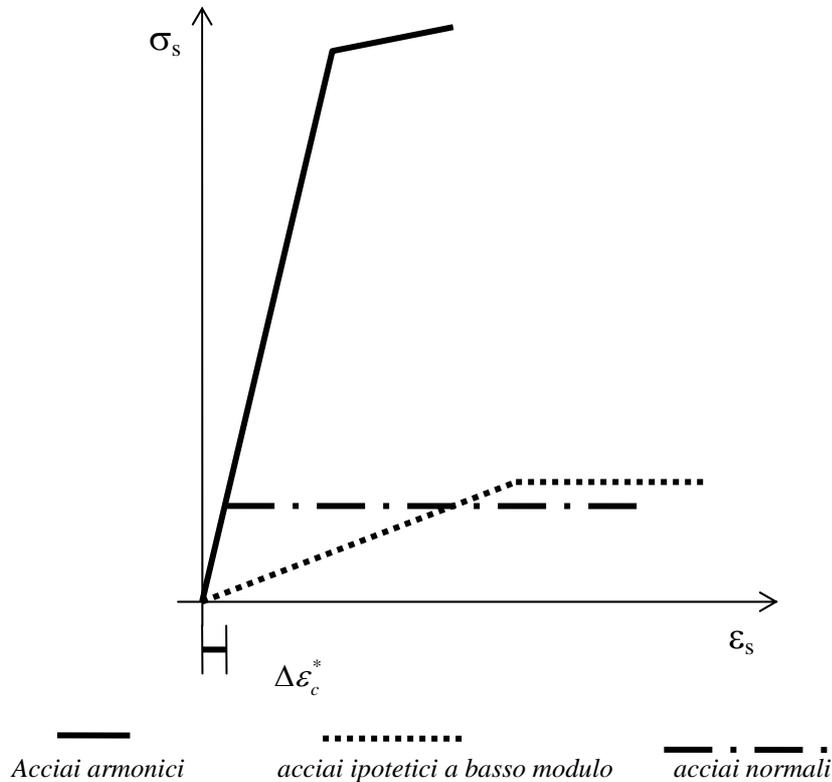


Fig.9

dove  $\sigma_{si}$  e  $\sigma_{s\infty}$  indicano rispettivamente la tensioni iniziale e la tensione a tempo infinito dell'acciaio. Utilizzando per la precompressione gli acciai tradizionali del c.a. il coefficiente di rendimento  $\eta$  è praticamente zero: con gli acciai armonici, a seconda dei casi, oggi  $\eta$  varia tra 0,8 e 0,7.

A conclusione di tali considerazioni introduttive, val la pena di evidenziare che la differenza tecnologica sostanziale tra c.a. e c.a.p. è che mentre nel primo, conglomerato e acciaio sono solidali in virtù dell'aderenza sin dall'inizio e, a partire da deformazioni nulle, sono legati fra loro dalla stessa storia di deformazione, nel secondo le deformazioni vengono rese del tutto indipendenti sin dall'inizio, tanto che nell'acciaio e nelle corrispondenti fibre di calcestruzzo vengono a crearsi tensioni di segno opposto. Solo a presollecitazione completata, dopo l'operazione di iniezione di malta all'interno dei cavi, tra l'acciaio teso e la superficie interna delle guaine dei cavi, i due materiali diventano solidali fra loro, in modo che sotto le azioni esterne il comportamento diventa molto simile a quello del c.a., nel senso che si hanno incrementi di deformazione uguali nelle fibre corrispondenti.

La tecnologia della precompressione è stata applicata anche ad altri materiali aventi una discreta resistenza a trazione, come la ghisa, e persino all'acciaio.

### 8.3) *Cenni storici*

L'idea di produrre degli stati di coazione nel cemento armato è piuttosto datata. Il primo tentativo fu fatto nel 1888, quando Doering propose il primo procedimento di messa in tensione delle armature del c.a., procedimento che va ricordato più per l'idea innovativa che per gli esiti dell'esperimento, influenzati fortemente dalla scarsa qualità dei materiali impiegati, e che allora erano a disposizione.

Un altro tentativo, infruttuoso anch'esso, fu fatto nel 1907 da Koenen. I suoi studi furono incentrati sul problema della conservazione del conglomerato, la quale poteva essere seriamente compromessa da eccessivi sforzi di trazione. Koenen applicò sforzi preventivi all'armatura di intensità pari a quelli limite di esercizio, che all'epoca era di circa  $1000 \text{ kg/cm}^2$ , ma le tensioni si riducevano nel tempo, a causa del ritiro e delle deformazioni lente del conglomerato e dell'acciaio sotto carico, fino ad annullarsi completamente.

Il problema principale che questi studiosi volevano risolvere era unicamente quello della fessurazione del conglomerato teso, per cui non si resero conto degli altri interessanti aspetti per il comportamento statico delle strutture che la precompressione presentava. Successivamente la tecnologia della presollecitazione venne applicata nella costruzione di tubazioni in cemento armato, ottenendo una buona tenuta per elevate pressioni di esercizio. Nel 1925 la fabbrica Vianini produsse i primi tubi realizzati con questa tecnologia.

Le prime strutture in cemento armato precompresso nelle quali la tecnologia fu sfruttata per migliorare le caratteristiche statiche del materiale risalgono al 1928, quando Freyssinet, intuì le possibilità di impiego della presollecitazione, ne studiò gli aspetti teorici e pratici. Egli pose in rilievo le più salienti caratteristiche della precompressione, indicandone le modalità di esecuzione, le quali furono la base, dal 1928 in poi, per lo sviluppo di numerosi brevetti.

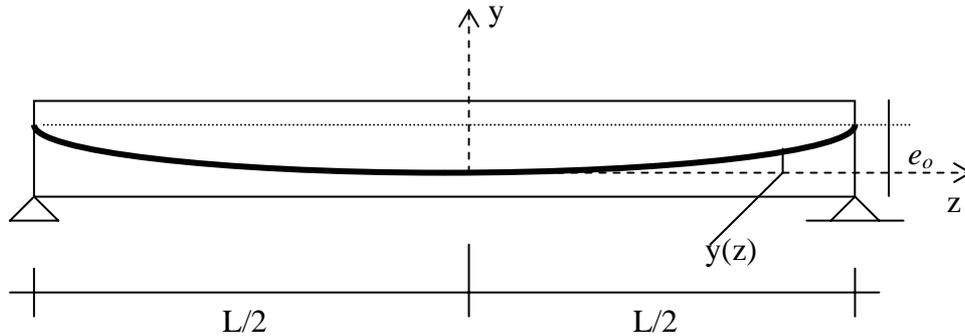
Si può attribuire proprio a Freyssinet il merito di aver per primo realizzato, per la pratica di cantiere, l'idea della precompressione. Freyssinet ebbe il vantaggio di avere a disposizione materiali di alta qualità, come gli acciai ad alta resistenza, nei quali poteva produrre elevate tensioni preventive, in modo che le deformazioni lente ne riducevano l'entità solo di una modesta percentuale. Dopo Freyssinet altri studiosi si sono interessati allo sviluppo di questa nuova tecnica del cemento armato. Si ricordano in Francia Lossier, Lebel e Guyon, e in Belgio Magnel, ideatore di un particolare tipo di ancoraggio e progettista di importanti opere. In Germania Hoyer, che industrializzò la fabbricazione di elementi con fili in acciaio di piccolo diametro ed autoancoranti, eliminando il costo degli apparecchi di ancoraggio e rendendo più rapida la messa in tensione su elementi di notevole lunghezza; ancora Morsch, Dischinger, Finsterwalder, i quali studiarono l'applicazione della precompressione alle travi da ponte; Leonhardt, ideatore di un sistema di ancoraggio, Rusch, il quale ha apportato un notevole contributo sperimentale alla conoscenza del sistema. In Austria Emperger, negli U.S.A. Schorer e Lin, in Inghilterra Abeles e Harris.

Nel "Laboratorio Federale di Zurigo" vennero poi condotte prove sperimentali, sia sugli elementi strutturali che sui singoli materiali, per valutare gli effetti prodotti dalle deformazioni lente sotto carico. Grazie a questi studi fu possibile compilare le prime norme tecniche sul calcolo e l'esecuzione del cemento armato precompresso.

La tecnica della precompressione si stese rapidamente in tutto il mondo e numerosissime sono state le sue applicazioni sia nella costruzione di grandi opere, come grandi ponti e viadotti, ma anche piccoli elementi prefabbricati, come ad esempio i travetti utilizzati nella costruzione dei solai.

### 8.5.2) La determinazione delle sollecitazioni nella sezione della trave precompressa

Si consideri la trave precompressa di Fig.10: il cavo di precompressione è quello parabolico di Fig.37 e lo sforzo di precompressione nel cavo è pari ad  $N$ . In effetti, come vedremo più avanti, la forza di precompressione varia lungo il cavo per effetto dell'attrito tra i fili e le parte interne della guaina che contiene il cavo stesso. Tali azioni di attrito, che determinano degli effetti non trascurabili, in particolare per la definizione del tiro richiesto per produrre un assegnato stato di sollecitazione interno, determinano



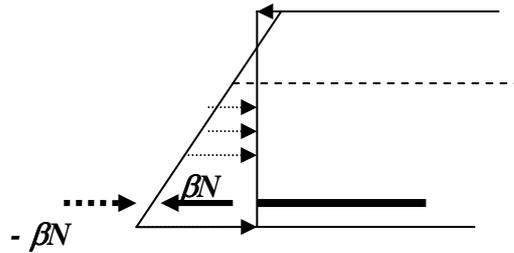
Il cavo parabolico  
Fig.10

solo lievi variazioni della forza di precompressione. Nello svolgere alcune considerazioni introduttive tali variazioni possono essere trascurate. Il cavo è posizionato a livello del baricentro della sezione alle estremità. Rispetto agli assi di riferimento l'equazione del cavo prende la forma

$$e(z) = \frac{4e_0}{L^2} z^2 \quad (2)$$

La valutazione delle sollecitazioni normali nella sezione di calcestruzzo dovuta alla sola precompressione può essere immediatamente ottenuta sezionando ad esempio la trave nella sezione di mezzeria come in Fig. 11, dove il momento flettente è massimo. In tale sezione la tangente al cavo è orizzontale, cioè ortogonale all'asse della trave. Di regola con  $n$  si indica la forza di precompressione in esercizio, cioè a cadute di tensione avvenute. Al tiro la forza di precompressione sarà allora pari a  $\beta N$ , con  $\beta$  un coefficiente compreso all'incirca tra 1,2 e 1,3. Se  $\beta N$  è la forza di precompressione presente al tiro, se sezioniamo la sezione trasversale della trave, attraverso la sezione del cavo si trasmetterà la forza di trazione  $\beta N$  e, attraverso la sezione di calcestruzzo si trasmetterà la forza di compressione  $-N$ , uguale ed opposta alla forza  $\beta N$ . La forza  $-N$  è applicata sulla sezione di calcestruzzo con l'eccentricità  $e$  rispetto al baricentro della sezione. Ai bordi superiore ed inferiore della sezione di calcestruzzo agiranno pertanto le sollecitazioni

$$\sigma_i = -\frac{\beta N}{A} - \frac{\beta Ne}{W_i} \quad \sigma_s = -\frac{\beta N}{A} + \frac{\beta Ne}{W_s} \quad (3)$$



Lo stato di sollecitazione da precompressione nella sezione di mezzeria  
Fig.11

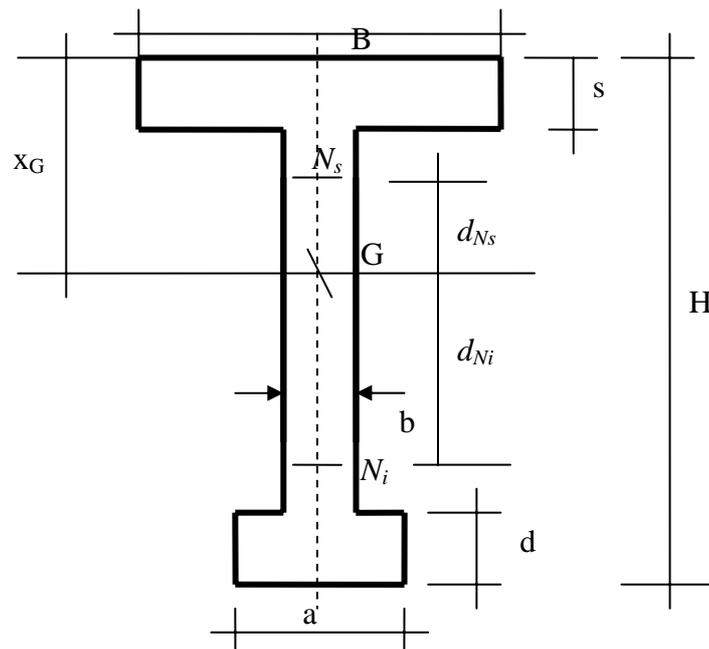
dove  $A$ ,  $W_i$ ,  $W_s$  sono rispettivamente l'area ed i moduli resistenti relativi al bordo inferiore e superiore della sezione di calcestruzzo. Risulta quindi

$$W_i = \frac{J}{x_{Gi}} \qquad W_s = \frac{J}{x_{Gs}} \qquad (4)$$

se  $J$  è il momento di inerzia della sezione resistente di calcestruzzo rispetto al suo asse baricentrico. Nella Fig.12 è rappresentata una tipica sezione di una trave precompressa. Nella figura, oltre al baricentro  $G$  sono indicati i punti di nocciolo superiore ed inferiore della sezione, posti rispettivamente alle distanze

$$d_{Ns} \qquad d_{Ni} \qquad (5)$$

dal baricentro  $G$  della sezione, E' evidente che se il cavo di precompressione è disposto internamente al nocciolo e se trascuriamo l'effetto del peso proprio, la sezione di calcestruzzo della trave precompressa sarà tutta compressa.



Una sezione tipica di una trave precompressa  
Fig.12

La conoscenza della posizione dei punti di nocciolo della sezione è quindi molto utile nell'analisi statica delle sezioni delle travi precomprese. Per definizione dei punti di nocciolo si ha quindi

$$0 = -\frac{\beta N}{A} + \frac{\beta N d_{Ns}}{W_i} \qquad 0 = -\frac{\beta N}{A} + \frac{\beta N d_{Ni}}{W_s}$$

da cui

$$d_{Ns} = \frac{W_i}{A} \qquad d_{Ni} = \frac{W_s}{A} \qquad (5')$$

Va tenuto presente d'altra parte che, come si vedrà dettagliatamente più avanti, *all'atto della precompressione* la trave *si incurva staccandosi dal suolo* tranne che agli appoggi: agirà quindi in questa fase anche il peso proprio della trave. Lo stato di sollecitazione al bordo inferiore e superiore della sezione di mezzaria della trave dovrà quindi esprimersi come

$$\sigma_i^{tiro} = -\frac{\beta N}{A} - \frac{\beta Ne}{W_i} + \frac{M_g}{W_i} \qquad \sigma_s^{tiro} = -\frac{\beta N}{A} + \frac{\beta Ne}{W_s} - \frac{M_g}{W_s} \qquad (6)$$

Successivamente al tiro nella trave si producono le cadute di tensione per effetto delle deformazioni lente.

### Un esempio

Si assume

$$B = 100\text{ cm}, \quad b = 25\text{ cm}; \quad a = 50\text{ cm}, \quad s = 25\text{ cm}; \quad d = 40\text{ cm}; \quad H = 250\text{ cm}$$

Trave appoggiata agli estremi.  $L = 35,00\text{ m}$

Si procede al calcolo dell'area della sezione, del suo baricentro e del suo momento di inerzia. In tale calcolo si trascura l'effetto dei fori dei cavi.

**Area**

$$A = BXH - (B - a)X(H - s) - (a - b)X(H - s - d) = 1,00X2,50 - (1,00 - 0,50)X(2,50 - 0,25) - 0,25X(2,50 - 0,25 - 0,40) = 0,913\text{ mq}$$

**Baricentro**

Momento statico rispetto al lembo superiore della sezione

$$S_{a-a} = 1,00X2,50^2X0,5 - 2,25X0,50(0,25 + 0,5X2,25) - 0,25X1,85X(0,25 + 0,5X1,85) = 3,125 - 1,547 - 0,543 = 1,035\text{ mq}$$

$$x_G = 1,035 / 0,913 = 1,134\text{ m}$$

**Inerzia**

$$J_G = 1/3X1,00X1,134^3 - 1/3X(1,00 - 0,25)X(1,134 - 0,25)^3 + 1/3X0,50X(2,50 - 1,134)^3 - 1/3X0,25X(2,50 - 1,134 - 0,40)^3 = 0,486 - 0,173 + 0,425 - 0,075 = 0,663\text{ m}^4$$

**Moduli di resistenza**

$$W_i = \frac{0,663}{(2,50 - 1,134)} = 0,485\text{ m}^3 \qquad W_s = \frac{0,663}{1,134} = 0,585\text{ m}^3$$

**Punti di nocciolo inferiore e superiore:  $N_i$  e  $N_s$**

Questi, come è noto, hanno le distanze dal baricentro della sezione

$$n_i = \frac{W_s}{A} \qquad n_s = \frac{W_i}{A}$$

Pertanto risulta

$$n_i = \frac{0,585}{0,913} = 0,64\text{ m} \qquad n_s = \frac{0,485}{0,913} = 0,53\text{ m}$$

Il baricentro  $G$  della sezione dista dal bordo inferiore della trave di

$$x_{Gi} = 2,50 - 1,134 = 1,366m$$

La distanza  $d_{GG_b}$  tra  $G$  e il centro  $C_b$  del bulbo inferiore della sezione risulta

$$d_{GG_b} = 1,366 m - 0,20 m = 1,166 m$$

Inoltre, i punti di nocciolo inferiore  $N_i$  e superiore  $N_s$  distano dal centro  $C_b$  del bulbo inferiore

$$d_{N_iG_b} = 1,166 - 0,64 = 0,526 m$$

$$d_{N_sG_b} = 1,166 + 0,53 = 1,696 m$$

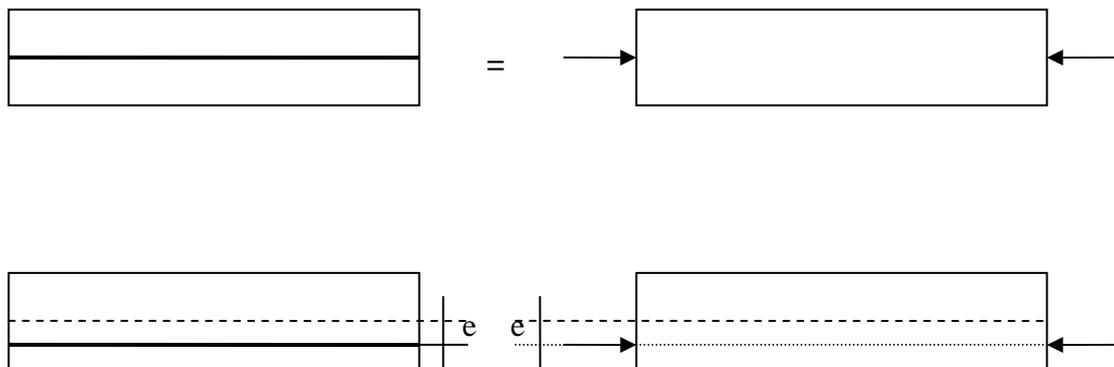
### 8.5.3) Sistema equivalente alla precompressione

E' utile valutare le forze che applicate alla trave di calcestruzzo sono in grado di produrre le stesse sollecitazioni prodotte dal cavo di precompressione. Tali forze costituiscono il sistema equivalente alla precompressione.

La valutazione di tale sistema di forze è immediata per il caso di cavo rettilineo o ad eccentricità costante. La Fig.13 illustra i corrispondenti sistemi di forze equivalenti

Nel caso di cavo curvo occorre tenere conto, oltre che delle azioni esercitate dal cavo alle testate, anche delle azioni esercitate dal cavo all'interno della trave. Quando infatti il cavo è curvo, esso esplica sul calcestruzzo che lo circonda un'azione distribuita lungo il proprio sviluppo, dovuta alla forma curva del cavo.

Se, con riferimento alla Fig.14, immaginiamo di estrarre un piccolo elemento  $ds$  di cavo e applichiamo sulle sezioni di tale tratto  $ds$  le forze di precompressione  $N$  esplicate dai tratti adiacenti, l'elemento di cavo non potrà stare in equilibrio a meno che non venga applicata su di esso un'altra forza in grado di chiudere il poligono di equilibrio, così come indicato nella Fig.14. Le due forze  $N$  che agiscono alle estremità del tratto  $ds$  di cavo non sono allineate, proprio per effetto della curvatura del cavo.



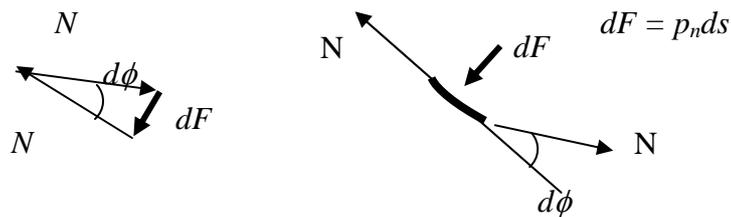
Il sistema equivalente alla precompressione

Fig.13

L'angolo formato tra le loro rette di azione è pari a

$$d\phi = \frac{ds}{R} \quad (7)$$

se  $R$  è il raggio di curvatura del cavo nel tratto  $ds$  considerato.



L'equilibrio dell'elemento  $ds$  di cavo  
Fig.14

Per l'equilibrio si produce la forza  $dF$  esercitata dal calcestruzzo sul tratto  $ds$  di cavo. Questa è tale che

$$\operatorname{tg} d\phi = \frac{dF}{N} \quad (8)$$

ovvero, tenendo in conto della piccolezza di  $d\phi$ ,

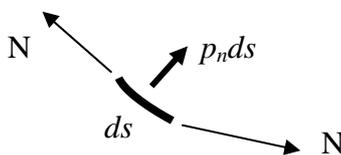
$$d\phi = \frac{ds}{R} = \frac{dF}{N} \quad (8')$$

La forza  $dF$  è diretta dal centro di curvatura verso l'esterno ed ha la direzione della normale al tratto curvo  $ds$  del cavo. Essa è la risultante delle azioni  $p_n$  dirette lungo la normale esterna alla curva ed esplicate dal calcestruzzo al cavo distribuite lungo il tratto  $ds$ . Si ha quindi

$$dF = p_n ds \quad (9)$$

Sostituendo la (9) nella (8) ricaviamo allora

$$p_n = \frac{N}{R} \quad (10)$$



Le azioni esercitate dal tratto di cavo curvo sul calcestruzzo  
Fig.15

Il carico  $p_n$  rappresenta l'azione esercitata dal calcestruzzo sul tratto di cavo. Viceversa, l'azione esercitata dal cavo curvo *sul calcestruzzo* è  $-p_n$  ed è quindi diretta verso il centro di curvatura del tratto  $ds$  e quindi ha il verso della normale *interna* a  $ds$  (Fig.15). In definitiva, l'azione esercitata dal cavo, se curvo, sulla trave di calcestruzzo è quindi costituita da un carico distribuito lungo il percorso del cavo

$$p_n = -\frac{N}{R} \quad (11)$$

Importanti semplificazioni possono ottenersi se si considera che, a causa del piccolo rapporto altezza/lunghezza delle travi il cavo assume una configurazione *molto tesa* e quindi presenta angoli piccoli rispetto all'orizzontale.

Possono così essere utilizzate espressioni semplificate della curvatura. In tal caso la configurazione di equilibrio  $e = e(z)$  del cavo, che è una catenaria, può essere assimilata ad una parabola, come espresso dalla (1).

La curvatura della curva  $e = e(z)$ , se con  $e''$  ed  $e'$  si indicano rispettivamente le derivate prima e seconda della  $e = e(z)$  può essere in generale espressa come

$$\frac{1}{R} = \frac{e''}{[1 + e'^2]^{3/2}} \quad (12)$$

D'altra parte, poiché in tal caso riesce

$$e'^2 \ll 1 \quad (13)$$

si ha ancora

$$\frac{1}{R} = e'' \quad (12')$$

e quindi con la (1)

$$\frac{1}{R} \approx \frac{8e_o}{L^2} \quad (14)$$

Le normali alla configurazione curva del cavo, rappresentata per quanto detto da una curva molto ribassata che ha tangenti prossime all'orizzontale, è approssimata dalla verticale. Il carico distribuito  $p_n$  esercitato lungo il suo sviluppo dal cavo si riduce quindi ad un carico verticale diretto verso il centro di curvatura del cavo e quindi dal basso verso l'alto e quindi pari a

$$p_{yc} = -N \frac{8e_o}{L^2} \quad (15)$$

Esaminiamo ora l'equilibrio della trave precompressa sotto *solo* le azioni esercitate dal cavo. La risultante del carico distribuito vale

$$p_{yc} L = -N \frac{8e_o}{L} \quad (16)$$

Alle testate, d'altra parte, come mostra la Fig.16, la componente verticale delle forze esercitate dal cavo vale

$$N \sin \alpha \approx Ne'(L/2) \quad (17)$$

e quindi, essendo  $e'(z) = \frac{8e}{L^2} z$ , riesce,

$$Ne'(L/2) = N \frac{4e_o}{L} \quad (17')$$



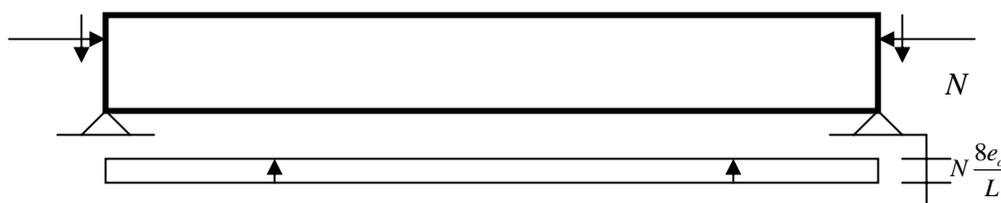
Le azioni trasmesse dal cavo in testata

Fig.16

mentre la componente orizzontale, essendo,  $\cos \alpha \approx 1$ , risulta ancora pari ad  $N$ . La somma di tutte le forze verticali esercitate dal cavo sulla trave deve risultare nulla: infatti riesce

$$N \frac{8e_o}{L} - N \frac{8e_o}{L} = 0$$

e l'equilibrio è soddisfatto.



Il sistema di forze equivalente all'azione del cavo parabolico per la trave appoggiata agli estremi

Fig.17

La trave appoggiata agli estremi e precompressa dal cavo curvo costituisce l'esempio che si incontra più frequentemente nell'ambito delle travi in c.a.p. ad armatura post-tesa. Sulla base di quanto ora evidenziato, l'effetto del cavo curvo si riduce quindi alla presenza, alle testate, di due forze assiali di compressione pari ad  $N$ , di due forze verticali dirette verso il basso fornite dalla (17') e di un carico distribuito uniforme, diretto verso l'alto, fornito dalla (16).(Fig.17)

Con tale premessa possiamo ora seguire l'evoluzione dello stato di sollecitazione nella trave durante la fase di tiro secondo l'analisi che segue.

#### 8.5.4) L'evoluzione dello stato di sollecitazione nella trave durante il tiro

Prima di essere precompressa la trave è posizionata sul piano di banchinaggio, come indicato in Fig.35.

La trave in tali condizioni è soggetta al peso proprio, rappresentato dal carico uniformemente distribuito  $g$ . Ipotizziamo che la reazione del piano di banchina sia anch'essa costituita da un carico uniforme  $-g$ , uguale ed opposto al peso  $g$ . Ogni sezione della trave è sottoposta a caratteristiche della sollecitazione tutte nulle.

Si immagini ora di cominciare a precomprimere la trave. Il cavo risultante di precompressione è costituito da un cavo curvo con l'andamento parabolico di Fig.18. In una fase intermedia della precompressione il cavo, , sarà soggetto al tiro  $N'$ , che non è ancora quello finale  $N$ .



La trave precompressa da un cavo curvo  
Fig.18

Sulla base dei risultati prima ottenuti, per effetto del solo sforzo di precompressione  $N'$ , lo stato di sollecitazione all'interno della trave corrisponde a quello dovuto all'azione di un sistema autoequilibrato di forze, costituito da un carico uniformemente distribuito

$$\frac{8e}{L^2} N' \quad (18)$$

diretto dal basso verso l'alto, da due forze concentrate verticali, applicate alle testate della trave e dirette dal basso in alto, ognuna pari a

$$\frac{4e}{L} N' \quad (19)$$

oltre che all'azione delle due forze assiali baricentriche  $N'$ . Per effetto di tale carico la trave tende a flettersi verso l'alto: tale tendenza è però contrastata dal peso  $g$  della trave che agisce appena la trave stessa tende ad incurvarsi e quindi a staccarsi dal suolo. In definitiva, fin quando il carico (18) è inferiore al peso  $g$  della trave, questa si manterrà rettilinea ed uniformemente compressa dalle forze assiali  $N'$  ma premuta contro il piano orizzontale di banchinaggio dall'azione del carico distribuito

$$g - \frac{8e}{L^2} N' \quad (20)$$

oltre che dall'azione delle forze verticali di testata (19).

La reazione del piano verticale sarà sempre pari al carico  $g$  diretto dal basso in alto. Poiché però la trave deve restare rettilinea e quindi soggetta a momento flettente e taglio identicamente nulli lungo tutte le sezioni della trave, in testata la reazione del piano di banchina dovrà dare luogo anche a due forze concentrate pari a

$$-\frac{4e}{L} N' \quad (21)$$

In definitiva, è il carico (20) che agisce sulla trave ed ancora è il carico ad esso uguale ed opposto che costituisce la reazione distribuita del piano di appoggio, oltre alle forze concentrate di estremità (21), dovute all'effetto dell'incurvamento della trave che, pur restando rettilinea, tende ad impuntarsi alle estremità.

La situazione cambia radicalmente quando, col crescere dello sforzo di precompressione fino al valore finale  $\beta N$ , il carico distribuito (18) supera il peso  $g$  della trave. In tal caso la trave, oltre che ad essere soggetta al carico assiale baricentrico  $\beta N$ , tranne che alle testate si solleva dal piano d'appoggio ed assume l'assetto della trave appoggiata agli estremi sottoposta al carico uniformemente distribuito

$$\left(\frac{8e}{L^2}\beta N - g\right) \quad (22)$$

ed alle reazioni agli appoggi, ognuna pari a

$$\beta N \frac{4e}{L} - \frac{gL}{2} \quad (23)$$

La controfreccia  $\Delta f$  della trave al tiro vale quindi

$$\Delta f = \frac{5}{384} \left(\beta N \frac{8e}{L^2} - g\right) \frac{L^4}{EJ} \quad (24)$$

se J è il momento di inerzia della sezione della trave.

### 8.5.5) *Le cadute di tensione per le travi precomprese ad armatura post-tesa*

Il calcolo delle cadute di tensione in una trave precompressa è essenziale ai fini della verifica del comportamento della trave.

Come si è detto in premessa, i principali responsabili delle cadute di tensione nei fili in acciaio armonico sono in primo luogo costituiti dalle *contrazioni*

$$\Delta \varepsilon_c^*$$

che si producono lungo la trave precompressa per effetto delle deformazioni lente del calcestruzzo, e quindi quelle dovute *al ritiro* ed alla *viscosità* del calcestruzzo, e poi quelle dovute alle *deformazioni lente dell'acciaio* armonico, che sono controllate, come si vedrà più avanti, dalle relative curve di rilassamento. A tali effetti vanno poi aggiunti altri, tipici proprio della precompressione a cavi scorrevoli, quali quelli dipendenti dal rientro delle testate dei cavi di ancoraggio per le forti concentrazioni di tensione che si producono alle testate, dalla deformazione mutua dei cavi che vengono tesati e bloccati uno dopo l'altro, e quelli dipendenti dall'attrito tra i fili in acciaio armonico e il lamierino dei cavi.

Nella valutazione delle cadute di tensione della trave precompressa, l'influenza del *ritiro* del calcestruzzo, che comincia a svilupparsi subito dopo la sua maturazione, avrà peso maggiore o minore a seconda di quanto tempo viene fatto trascorrere tra la data di maturazione del calcestruzzo e la data di tesatura dei cavi. Una parte della deformazione da ritiro viene scontata quindi prima della messa in tiro dei cavi. La caduta di tensione da ritiro in genere però è dovuta ad una parte cospicua dell'intera contrazione da ritiro che si produce, a seconda delle caratteristiche del calcestruzzo. Di regola si cerca infatti di accelerare la presa e l'indurimento del calcestruzzo delle travi precomprese per tenere impegnati nel minor tempo possibile i pregiati casseri di costruzione delle travi.

La normativa italiana fissa il valore della contrazione da ritiro da assumere per il calcolo delle cadute di tensione: essa è pari a

$$\Delta \varepsilon_{Rc}^* = 3 \times 10^{-4} \quad (25)$$

Se, invece, il tiro dei cavi viene effettuato dopo almeno 14 gg di stagionatura la  $\Delta\varepsilon_{Rc}^*$  può essere assunta pari a  $\Delta\varepsilon_{Rc}^* = 2,5 \times 10^{-4}$ .

La contrazione  $\Delta\varepsilon_{Vc}^*$  conseguente alla deformazione viscosa del calcestruzzo è legata alla contrazione elastica che si produce istantaneamente al tiro, sotto l'azione della precompressione stessa, lungo le fibre di calcestruzzo aderenti ai cavi di precompressione. Mediamente, anche seguendo i suggerimenti di normativa, la contrazione viscosa  $\Delta\varepsilon_v$  può essere calcolata come pari all'incirca al doppio della deformazione elastica che si produce, al tiro della trave, lungo le fibre di calcestruzzo aderenti ai cavi. Si ha quindi

$$\Delta\varepsilon_{Vc}^* = 2\varepsilon_{ce} \quad (26)$$

Per avere un'idea dell'ordine di grandezza della contrazione viscosa si può considerare che in tutta la zona centrale della trave i cavi corrono praticamente rettilinei in prossimità del centro del bulbo della sezione. La sollecitazione massima di compressione al bordo inferiore per la trave al tiro è prossima alla tensione ammissibile per il calcestruzzo compresso al tiro e quindi dell'ordine dei 150 kg/cmq. Lungo l'asse passante per il centro del bulbo inferiore della sezione la sollecitazione è quindi un poco più ridotta della massima compressione al lembo inferiore, ragionevolmente così dell'ordine dei 120 kg/cmq. In corrispondenza delle testate i cavi si portano vicini al baricentro delle sezioni e quindi la compressione lungo le fibre di calcestruzzo aderenti ai cavi scende opportunamente.

Mediamente può dirsi, quindi, che la compressione media al tiro lungo il tracciato del cavo risultante è più o meno dell'ordine dei 100 kg/cmq.

Con un modulo di elasticità istantaneo del calcestruzzo dell'ordine di 350 kg/cmq, quale si ha per i normali calcestruzzi da cemento armato precompresso, si ha allora  $\Delta\varepsilon_{cv} = 200/350.000 = 5,7 \times 10^{-4}$ . Pertanto, in tal caso, tra ritiro e deformazione viscosa del calcestruzzo, si ha complessivamente una contrazione di caduta di tensione pari a circa  $8,7 \times 10^{-4}$ .

A questa contrazione va poi aggiunta quella dovuta agli effetti delle deformazioni viscosi che si sviluppano nella deformazione degli acciai armonici, che, tra l'altro, sono responsabili dei fenomeni di rilassamento analizzati nella Sez.I.

Le cadute di tensione per effetto del rilassamento degli acciai dipendono notevolmente dalle caratteristiche degli acciai stessi e vengono, caso per caso, indicate dalle case produttrici. Frequentemente si effettuano valutazioni della caduta di tensione a 120 ore effettuate sotto la tensione standard di tiro pari a  $\sigma_{si} = 0,75 f_{ptk}$ . Dai risultati di tali prove si estrapolano poi le cadute a tempo infinito.

In assenza di dati sperimentali completi, disponendo della media delle cadute su almeno due campioni di filo sottoposti a prove di rilassamento a 120 ore, la caduta a tempo infinito viene valutata come

$$\Delta\sigma_{rs,\infty} = 3\Delta\sigma_{rs,120} + 0,03(\sigma_{spi} - 0,5 f_{ptk}) \quad (27)$$

con  $\sigma_{spi} \geq 0,5 f_{ptk}$ . Di regola la tensione di prova è pari a  $\sigma_{spi} = 0,75 f_{ptk}$ .

Vi sono importanti indicazioni che forniscono l'entità media della caduta di tensione per rilassamento a seconda del tipo di elemento di acciaio, cioè a seconda che si tratti di filo, trefolo, trecce o barre laminate di acciaio armonico. I trefoli e le trecce sono gli elementi che presentano le cadute per rilassamento più elevate.

	fili	trefoli	trecce	barre
$\Delta\sigma_{rs,\infty} =$	$0,15 \sigma_{spi}$	$0,18 \sigma_{spi}$	$0,20 \sigma_{spi}$	$0,12 \sigma_{spi}$

dove  $f_{ptk}$  indica la tensione caratteristica di rottura.

La caduta di tensione per rilassamento risente notevolmente del valore della tensione a cui è soggetto il filo. Va pertanto rilevato che mentre tale caduta si produce via via nel tempo, la tensione nel filo si riduce per effetto delle deformazioni da ritiro e di viscosità del calcestruzzo.

In termini di deformazioni da caduta per i fili in acciaio armonico, la caduta per rilassamento può assumersi più ridotta di quella fornita nella precedente tabella. Mediamente, una contrazione equivalente per rilassamento  $\Delta\varepsilon_{ril,s}^*$  è pari all'incirca a  $6 \times 10^{-4}$ .

Alle cadute per effetti lenti si sommano poi altre contrazioni da caduta dovute ad effetti meccanici quali il rientro dei coni di ancoraggio alle testate delle travi, a causa delle elevate concentrazioni di sforzo che ivi si producono, per effetto della precompressione dei cavi: questi vengono tesi uno alla volta e bloccati alla testata.

A tutti tali effetti meccanici corrisponde un'altra contrazione di caduta  $\Delta\varepsilon_{r,coni}^* + \Delta\varepsilon_{eff,m}^*$ , più o meno dell'ordine di  $3 \times 10^{-4}$ .

Si ha quindi, sommando tutte le varie contrazioni da caduta si ha la contrazione complessiva da caduta

$$\Delta\varepsilon_{tot}^* = \Delta\varepsilon_{rc}^+ + \Delta\varepsilon_{vc}^* + \Delta\varepsilon_{ril,s}^* + \Delta\varepsilon_{r,coni}^* + \Delta\varepsilon_{eff,m}^* \quad (28)$$

Mediamente, sulla base delle considerazioni svolte, risulta quindi all'incirca,  $\Delta\varepsilon_{tot} = 18 \times 10^{-4}$ , valore quindi dell'ordine della dilatazione che si produce in un'acciaio soggetto ad una tensione di trazione pari a  $17,7 \times 10^{-4} \times 2,06 \times 10^6 \approx 3500 \text{ kg/cmq}$ .

Con tali risultati si riconosce allora immediatamente che, se  $\sigma_s^{es}$  è la tensione in esercizio richiesta per i cavi in mezzeria dal progetto della trave, nella stessa sezione la sezione al tiro dovrà essere

$$\sigma_s^{tiro} = (\Delta\varepsilon_R + \Delta\varepsilon_v + \Delta\varepsilon_{ril} + \Delta\varepsilon_{rconi} + \Delta\varepsilon_{eff,m}) E_s + \sigma_s^{es} \quad (29)$$

Così, se la tensione  $\sigma_s^{es}$  nell'acciaio nella sezione in mezzeria deve risultare ad esempio pari a  $12000 \text{ kg/cmq}$ , con i valori delle varie contrazioni di caduta prima definiti, si avrebbe al tiro nella stessa sezione di mezzeria  $\sigma_s^{tiro} = 12000 + 3500 = 15500 \text{ kg/cmq}$ .

Tale valore della sollecitazione nell'acciaio non è però la tensione massima a cui l'acciaio dei cavi viene soggetto al tiro in quanto, a causa dell'attrito tra i fili d'acciaio dei cavi ed il lamierino interno dei cavi, in testata, in prossimità del martinetto, la tensione deve necessariamente più risultare più elevata.

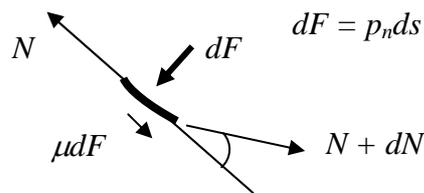
In conclusione, tenendo conto di tutte le varie cause, complessivamente le cadute di tensione comportano mediamente che la forza di precompressione, pari ad  $N$  in esercizio, sia  $\beta N$  al tiro con  $\beta = 1,2 \div 1,25$ . Tale indicazione si riferisce alla forza di precompressione nella sezione più sollecitata, che è quella di mezzeria per le travi appoggiate agli estremi. Nella verifica della massima tensione nell'acciaio dovrà allora considerarsi anche la tensione al tiro in testata considerando l'effetto dell'attrito. In tal caso la tensione nell'acciaio nella sezione di mezzeria al tiro, pari  $\beta$  volte quella in

esercizio, dovrà essere opportunamente incrementata per tener conto dell'attrito, come illustrato nel paragrafo che segue.

### 8.5.6 ) la variazione di tensione lungo il cavo per effetto dell'attrito

La tensione del cavo, se di tracciato curvilineo, varia da sezione a sezione a causa dell'attrito tra fili e guaina.

Se allora  $dF$  indica il carico normale esercitato dall'elemento  $ds$  di cavo al calcestruzzo come descritto in Fig.19, se  $\mu$  indica il coefficiente di attrito tra fili e guaina, la caduta



L'equilibrio del tratto  $ds$  di cavo in presenza di forze tangenziali di attrito  
Fig.19

$dN$  di forza di trazione lungo il tratto  $ds$ , ovvero la resistenza tangenziale esplicata dall'attrito lungo il tratto  $ds$ , può essere ottenuta dall'equilibrio nella direzione tangenziale del tratto  $ds$  e quindi come

$$dN + \mu dF = 0 \quad (30)$$

ovvero, tenendo conto della (8)

$$dN = -\mu \frac{N}{R} ds \quad (31)$$

E quindi

$$\frac{dN}{N} = -\mu d\phi \quad (31')$$

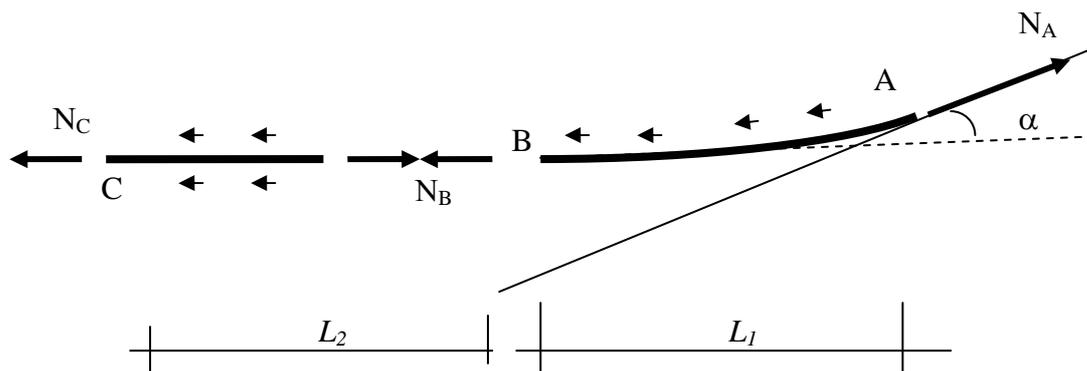
Integrando allora la (31) tra le sezioni A e B del tratto curvo di cavo descritto in Fig.19, risulta

$$\log N = -\mu\phi + C \quad (32)$$

ovvero

$$N = N_A e^{-\mu\phi} \quad (32')$$

perché, quando la deviazione angolare  $\phi$  si annulla, la forza di trazione del cavo è pari ad  $N_A$ . La (32') consente di valutare la forza di trazione del cavo nel punto B quando si conosce il coefficiente di attrito  $\mu$ , la forza di pretensione  $N_A$  in A, e la variazione angolare  $\phi$  tra  $N_A$  in A e  $N_B$  in B.



Perdite di tensione per attrito: tratto curvo e tratto rettilineo  
Fig.19

Oltre alla perdita in curva i cavi presentano anche perdite di tensione lungo i tratti rettilinei a causa delle inevitabili ondulazioni derivanti da errori di posizionamento.

Una semplice formulazione che considera sia l'effetto della deviazione angolare che della stessa lunghezza del cavo nel tratto rettilineo o non, è quella che esprime la caduta per attrito come

$$N_B = N_A (1 - \mu\alpha - \mu\beta L) \quad (33)$$

in cui  $\alpha$ , è la deviazione angolare complessiva espressa in radianti,  $\beta$  è la perdita di pretensione per unità di lunghezza del cavo. In base alle indicazioni di normativa, in mancanza di determinazioni precise si può assumere

$$\mu = 0,3 \quad (34)$$

per cavo in guaina metallica e

$$\beta = 0,01 \text{ rad / m} \quad (35)$$

Valutazioni più precise forniscono per cavi che riempiono circa il 50% del condotto, valori sensibilmente minori di  $\mu$ . Notevoli sono gli accorgimenti che si prendono in cantiere per la riduzione del coefficiente di attrito  $\mu$ . Ricorrendo a lubrificanti emulsionabili, facilmente asportabili mediante semplice lavaggio, si possono ottenere valori di  $\mu$  anche fino a 0,18. Analogamente si possono ottenere valori più bassi di  $\beta$ .

Ad esempio per  $\alpha_l = 10^\circ = 0,17 \text{ rad}$ ,  $L_1 = 10,0 \text{ m}$  dalla (33) risulta :

$$\sigma_{sB} = \sigma_{sA} [1 - 0,3(0,17 + 0,01 \times 10)] = 0,92 \sigma_{sA}, \text{ ovvero } \sigma_{sA} = 1,09 \sigma_{sB}$$

#### 8.5.7) L'iniezione dei cavi per la protezione degli acciai.

**Il calcolo delle sollecitazioni nella sezione della trave per le modifiche della sezione resistente dovute all'iniezione della malta**

Nelle travi in c.a.p. ad armatura post-tesa, dopo il tiro si procede all'iniezione di malta di cemento additivata, all'interno delle guaine dei cavi, al fine di proteggere i fili dei cavi dalla corrosione. E' evidente, infatti, la grande pericolosità della corrosione dei fili di acciaio dei cavi tenuto conto delle piccole dimensioni delle sezioni dei fili. La perdita di

un solo millimetro di diametro della sezione di un filo per l'innescarsi di ruggine in una sezione comporta un elevato incremento della sollecitazione nella sezione danneggiata, con il rischio di frattura.

L'operazione di iniezione di malta, molto delicata, va quindi eseguita con cura: opportuni sfiati, disposti lungo i cavi, consentono di verificare che la malta sia stata effettivamente iniettata lungo l'intero percorso del cavo.

La presa e l'indurimento della malta comporta la solidarizzazione della malta stessa sia ai fili di acciaio che alla superficie interna delle guaine in lamierino dei cavi.

Dopo l'indurimento della malta i fili di acciaio armonico dei cavi diventano sostanzialmente aderenti e quindi solidali con il calcestruzzo della trave. I sottili fili di acciaio risultano a questo punto protetti dalla malta. Essi non sono infatti più a contatto con l'aria. L'iniezione della malta nei cavi, a maturazione avvenuta, comporta alcune modifiche statiche sul comportamento della trave precompressa. In sostanza, per tutti i carichi addizionali che vengono applicati dopo l'operazione iniziale del tiro, le sezioni resistenti della trave cambiano, anche se di poco, le proprie caratteristiche di inerzia a causa della collaborazione delle aree di acciaio alla deformazione della trave.

In una valutazione di sintesi delle sollecitazioni nella trave, che si effettua nella fase preliminare di progetto, tali modifiche delle caratteristiche resistenti delle sezioni possono essere omesse; al contrario, nel calcolo definitivo di verifica esse vanno debitamente prese in conto.

Va ancora rilevato che, per la solidarizzazione delle armature in acciaio armonico al calcestruzzo, anche l'acciaio armonico dei cavi subirà incrementi di sollecitazione, in particolare durante l'azione dei carichi di esercizio. Durante l'azione di carichi ripetuti tali incrementi di sollecitazione possono anche produrre rotture a fatica degli acciai: in tal caso le verifiche della resistenza a fatica dell'acciaio devono essere opportunamente effettuate.

In generale, il tener conto delle modifiche delle caratteristiche resistenti delle sezioni richiede anche che, nella fase iniziale di tiro, le sezioni resistenti debbano essere considerate forate, per il passaggio dei cavi.

Ad iniezione avvenuta le sezioni resistenti cambiano, in primo luogo per la partecipazione delle aree di acciaio armonico dei cavi alla deformazione della trave: in effetti partecipano a tale deformazione sia le aree di acciaio che quelle della malta iniettata.

A differenza però del calcestruzzo costituente la trave, le aree di malta non risultano precomprese per cui è prudente non considerarle nella valutazione delle caratteristiche resistenti delle sezioni iniettate. In quanto segue indicheremo con

$$A^\circ, \quad x_{Gs}^\circ, \quad x_{Gi}^\circ, \quad J^\circ, \quad W_s^\circ, \quad W_i^\circ \quad e^\circ \quad (36)$$

rispettivamente l'area, le coordinate del baricentro, il momento di inerzia, i moduli di resistenza della sezione forata dal passaggio dei cavi e l'eccentricità della forza di precompressione agente. In definitiva, le (36) definiscono le grandezze delle sezioni delle travi da considerare nelle verifiche al tiro.

Indicheremo, inoltre con

$$A^*, \quad x_{Gs}^*, \quad x_{Gi}^*, \quad J^*, \quad W_s^*, \quad W_i^* \quad e^* \quad (37)$$

le analoghe grandezze relative alla sezioni iniettate, nelle quali viene presa in conto la collaborazione dell'acciaio.

Nella Fig.20 sono rappresentate le varie caratteristiche di sollecitazione agenti sulla sezione, al tiro, alla caduta di tensione e all'azione dei momenti flettenti aggiuntivi  $\Delta M_g$

ed  $M_q$ . Più esplicitamente, nella Fig. 36a sono rappresentate le autotensioni  $(\beta N - \beta N)$  da precompressione agenti al tiro insieme al momento flettente da peso proprio  $M_g$ , nella Fig. 36b) le autotensioni  $[-(\beta-1)N + [(\beta-1)N]$  da caduta di precompressione e nella Fig.36c) i momenti aggiuntivi permanente  $\Delta M_g$  e accidentale  $M_q$ .

Lo stato di sollecitazione indotto dalla precompressione è infatti uno stato autoequilibrato di sforzo ed ogni modifica della forza di precompressione comporta sia una variazione della forza di trazione agente sulle aree di acciaio che una variazione della forza di compressione agente sulla sezione di calcestruzzo.

Con tali premesse il calcolo delle tensioni al tiro si calcola così come già precedentemente svolto e quindi si ha al tiro

$$\sigma_{ci}^{tiro} = -\frac{\beta N}{A^\circ} - \frac{\beta N e^\circ}{W_i^\circ} + \frac{M_g}{W_i^\circ} \quad \sigma_{cs}^{tiro} = -\frac{\beta N}{A^\circ} + \frac{\beta N e^\circ}{W_s^\circ} - \frac{M_g}{W_s^\circ} \quad (38)$$

A vuoto, dove si sono già verificate le cadute di tensione, va considerata l'azione delle autotensioni  $[-(\beta-1)N + [(\beta-1)N]$  da caduta di precompressione e quindi della forza di trazione  $(\beta-1)N$ , che agisce con l'eccentricità  $e^*$  sulla sezione di calcestruzzo, e la forza di compressione  $-(\beta-1)N$ , che agisce sulla sezione d'acciaio del cavo, ed inoltre l'incremento di momento flettente da carichi permanenti  $\Delta M_g$ .

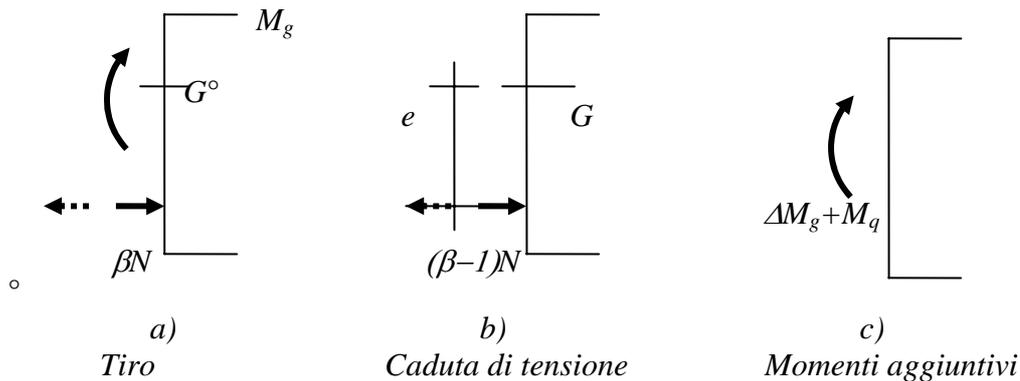


Fig.20

Si ha quindi

$$\sigma_{ci}^{vuoto} = \sigma_{ci}^{tiro} + \frac{(\beta-1)N}{A^*} + \frac{(\beta-1)N e^*}{W_i^*} + \frac{\Delta M_g}{W_i^*} \quad (39)$$

$$\sigma_{cs}^{vuoto} = \sigma_{cs}^{tiro} + \frac{(\beta-1)N}{A^*} - \frac{(\beta-1)N e^*}{W_s^*} - \frac{\Delta M_g}{W_s^*}$$

In esercizio, dove agisce il momento  $M_q$  dei carichi di esercizio

$$\sigma_{ci}^{es} = \sigma_{ci}^{vuoto} + \frac{M_q}{W_i^*} \quad \sigma_{cs}^{es} = \sigma_{cs}^{vuoto} - \frac{M_q}{W_s^*} \quad (40)$$

Per il calcolo delle sollecitazioni nelle sezioni in acciaio dei cavi, va osservato che quando si produce la caduta della forza di precompressione  $(\beta - 1)N$ , sulla sezione di acciaio dei cavi va ad agire la forza di compressione  $(\beta - 1)N$  e sulla sezione di calcestruzzo – in questo caso con l'acciaio dei cavi reso solidale per la presenza della malta iniettata – agisce la forza eccentrica di trazione  $-(\beta - 1)N$ .

In esercizio sull'acciaio agirà quindi la tensione

$$\sigma_s^{es} = \sigma_s^{tiro} - \frac{(\beta - 1)N}{A_s} + n \frac{(\beta - 1)N}{A_c} + n \frac{(\beta - 1)Ne}{W_i^*} + n \frac{(\Delta M_g + M_q)}{W_i^*} \quad (41)$$

Lo stato di sollecitazione indotto dalla precompressione è infatti uno stato autoequilibrato di sforzo ed ogni modifica della forza di precompressione comporta sia una variazione della forza di trazione agente sulle aree di acciaio che una variazione della forza di compressione agente sulla sezione di calcestruzzo.

### 8.5.8) Le verifiche delle sollecitazioni nel calcestruzzo e nell'acciaio nelle varie fasi

I valori delle sollecitazioni nel calcestruzzo al bordo inferiore e al bordo superiore della sezione di mezzeria della trave non devono superare i valori ammissibili indicati dalle normative. Questa fornisce valori ammissibili diversi a seconda che le sollecitazioni siano relative alla fase di tiro, alla fase a vuoto e a quella di esercizio.

Deve inoltre tenersi presente che nelle varie fasi di lavoro della trave, il calcestruzzo può essere sollecitato sia a trazione che a compressione. Le varie normative consentono infatti anche la presenza di sollecitazioni di trazione nel calcestruzzo, sempre che queste non siano eccessivamente elevate e che, in ogni caso, siano presenti quantità sufficienti di armature dolci in grado di assorbirle integralmente. Si indichino pertanto con

$$K_{Min}^{tiro}, K_{Max}^{tiro}, K_{Min}^{vuoto}, K_{Max}^{vuoto}, K_{Min}^{es}, K_{Max}^{es} \quad (42)$$

i valori ammissibili delle sollecitazioni nel calcestruzzo nelle fasi di tiro, a vuoto e in esercizio.

Poiché le sollecitazioni di compressione sono state considerate negative, si intende che i valori minimi nelle (42) sono relativi alla sollecitazione di compressione mentre quelli massimi fanno riferimento alle sollecitazioni di trazione.

Deve aversi allora, secondo la normativa italiana e con il metodo delle tensioni ammissibili

:

*Per il calcestruzzo:*

*al tiro*

$$\sigma_{ci}^{tiro} \geq K_{Min}^{tiro} \qquad \sigma_{cs}^{tiro} \leq K_{max}^{tiro}$$

con

$$K_{Min}^{tiro} = -0,48 R_{ck} \qquad K_{max}^{tiro} = 0,08 R_{ck} \quad (43)$$

*a vuoto*

$$\sigma_{ci}^{vuoto} \geq K_{min}^{vuoto} \qquad \sigma_{cs}^{vuoto} \leq K_{max}^{vuoto}$$

con

$$K_{\min}^{vuoto} = -0,38 R_{ck} \qquad K_{\max}^{vuoto} = 0 \qquad (44)$$

in esercizio

$$\sigma_{ci}^{es} \geq K_{Min}^{es} \qquad \sigma_{cs}^{es} \leq K_{Max}^{es}$$

con

$$K_{Min}^{es} = -0,38 R_{ck} \qquad K_{Max}^{es} = 0,06 R_{ck} \qquad (45)$$

Per l'acciaio armonico

La massima sollecitazione iniziale nell'acciaio  $\sigma_{spi}$  deve soddisfare alla condizione

$$\sigma_{spi} \leq 0,85 f_{p(0,2)k} \qquad (46)$$

e la tensione  $\sigma_{spi}$  in esercizio deve rispettare la condizione

$$\sigma_{spi} \leq 0,6 f_{ptk} \qquad (47)$$

dove i valori  $f_{p(0,2)k}$  e  $f_{ptk}$ , già discussi al Cap.1, rappresentano rispettivamente la tensione cui corrisponde, allo scarico, una deformazione residua dello 0,2% e la tensione caratteristica a rottura dell'acciaio.

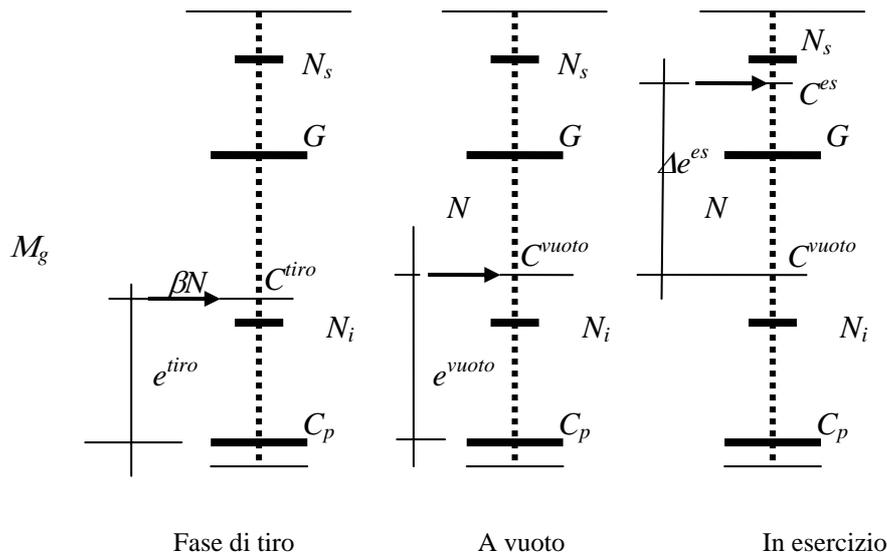
### 8.5.9) Escursioni della forza di precompressione nella sezione di mezzeria

In Fig.21 è schematicamente indicata la sezione della trave, il suo baricentro  $G$  ed i suoi punti di nocciolo superiore ed inferiore  $N_s$  ed  $N_i$ . Nella figura è anche indicato il centro  $C_p$  dove è localizzata la posizione del cavo, ovvero del cavo risultante, di regola, al centro del bulbo inferiore della sezione.

La forza di precompressione  $\beta N$ , risultante delle forze nei vari cavi, nella sezione centrale della trave è localizzata di regola al centro  $C_p$  del bulbo inferiore della sezione. Al tiro, come si è visto, la trave si solleva al centro nella sezione di mezzeria agisce quindi anche il momento flettente  $M_g$ . Di conseguenza sulla sezione di calcestruzzo agirà, oltre alla forza  $\beta N$ , anche il momento flettente  $M_g$  e quindi la forza risultante di  $\beta N$  e della coppia  $M_g$ . Tale risultante sarà quindi localizzata alla distanza

$$e^{tiro} = \frac{M_g}{\beta N} \qquad (48)$$

Al tiro quindi la forza di precompressione, pari a  $\beta N$ , è localizzata nel punto  $C^{vuoto}$  alla distanza  $e^{tiro}$  dal centro  $C_p$  del bulbo.



L'escursione della forza di precompressione nelle varie fasi di lavoro della trave  
Fig.21

Nella condizione a vuoto le cadute di tensione si sono tutte prodotte e la forza di precompressione da  $\beta N$  si riduce ad  $N$ . Nello stesso tempo, alla coppia flettente  $M_g$  dovuta al peso proprio della trave si aggiunge l'incremento di coppia, sempre da carichi permanenti,  $\Delta M_g$ .

La forza  $N$  di precompressione è localizzata in  $C_p$  per cui la risultante di  $N$  e di  $M_g + \Delta M_g$  è allora localizzata nel punto  $C^{vuoto}$  distante

$$e^{vuoto} = \frac{M_g + \Delta M_g}{N} \quad (49)$$

e quindi più in alto del punto  $C^{tiro}$ . Quando poi agiscono i carichi accidentali e quindi sulla sezione agisce il momento flettente  $M_q$ , la forza di precompressione  $N$  si porta nel punto  $C^{es}$  che dista dal precedente punto  $C^{vuoto}$  della quantità

$$\Delta e^{es} = \frac{M_q}{N} \quad (50)$$

In definitiva, dal tiro all'esercizio la forza di precompressione agente sulla sezione di calcestruzzo passa dalla posizione  $C^{vuoto}$  alla posizione  $C^{es}$ . Il salto complessivo  $\Delta s$  la forza di precompressione risulta quindi pari a

$$\Delta s = e^{vuoto} - e^{tiro} + \Delta e^{es} \quad (51)$$

e quindi, con le (49), (50) e (51) si ha ancora

$$\Delta s = \frac{M_g + \Delta M_g + M_q}{N} - \frac{M_g}{\beta N} \quad (52)$$

### 8.5.10) Il progetto della forza di precompressione

In analogia al progetto delle armature della sezione resistente in cemento armato, il progetto della forza di precompressione viene effettuato con riferimento alla condizione di massimo

momento flettente e quindi alla condizione di esercizio. La forza di precompressione disponibile in esercizio nella sezione più sollecitata della trave deve essere tale da annullare tutte le sollecitazioni di trazione che lì verrebbero a produrre.

Nella sezione di mezzeria della trave deve imporsi pertanto la condizione

$$\sigma_{ci}^{es} = -\frac{N}{A} - \frac{Ne}{W_i} + \frac{M_g + M_q}{W_i} = 0 \quad (53)$$

Trascurando, nella fase iniziale di progetto, le modifiche apportate dalla iniezione delle malte di protezione all'inerzia della sezione resistente. Dalla (53) si ricava quindi

$$N = \frac{M_g + M_q}{W_i / A + e} \quad (54)$$

Tale determinazione della forza di precompressione in esercizio presuppone la scelta della geometria della sezione resistente della trave in mezzeria. Occorre pertanto fissare preliminarmente una sezione resistente di primo tentativo e, successivamente valutare con la (30) la forza di precompressione richiesta. Occorrerà poi procedere, con il valore (30) della forza di precompressione ora calcolata, alla verifica delle sollecitazioni nel calcestruzzo in tutte le varie fasi di lavoro della sezione.

Sulla base dei valori ammissibili delle sollecitazioni forniti dalla normativa deve aversi pertanto

$$\begin{aligned} \sigma_i^{tiro} &\geq K_{\min}^{tiro} & \sigma_s^{tiro} &\leq K_{\max}^{tiro} \\ \sigma_i^{vuoto} &\geq K_{\min}^{vuoto} & \sigma_s^{vuoto} &\leq K_{\max}^{vuoto} \\ \sigma_i^{es} &\leq K_{\max}^{es} & \sigma_s^{es} &\geq K_{\min}^{es} \end{aligned} \quad (55)$$

### **Esempi numerici**

*Peso della trave*

$$g \approx 0,913 \times 2,5 = 2,28 \text{ t/ml}$$

*Momenti flettenti da peso proprio in mezzeria*

$$M_g = \frac{2,28 \times 35,00^2}{8} = 349,1 \text{ tm}; \quad M_{g+q} = \frac{5,28 \times 35,00^2}{8} = 808,5 \text{ tm}$$

*Calcolo forza di precompressione richiesta in esercizio*

Eccentricità di  $N$ :

$$e = 2,50 - 1,134 - 0,5 \times 0,40 = 1,166 \text{ m}$$

$$N \left( \frac{1}{0,913} + \frac{1,166}{0,485} \right) - \frac{808,5}{0,485} = 0 \quad NX 3,5 - 1667,0 = 0$$

$$N = 476,3 \text{ t}$$

*Verifiche*

*Al tiro*

Al tiro al bordo inferiore

$$\sigma_i^{tiro} = \frac{1,25 \times 476,3}{0,913} + \frac{1,25 \times 476,3 \times 1,166}{0,485} - \frac{349,1}{0,485} = 652,1 + 1431,3 - 719,8 = 1363,6 \text{ t/mq}$$

Al tiro al bordo superiore

$$\sigma_s^{tiro} = \frac{1,25 \times 476,3}{0,913} - \frac{1,25 \times 476,3 \times 1,166}{0,585} + \frac{349,1}{0,585} = 652,1 - 1186,7 + 596,8 = 62,2t / mq$$

In esercizio

In esercizio al bordo inferiore

$$\sigma_i^{es} = \frac{476,3}{0,913} + \frac{476,3 \times 1,166}{0,485} - \frac{808,5}{0,485} = 512,4 + 1145,0 - 1667,0 = -9,6t / mq$$

In esercizio al bordo superiore

$$\sigma_s^{es} = \frac{476,3}{0,8876} - \frac{476,3 \times 1,166}{0,585} + \frac{808,5}{0,585} = 512,4 - 983,0 + 1382,1 = 911,5t / mq$$

A vuoto

Si assume che nel comportamento a vuoto, oltre al peso proprio della trave, vi sia un'aggiunta di carico permanente pari a 0,2 t/ml

$$M_{vuoto} = \frac{2,48 \times 35,00^2}{8} = 379,8tm$$

A vuoto al bordo inferiore

$$\sigma_i^{tiro} = \frac{476,3}{0,913} + \frac{476,3 \times 1,166}{0,485} - \frac{379,8}{0,485} = 521,7 + 1145,1 - 783,1 = 883,7t / mq$$

A vuoto al bordo superiore

$$\sigma_s^{tiro} = \frac{476,3}{0,913} - \frac{476,3 \times 1,166}{0,585} + \frac{379,8}{0,585} = 521,7 - 949,3 + 649,2 = 221,6t / mq$$

*Escursioni della forza di precompressione nelle varie fasi di lavoro della trave*

La forza risultante di precompressione è posizionata al centro  $C_b$  del bulbo inferiore

Al tiro, considerando la presenza del momento  $M_g$ , la risultante di  $\beta N$  e di  $M_g$ , si sposta in alto al di sopra di  $C_b$  della quantità

$$d_{tiro} = \frac{M_g}{\beta N} = \frac{349,1}{1,25 \times 476} = 0,59m$$

Poiché, come è stato calcolato, la distanza tra il centro  $C_b$  del bulbo e il nocciolo inferiore  $N_i$  risulta

$$d_{N_i, C_b} = 1,166 - 0,64 = 0,526m$$

al tiro la forza  $\beta N$  scavalca il punto di nocciolo inferiore ed entra nel nocciolo della quantità pari a  $0,59 - 0,53 = 0,06m$

La sezione è quindi tutta compressa, come del resto si è calcolato.

A cadute di tensione scontate, se si conserva solo  $M_g$ , la forza  $N$  sale e si posiziona alla distanza da  $C_b$  pari a

$$d_{tiro, \infty} = \frac{M_g}{N} = \frac{349,1}{476} = 0,73m$$

A vuoto la forza  $N$  sale ancora e si posiziona nel punto  $C_v$  posto alla distanza di  $C_b$  pari a

$$d_{tiro, \infty} = \frac{M_{g, vuoto}}{N} = \frac{379,8}{476} = 0,80m$$

In esercizio, per l'aggiunta del momento flettente dovuto ai carichi accidentali  $q = 3t/ml$

$$M_q = \frac{3 \times 35,00^2}{8} = 459,4tm$$

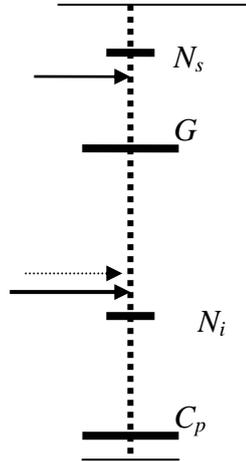
la forza di precompressione  $N$  si sposta in alto della quantità

$$\Delta d_{tiro,\infty} = \frac{M_q}{N} = \frac{459,4}{476} = 0,87m$$

In esercizio quindi lo sforzo  $N$  si posiziona alla distanza  $d$  dal centro  $C_b$  del bulbo inferiore pari a  $d = 0,80m + 0,87m = 1,676m$

Il punto di nocciolo superiore è collocato sopra il baricentro  $G$  della sezione alla distanza di  $0,53m$  e quindi, come si è prima valutato, alla distanza dal centro  $C_b$  del bulbo inferiore pari a

$$d_{N_s, G_b} = 1,166 + 0,53 = 1,696m$$



Le varie posizioni di  $\beta N$  e di  $N$  nelle varie fasi di lavoro della trave

Fig.22

La forza di precompressione si trova quindi sotto il punto di nocciolo superiore di  $1,896m - 1,676m = 0,02m$ , cioè di soli  $2cm$ .

Si utilizzano cavi Tecnicavi serie  $0,6''$  ( $15mm$ ) costituito da  $6$  trefoli  $0,6''$  per cavo

La sezione nominale del cavo è di  $8,34cm^2$

La tensione in esercizio nei trefoli nella sezione di mezzeria della trave vale quindi

$$\sigma_{s,es} = \frac{476000}{6 \times 8,34} = 9512kg/cm^2$$

Al tiro in mezzeria, avremo invece,

$$\sigma_{s,tiro} = 1,25 \times 9512 = 11890kg/cm^2$$

La tensione di tiro al martinetto, cioè in testata sarà d'altra parte più elevata per le azioni di attrito che si esercitano tra cls e cavi.

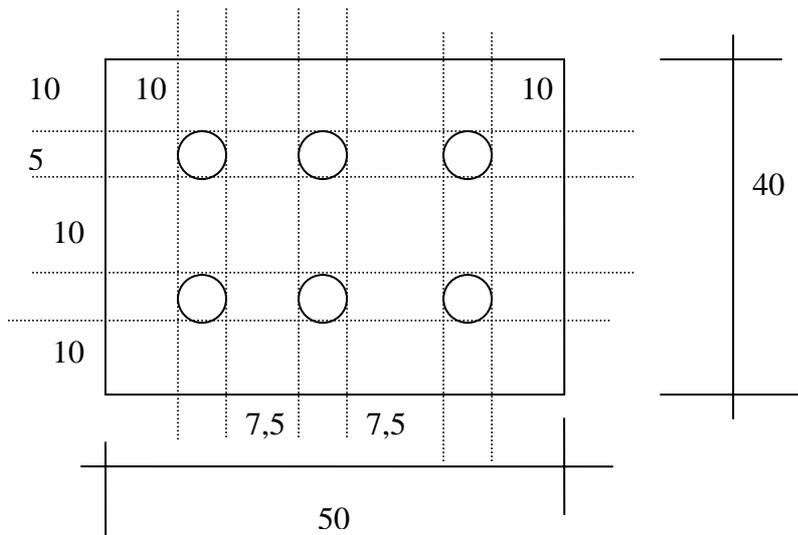
Le caratteristiche dell'acciaio utilizzato sono tali da consentire tali livelli di tensione.

Il cavo pesa  $6,54kg/m$ . Il diametro corrente della guaina del cavo è di  $50mm$ . Il diametro della piastra di ancoraggio (tipo superficiale) è di  $200mm$ . La lunghezza dell'ancoraggio è di  $329mm$ .

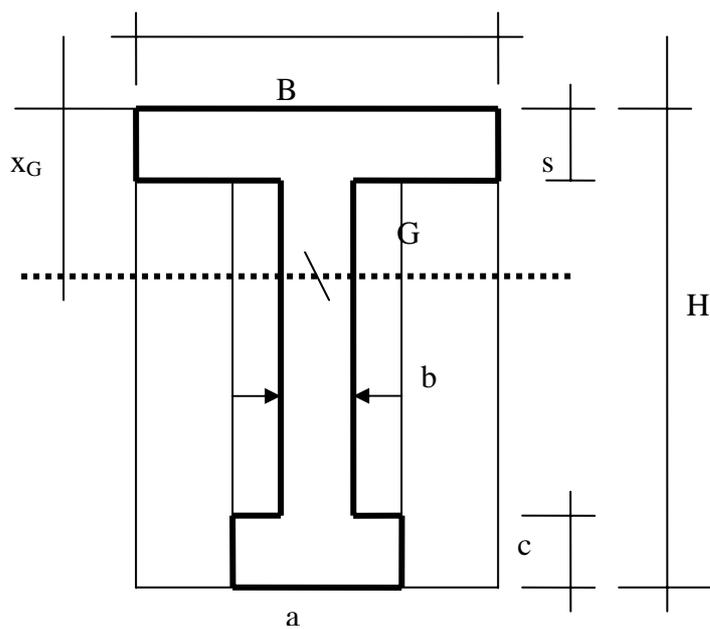
$$A = BH - (B-a)(H-s) - (a-b)(H-s-c)$$

$$S_{a-a} = \frac{BH^2}{2} - (B-a)(H-s)\left[\frac{1}{2}(H-s) + s\right] - (a-b)(H-s-c)\left[\frac{1}{2}(H-s-c) + s\right]$$

$$x_G = \frac{S_{a-a}}{A}$$



Posizione di cavi nel bulbo. Sezione corrente  
Fig.23



L'esempio della sezione in c.a.p.  
Fig.24

$$J_G = \frac{Bx_G^3}{3} + \frac{B(H-x_G)^3}{3} - \frac{(B-b)(x_G-s)^3}{3} - \frac{(B-a)(H-x_G)^3}{3} - \frac{(a-b)(H-c-x_G)^3}{3}$$

$$W_i = \frac{J_G}{H-x_G} \quad W_s = \frac{J_G}{x_G} \quad 0 = \frac{N}{A} + \frac{Ne}{W_i} - \frac{M_g}{W_i} \quad N = \frac{M_g}{e + \frac{W_i}{A}}$$

### 8.5.11) Il taglio nel c.a.p.

Se nella sezione della trave precompressa in cui vogliamo analizzare lo stato di sollecitazione, il cavo risultante è inclinato, sulla sezione complessiva della trave agirà una forza di compressione inclinata.

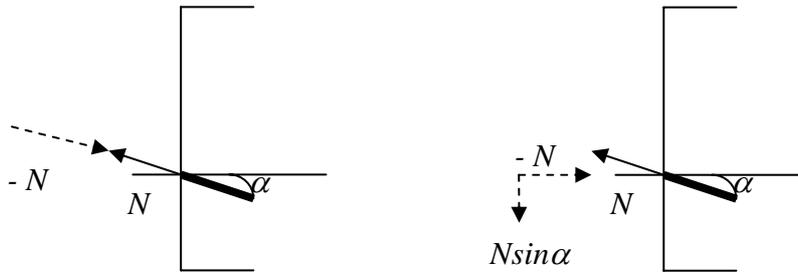
Sia  $\alpha$  l'angolo che la tangente al cavo forma con l'orizzontale. Poiché di regola, tenendo conto che l'angolo  $\alpha$  è piccolo, si ha in generale che, all'incirca  $\cos \alpha \approx 1$ . Scomponendo quindi la forza di compressione inclinata che agisce sulla sezione della trave nelle due forze assiali  $N_o$  e verticali  $N_v$

Risulta

$$N_o \approx N \qquad N_v = N \sin \alpha \qquad (56)$$

dove, per essere la curva del cavo molto *tesa*, può essere utile l'approssimazione

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{8e_o}{L^2} z \qquad 0 \leq z \leq L/2$$



La sezione della trave in c.a.p. con il cavo inclinato  
Fig.25

In definitiva, in presenza di cavo inclinato, l'eccentricità della forza di precompressione è variabile lungo la trave e sulle sezioni si esercita l'azione tagliante, derivante direttamente dalla precompressione, rappresentata dalla componente verticale  $N_v = N \sin \alpha$  della forza di precompressione  $N$ .

Si riconosce che tale azione di taglio agisce con verso opposto a quello del taglio  $T_{g+q}$  dovuto ai carichi verticali, siano essi dovuti al peso della trave che ai carichi accidentali. Il taglio complessivo sulla sezione risulta quindi:

*al tiro*

$$T = T_g - \beta N \sin \alpha \qquad (57)$$

*in esercizio*

$$T = T_g - N \sin \alpha \qquad (58)$$

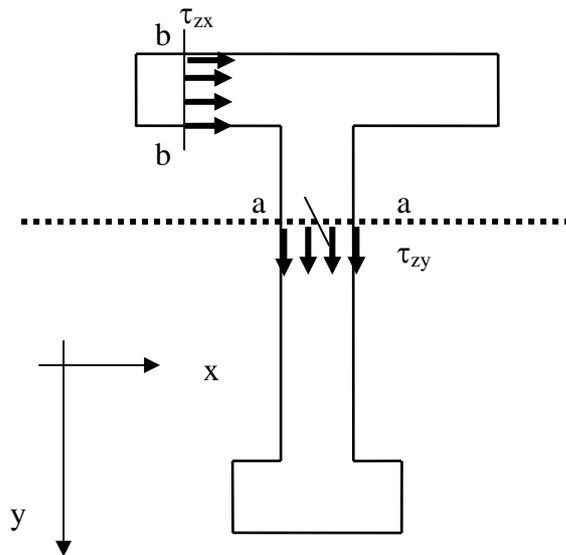
Di regola quindi il taglio dovuto alla precompressione riduce l'azione tagliante derivante dai carichi. In effetti, l'azione  $N_v = N \sin \alpha$  può essere tanto rilevante da produrre un'azione di taglio complessiva di verso opposto a quello dovuto ai carichi agenti ma comunque elevata.

Nella sezione della trave le tensioni tangenziali  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{zx}$  prodotte dalla precompressione (Fig.43) risultano dovute alla variazione di eccentricità del cavo, che produce variazione di momento, e non alla variazione di forza assiale. Esse valgono quindi

$$\tau_{zy} = \tau_{zx} = \frac{S}{Jb} N \sin \alpha \quad (59)$$

dove  $S$  è il momento statico rispetto all'asse neutro baricentrico di tutta l'area della sezione posta superiormente alla corda dove si vuole valutare la  $\tau_{zy}$  o la  $\tau_{zx}$ ;  $b$  è la larghezza della corda,  $J$  il momento di inerzia della sezione della trave.

Nella Fig.44, oltre alle  $\tau_{zy}$  sono anche indicate le tensioni tangenziali  $\tau_{zx}$  che agiscono sulla corda  $b - b$  nell'ala superiore, anch'esse dovute alla variabilità dell'eccentricità della forza  $N$  di precompressione. Anche queste sollecitazioni sono espresse dalla relazione (59).



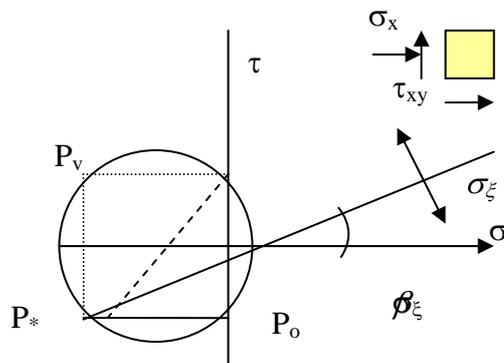
La sezione della trave soggetta a taglio per effetto della forza di precompressione

Fig.26

Al tiro ed in esercizio lo stato di sollecitazione indotto dall'azione di taglio da precompressione si cumula con quello dovuto ai carichi verticali. La tensione tangenziale complessiva è quindi

$$\tau_{zy}^{tiro} = \tau_{zx}^{tiro} = \frac{S}{Jb} (T_g - \beta N \sin \alpha) \quad \tau_{zy}^{es} = \tau_{zx}^{es} = \frac{S}{Jb} (T_{g+q} - N \sin \alpha) \quad (60)$$

Sono sempre le sollecitazioni di trazione che devono essere controllate. Va quindi osservato



Il cerchio di Mohr dello stato di sollecitazione sul baricentro della sezione

Fig.27

che nella sezione precompressa, a differenza della sezione in c.a., sono sempre di regola presenti sollecitazioni normali, di regola di compressione. Queste variano da punto a punto per cui la tensione principale di trazione, presente sulla giacitura inclinata dell'angolo  $\beta$  rispetto all'orizzontale, come descritto in Fig. 27, varierà di direzione e di intensità da punto a punto della sezione. Convenzionalmente la tensione principale di trazione viene valutata sulla corda baricentrica della sezione. Come si riconosce dalla Fig.27, la giacitura su cui si esercita la tensione principale di trazione  $\sigma_\xi$  è meno inclinata rispetto all'orizzontale di come si ha per il caso tradizionale del c.a. e quindi la  $\sigma_\xi$  è più prossima alla verticale. Le tensioni principali di trazione e di compressione  $\sigma_\xi$  e  $\sigma_\eta$  risultano

$$\sigma_\eta, \sigma_\xi = -\frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{2} + \tau^2} \quad (61)$$

L'angolo  $\beta$  di inclinazione della giacitura su cui si esercita la tensione principale di trazione  $\sigma_\xi$  risulta

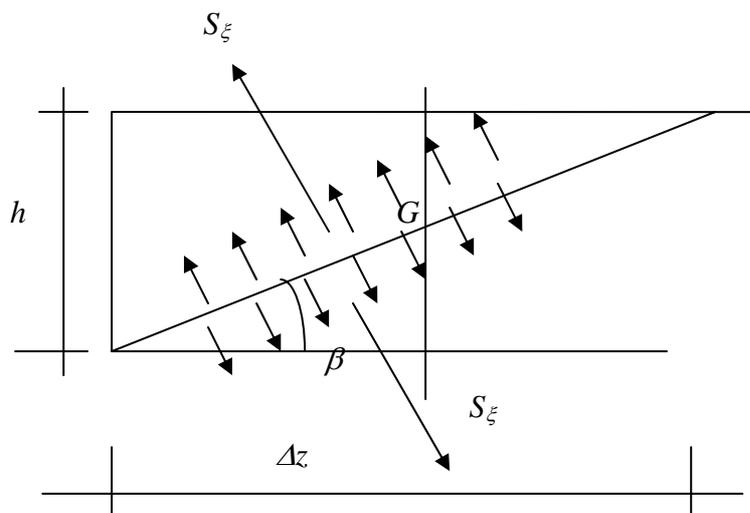
$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\tau}{\sigma_x}$$

Convenzionalmente si assume un valore costante della  $\sigma_\xi$  su tutta la diagonale passante per il baricentro G su tutta l'altezza della sezione. La risultante  $S_\xi$  delle forze di strappo vale quindi (Fig.28)

$$S_\xi = \sigma_\xi b \frac{\Delta z}{\cos \beta} \quad (61)$$

L'assorbimento di tale forza  $S_\xi$  è effettuato, a differenza del modello di Morsch per il c.a., affidando tutta la  $S_\xi$ , e quindi sia la sua componente orizzontale  $S_{\xi o}$  che verticale  $S_{\xi v}$  ad un *reticolo* di idonee armature in acciaio dolce diffuse nel corpo della trave, cioè costituite da usuali barre da c.a. disposte in direzione verticale e orizzontale. La componente verticale  $S_{\xi v}$  della  $S_\xi$  e quindi la forza

$$S_{\xi v} = S_\xi \cos \beta = \sigma_\xi b \Delta z \quad (62)$$



La forza di strappo dovuta alle  $\sigma_\xi$

Fig.28

è assorbita dalle staffe verticali, mentre la componente orizzontale  $S_{\xi o}$  della  $S_{\xi}$  e quindi la forza

$$S_{\xi o} = S_{\xi} \sin \beta = \sigma_{\xi} b \Delta z \operatorname{tg} \beta \quad (63)$$

è assorbita da armature orizzontali diffuse lungo l'altezza della sezione della trave. Per il proporzionamento delle staffe si ha quindi

$$2\omega_{st}\sigma_{sa}N_{st} = \sigma_{\xi}b\Delta z \quad (64)$$

se si ipotizzano staffe a due braccia,  $N_{st}$  è il numero di staffe per unità di lunghezza e  $\sigma_{sa}$  la tensione ammissibile dell'acciaio e  $\omega_{st}$  è l'area dei tondini di cui le staffe sono costituite.

Se inoltre  $\bar{\omega}_{sl}$  è l'area del singolo tondino longitudinali da disporre lungo l'altezza della trave, da disporre a coppia lungo il bordo verticale della sezione,  $N_l$  è il numero di tondini per unità di lunghezza da disporre in direzione longitudinale sull'altezza della sezione, deve aversi anche

$$2\bar{\omega}_{sl}N_l\sigma_{sa} = \sigma_{\xi}b\Delta z \operatorname{tg} \beta \quad (64)$$

Ovvero, essendo

$$h = \Delta z \operatorname{tg} \beta \quad (65)$$

riesce

$$2\bar{\omega}_{sl}N_l\sigma_{sa} = \sigma_{\xi}bh \quad (66)$$

Di regola sia le armature longitudinali che le staffe nelle travi in c.a.p. vengono scelte con diametri sufficientemente elevati in modo che la gabbia delle armature che ne consegue sia sufficientemente rigida per poter ad essa agganciare i cavi.

### **Esempio**

Sia  $\sigma_{\xi} = 12 \text{ kg/cm}^2$ ;  $b = 25 \text{ cm}$ ;  $h = 150 \text{ cm}$ ; staffe a due braccia costituite da  $\phi 12$  ed armature longitudinali costituite da  $\phi 12$  per cui  $\omega_{st} = 1,13 \text{ cm}^2$ ;  $\bar{\omega}_{sl} = 1,54 \text{ cm}^2$ .

Si assuma  $\sigma_{sa} = 2000 \text{ kg/cm}^2$ . Risulta quindi, per le staffe,  $\Delta z = 100 \text{ cm}$  quindi dalla (62)

$S_{\xi} = 12 \times 25 \times 100 = 30.000 \text{ kg}$  e quindi  $N_{st} = 6,4$  per metro lineare. Per le armature longitudinali dalla (64) ricaviamo  $2 \times 1,54 \times N_l \times 2000 = 12 \times 25 \times 150 = 45.000 \text{ kg}$ .

Si ha quindi  $N_l = 7,3$  per metro lineare lungo la verticale nella sezione. In definitiva si assumono staffe  $\phi 12$  ogni 15 cm ed armature longitudinali  $\phi 14$  ogni 20 cm sull'altezza della sezione di 150 cm.