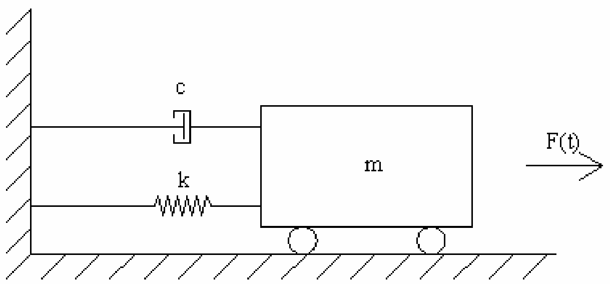
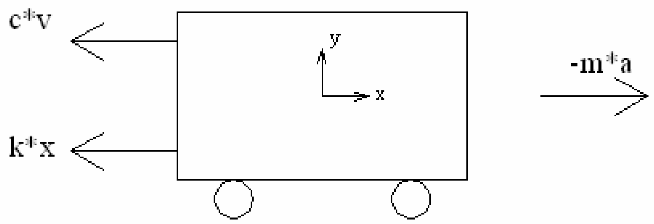
AZIONI DINAMICHE

Una struttura può essere soggetta ad azioni classificabili secondo due gruppi fondamentali: azioni statiche ed azioni dinamiche.
Se la variazione delle azioni agenti è abbastanza lenta rispetto alle caratteristiche dinamiche della struttura si può ritenere di essere nel campo delle azioni statiche cioè se il tempo di carico t (definito come il tempo necessario alle azioni per raggiungere il loro valore massimo) è molto maggiore del periodo fondamentale della struttura T (cioè il primo dei periodi delle sue oscillazioni libere) sarà sufficiente il calcolo statico con gli usuali calcoli statici per la determinazione delle tensioni in una struttura (t dovrebbe essere almeno pari a 2-3 volte T).
In caso contrario occorre tenere conto degli effetti dinamici, che determinano un incremento di sollecitazioni e deformazioni.
Lo studio del comportamento di una struttura a seguito di una sollecitazione dinamica viene sviluppato con l'applicazione delle teorie della **dinamica delle strutture** che, partendo dal **secondo principio del moto F = m * a**, lo applica, con alcune ipotesi di base, e ne trae i risultati necessari per un dimensionamento ingegneristico.
Le ipotesi fondamentali sono l'applicazione del sistema di forze ad una struttura che si trova in una configurazione di equilibrio stabile e gli spostamenti attorno a quella configurazione possano ritenersi piccoli al fine di poter applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e garantire la linearità della risposta strutturale.
In generale un elemento strutturale reale (dotato di propria elasticità e geometria) può essere considerato, in prima approssimazione, come una massa collegata a un supporto rigido mediante vincoli non rigidi (molle e smorzatori che simulano il reale comportamento della struttura) che soggetta ad un sistema di forze variabili nel tempo subirà una accelerazione anch'essa variabile nel tempo e che determinerà spostamenti dipendenti dal tempo. Applicando l'equazione sopra riportata si ottiene la seguente situazione:



Questa schematizzazione semplificata permette di capire alcuni concetti base dell'analisi ma è anche il modello fondamentale che costituisce il sistema strutturale nel suo insieme.
Il primo passo nell'analisi dinamica è sempre quello che porta allo studio delle oscillazioni libere. Tale studio permette di determinare il moto della massa a seguito dell'applicazione di una forza istantanea (urti, esplosioni):



Avendo posto il sistema di riferimento solidale col corpo in movimento viene introdotto il termine inerziale m*a e dall'equilibrio si ottiene

$$m \cdot a(t) = -c \cdot v(t) - k \cdot x(t)$$

essendo $a(t) = \ddot{x}(t)$ e $v(t) = \dot{x}(t)$

si ottiene l'equazione del moto (differenziale del 2° ordine): $\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$

ponendo $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ fattore percentuale di smorzamento

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsazione naturale ed il periodo proprio $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$\omega_D = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ pulsazione naturale del sistema smorzato

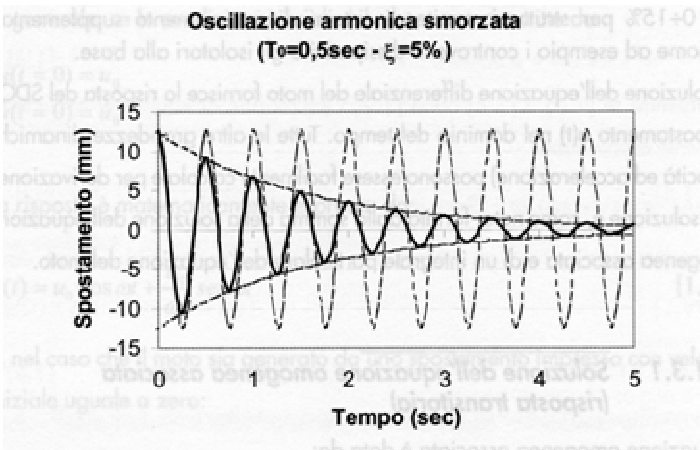
Si ottiene la funzione che esprime lo spostamento del corpo in funzione del tempo:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[Asen(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)\right]$$

A seconda delle condizioni iniziali di moto si ottengono gli spostamenti desiderati in funzione degli istanti di tempo considerati.

Per esempio se $x(t=0) = 12{,}5mm$ e $\dot{x}(t=0) = 0$

Si ottiene il seguente grafico



Quando la forza è applicata per un certo tempo t (vento e sisma) l'integrale generale sopra determinato dovrà essere sommato all'integrale particolare che dipenderà dal tipo di variabilità temporale della forzante applicata.
La soluzione dell'equazione differenziale del moto si complica ma si arriva al risultato desiderato ed a titolo di esempio si riportano le equazioni che descrivono il moto nel caso di azione sinusoidale (vento)

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[Asen(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)\right] + \frac{F_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)sen(\omega t) - 2\xi\beta\cos(\omega t)\right]$$

avendo posto $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} = \frac{\bar{f}}{f_0}$ rapporto tra frequenza della forzante e frequenza naturale del sistema e di una forza di tipo sismico

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t -m\dot{x}_g(\tau) e^{-\xi\omega_0 (t-\tau)} sen[(\omega_D (t-\tau)] d\tau$$

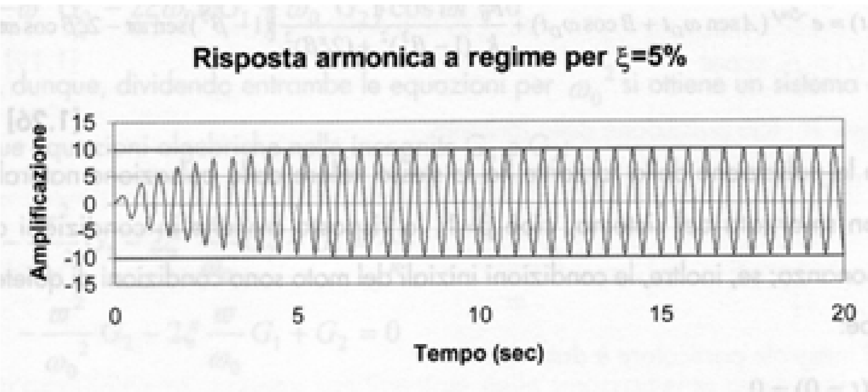
Particolare considerazione merita il valore β, introdotto sopra, perché quando assume il valore unitario si ha la **risonanza** del sistema: particolare condizione per la quale le oscillazioni del sistema smorzato vengono amplificate fino ad un valore costante.

Ponendo β=1 e le condizioni iniziali $x(t=0)=0$ e $\dot{x}(t=0)=0$

si ottiene

$$x(t) = \frac{1}{2\xi}\frac{F_0}{k}\left[e^{-\xi\omega_0 t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} sen(\omega_D t) + \cos(\omega_D t) \right) - \cos(\omega_0 t) \right]$$

graficamente rappresentata come segue:



Questa condizione è la peggiore per una struttura, infatti applicando una forza periodica che abbia una frequenza uguale alla frequenza naturale del sistema si ottiene un incremento degli spostamenti, e quindi delle sollecitazioni, mandando in crisi la costruzione: questa è la causa di molti crolli di ponti anche famosi.

A questo punto si può pensare ad una costruzione nel suo complesso come l’insieme di più sistemi del tipo sopra descritto ed ottenere sistemi di equazioni differenziali che risolte portano alla determinazioni di spostamenti e sollecitazioni negli elementi strutturali. Data la complessità delle equazioni, tra l’altro diverse a seconda del tipo di forzante applicata e la laboriosità del calcolo, risulta facile capire quanto l’introduzione dei calcolatori abbia semplificato le operazioni ripetitive dell’integrazione di ogni equazione. Si ricorda inoltre che a seconda del numero di masse in cui si suddivide la struttura dipende la durata di risoluzione, infatti si avrà un numero di equazioni pari alla somma dei gradi di libertà di ogni massa.